

ГРАФЫ

Математическую модель системы управления наглядно можно представить с помощью ориентированных графов. **Графом** называется совокупность множества V точек, называемых *вершинами*, и множества R простых (самонепересекающихся) кривых, называемых *ребрами*, удовлетворяющих следующим условиям:

1. каждое незамкнутое ребро содержит ровно две точки множества V , которые являются граничными точками ребра;
2. каждое замкнутое ребро содержит только одну точку из V (граничные точки совпадают)
3. ребра не имеют общих точек, за исключением точек из множества V .

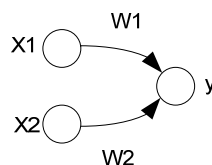
На рисунке вершина изображается точкой или окружностью. Граф обозначают одной буквой G или парой букв (V,R) , где V - множество верши, R – множество ребер графа.

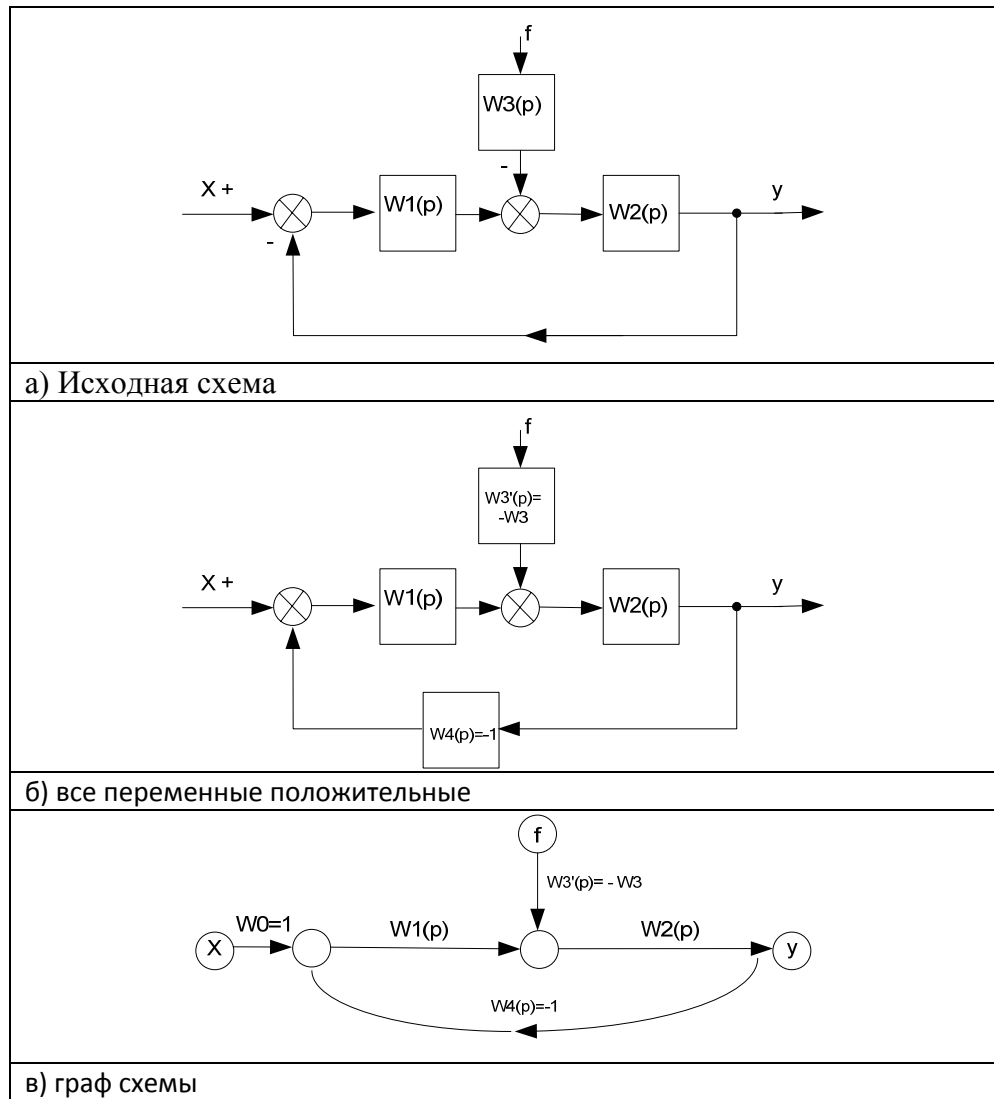
Граф системы управления представляет собой ориентированный граф, который обладает следующими свойствами:

1. Каждая дуга (ребро со стрелкой, указывающей направление распространения сигнала) изображает звено и характеризуется оператором изображаемого ею звена.
2. Каждой вершине ставится в соответствие одна из переменных. Если к вершине подходит (входит в нее) только одна дуга, то соответствующая ей переменная равна выходной величине дуги (выходной величине изображаемого ею звена). Если к вершине подходят несколько дуг, то соответствующая ей переменная равна сумме выходных величин этих дуг. Входная величина дуги (входная величина изображаемого ею звена) равна переменной вершины, из которой эта дуга исходит. Если из вершины исходят несколько дуг, то входная величина всех этих дуг одна и та же.

