АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Устойчивость представляет собой способность системы автоматического управления возвращаться к исходному состоянию после кратковременного внешнего воздействия. САУ, как правило, должны быть устойчивыми.

Необходимым и достаточным условием устойчивости линейной САУ является отрицательность вещественных частей всех корней ее характеристического уравнения. Последнее может быть получено из передаточной функции замкнутой системы, связывающей любые ее вход и выход, путем приравнивания к нулю знаменателя передаточной функции.

Пусть линейная САУ описывается линейным дифференциальным уравнением, решение которого можно получить с помощью характеристического уравнения

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0.$$

В общем случае корни х.у. комплексные. Тогда

Каждый корень $\lambda_i = \alpha_i + j\omega_i$ всегда может быть представлен на комплексной плоскости в виде соответствующего вектора. Обозначая концы векторов на комплексной плоскости точками (рис. 5.1) и считая, что действительная ось слева от мнимой оси соответствует отрицательным значениям вещественных частей корней характеристического уравнения, можно сформулировать условие устойчивости следующим образом: *необходимым и достаточным условием устойчивости системы является расположение корней характеристического уравнения в левой полуплоскости.*

свободного движения при $t \to \infty$ не к нулю, а к некоторой постоянной величине.

Для определения устойчивости системы по необходимому и достаточному условиям нужно уметь находить корни характеристического уравнения. Это делается весьма просто только для уравнений первого и второго порядков. Для уравнения третьего порядка получаются очень сложные и непригодные для практического использования формулы. Для уравнений более высокого порядка задача определения корней в виде аналитических выражений не имеет практического решения.

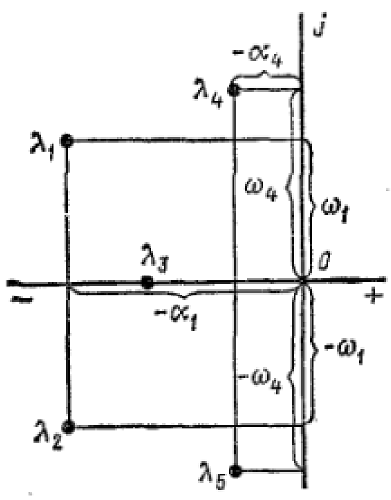

Рис. 5.1

Таким образом, возникает проблема анализа на устойчивость без нахождения корней характеристического уравнения. Эта проблема решается с помощью критериев устойчивости.

Существуют несколько критериев устойчивости: алгебраические и частотные. Рассмотрим первый из этих типов.

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАУСА

Необходимые и достаточные условия устойчивости системы любого порядка без решения характеристического уравнения, но с введением в рассмотрение его коэффициентов, были найдены и сформулированы в виде неравенств Раусом в 1877 г. и независимо от него Гурвицем в 1895 г. Условия Рауса и Гурвица эквивалентны, хотя и различаются по форме.

Сущность критерия Рауса заключается в следующем. Пусть имеется характеристическое уравнение

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \quad (5.20)$$

Полагаем, что коэффициент $a_0 > 0$. Если это не так, то умножением на —1 характеристическое уравнение приводится к нужной форме. Раус составлял таблицу коэффициентов (табл. 5.1), используя следующие правила.

Первая строка таблицы заполняется коэффициентами характеристического уравнения с четными индексами. Во второй строке выписываются коэффициенты с нечетными индексами. Коэффициенты

в остальных ячейках таблице определяют как

$$C_{k,i} = C_{k+1,i-2} - r_i C_{k+1,i-1},$$

где

$$r_i = C_{1,i-2}/C_{1,i-1}$$

k-индекс, означающий номер столбца в таблице; I – индекс, означающий номер строки табл.

Число строк таблиц Рауса равно степени характеристического уравнения плюс единиц, т.е.n+1.

После того как таблица Рауса заполнена, по ней можно судить об устойчивости системы. Условие устойчивости Рауса формулируется так: для того чтобы САУ была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первого столбца таблицы Рауса имели один и тот же знак, т.е. при $a_0 > 0$ были положительными.

$$C_{11} = a_0 > 0;\ C_{12} = a_1 > 0;\ C_{13} = a_2 > 0$$

Если не все коэффициенты первого столбца положительны, то система неустойчива, а число правых корней характеристического уравнения равно числу перемен знака в первом столбце таблицы Рауса.

Таблица 5.1

Значения r	Номер строки	Номер столбца			
		1	2	3	...
—	1	a_0	a_2	a_4	...
—	2	a_1	a_3	a_5	...
$r_0=\frac{a_0}{a_1}$	3	$c_{13}=a_2-r_0a_3$	$c_{23}=a_4-r_0a_5$	$c_{33}=a_6-r_0a_7$	...
$r_1=\frac{a_1}{c_{13}}$	4	$c_{14}=a_3-r_1c_{23}$	$c_{24}=a_5-r_1c_{33}$	$c_{34}=a_7-r_1c_{43}$	...
$r_2=\frac{c_{13}}{c_{14}}$	5	$c_{15}=c_{23}-r_2c_{24}$	$c_{25}=c_{33}-r_2c_{34}$	$c_{35}=c_{43}-r_2c_{44}$	...
$r_3=\frac{c_{14}}{c_{15}}$	6	$c_{16}=c_{24}-r_3c_{25}$	$c_{26}=c_{34}-r_3c_{35}$	$c_{36}=c_{44}-r_3c_{45}$	...
...	...	...	...	...	...

Пример 5.1. Имеется характеристическое ура нение шестого порядка

$$0{,}1\lambda^6+5\lambda^5+10\lambda^4+30\lambda^3+15\lambda^2+6\lambda+1=0.$$

Определим коэффициенты таблицы Рауса по формулам (5.21) и (5.23). Таблица Рауса приводится ниже (табл. 5.2)

Таблица 5.2

Номер строки	Номер столбца			
	1	2	3	4
1	$a_0=0{,}1$	$a_2=10$	$a_4=15$	$a_6=1$
2	$a_1=5$	$a_3=30$	$a_5=6$	0
3	$c_{13}=9{,}4$	$c_{23}=14{,}9$	$c_{33}=1$	0
4	$c_{14}=22{,}1$	$c_{24}=5{,}46$	$c_{34}=0$	0
5	$c_{15}=12{,}5$	$c_{25}=1$	0	0
6	$c_{16}=3{,}69$	$c_{26}=0$	0	0
7	$c_{17}=1$	0	0	0

Все коэффициенты первого столбца табл. 5.2 положительны. Следовательно, система устойчива.

ЗАДАЧИ

1.Тип С помощью критерия Рауса исследовать на устойчивость САУ с характеристическим уравнением

$$A(p)=p^3+4p^2+6p+13$$

Решение:

$A(p)=p^3+4p^2+6p+13=0$, найдем коэффициенты и составим таблицу…Коэфф. первого столбца положительны – система устойчива.

2.Тип Задана передаточная функция САУ. Исследовать на устойчивость по критерию Рауца. Передаточная функция САУ имеет вид

$$W(p)=\frac{b_m p^m+b_{m-1}p^{m-1}\quad+\cdots+b_0}{a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_n}$$

Тогда характеристическое уравнение имеет вид

$$A(p)=a_0p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

Составим таблицу Рауса и исследуем ее.(дальше такое решение как в 1типе задач).