Граф системы управления легко построить по ее структурной схеме (и наоборот), при этом нужно:

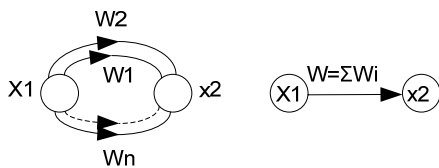
1. исходную схему нужно представить так, чтобы в сумматорах все переменные складывались с положительным знаком
2. Затем по последней схеме построить граф по следующим правилам:
 - каждый сумматор заменяется вершиной, которой ставится в соответствие выходная переменная заменяемого сумматора;
 - каждое звено (прямоугольник на структурной схеме) заменяется дугой с оператором, равным оператору заменяемого звена
 - каждой переменной (в том числе переменной, обозначающей внешнее воздействие) соответствует своя вершина. Если нужно изобразить выход одной из дуг, входящих в общую вершину, то следует ввести дополнительную, конечную для этой дуги вершину и соединить эту вершину с исходной вершиной дугой с единичным оператором.



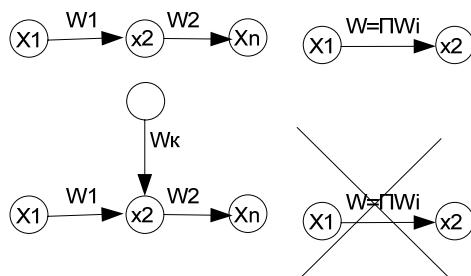


Формула Мейсона

1. Параллельные дуги можно заменить одной дугой с передаточной функцией, равной сумме передаточных функций исходных дуг



2. Простой путь, если нет не принадлежащих ему дуг, можно заменить дугой с передаточной функцией, равной произведению передаточных функций дуг этого пути



Для упрощения графа и вычисления передаточной функции системы управления по ее графу можно воспользоваться **формулой Мейсона**

$$W_{xg} = \sum_{i=1}^m (W_i \Delta_i) / \Delta.$$

Здесь W_i – передаточная функция i -го простого пути от вершины g к вершине x , равная произведению передаточных функций дуг, входящих в этот путь; m - общее число таких путей; Δ -определитель графа.

$$\Delta = 1 - \sum W_{0j} + \sum_{j,k} W_{0j}W_{0k} - \sum_{j,k,l} W_{0j}W_{0k}W_{0l} + \dots,$$

где в первой сумме W_{0j} - передаточная функция j -го простого контура, равная произведению передаточных функций входящих в это контур дуг, и суммирование производится по всем простым контурам; во второй сумме $W_{0j}W_{0k}$ - произведение передаточных функций j -го и k -го контуров и суммирование производится по всем непересекающимся парам контуров; в третьей сумме $W_{0j}W_{0k}W_{0l}$ – произведение передаточных функций j –го, k -го, l -го контуров и суммирование производится по всем непересекающимся тройкам контуров и т.д.

Δ_i - определитель подграфа, получающегося из исходного графа при удалении дуг и вершин i -го простого пути, а также всех дуг инцидентных (имеющим отношение)этим вершинам.

Иначе говоря, правило вычисление определителя Δ формулируется так:

$$\begin{aligned} \Delta = & 1 - (\text{сумма коэффициентов передачи всех отдельных контуров}) \\ & + (\text{сумма произведений всех комбинаций из 2} \\ & - \text{x непересекающихся контуров}) \\ & - (\text{сумма произведений всех комбинаций из 3} \\ & - \text{x непересекающихся контуров}) + \dots \end{aligned}$$

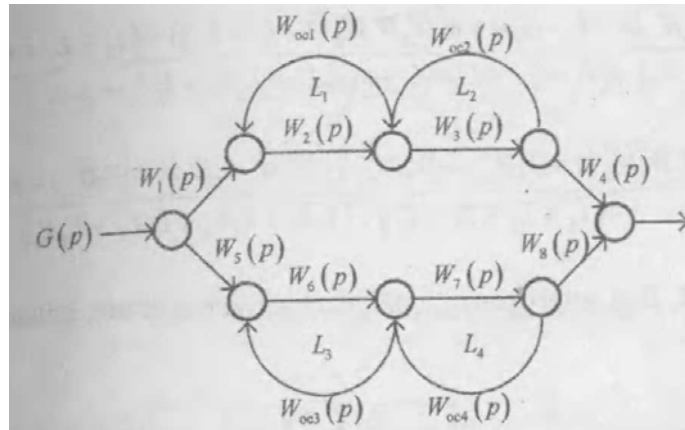
Два контура называется непересекающимися, если они не имеют общих дуг и (или) общих вершин. Тройка(четверка и т.д.) называется непересекающейся, если любая пара контуров из этой тройки является непересекающейся

Подграф, получающийся при удалении дуг и вершин какого-либо просто пути, а также всех дуг, инцидентных удаляемым вершинам, будем называть подграфом, соответствующим этому простому пути.

ЗАДАЧИ

№1.

- Пусть система представлена сигнальным графом с двумя параллельными путями. Определить передаточную функцию системы.



Решение

- От входа g к выходу y ведут два пути: $P_1=W_1W_2W_3W_4$ и $P_2=W_5W_6W_7W_8$.
- Граф содержит четыре контура:
 $L_1=W_2W_{oc1}$, $L_2=W_3W_{oc2}$, $L_3=W_6W_{oc3}$, $L_4=W_7W_{oc4}$.
- Контуры L_1 и L_2 не касаются контуров L_3 и L_4 . Следовательно, определитель графа есть

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1L_3 + L_1L_4 + L_2L_3 + L_2L_4)$$

Дополнительные множители определителя вычисляются так:

- для пути 1 из Δ удаляются контуры, касающиеся пути 1 ($L_1 = L_2 = 0$)

$$\Delta_1 = 1 - (L_3 + L_4) + (L_1L_3 + L_1L_4 + L_2L_3 + L_2L_4) = 1 - (L_3 + L_4);$$

- для пути 2 из Δ удаляются контуры, касающиеся пути 2 ($L_3 = L_4 = 0$)

$$\Delta_2 = 1 - (L_1 + L_2) + (L_1L_3 + L_1L_4 + L_2L_3 + L_2L_4) = 1 - (L_1 + L_2).$$

- В итоге передаточная функция системы запишется в виде

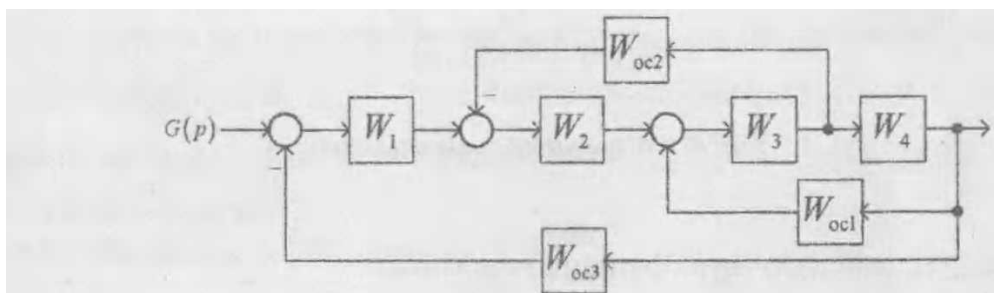
$$W = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{W_1W_2W_3W_4(1 - (L_3 + L_4)) + W_5W_6W_7W_8(1 - (L_1 + L_2))}{(L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1L_3 + L_1L_4 + L_2L_3 + L_2L_4)} =$$

$$= \frac{W_1W_2W_3W_4(1 - (W_6W_{oc3} + W_7W_{oc4})) + W_5W_6W_7W_8(1 - (W_2W_{oc1} + W_3W_{oc2}))}{(L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1L_3 + L_1L_4 + L_2L_3 + L_2L_4)}$$

P_1 - коэффициент передачи 1 пути, P_2 - коэффициент передачи 2 пути.

№2.

Для многоконтурной системы управления построить передаточную функцию



Решение

1. Схема имеет один прямой путь $P_1 = W_1W_2W_3W_4$
2. Схема содержит три контура: $L_1 = -W_2W_3W_4W_{oc2}$, $L_2 = W_3W_4W_{oc1}$, $L_3 = -W_1W_2W_3W_4W_{oc3}$, $L_4 = W_7W_{oc4}$.
3. Все контуры имеют общие узлы (являются касающимися), поэтому

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + (L_1L_3 + L_1L_4 + L_2L_3 + L_2L_4) = 1 - L_1 - L_2 - L_3.$$

Путь P_1 касается всех контуров, поэтому

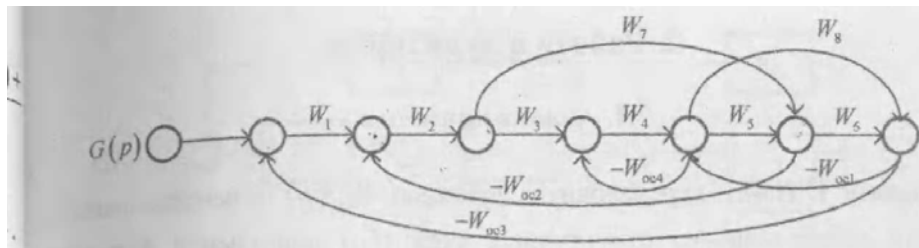
$$\Delta_1 = 1$$

Тогда передаточная функция системы запишется в виде

$$W = \frac{P_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{P_1\Delta_1}{1 - L_1 - L_2 - L_3}.$$

№3.

Для многоконтурной системы управления построить передаточную функцию



Решение

1. Система имеет три прямых пути: $P_1 = W_1W_2W_3W_4W_5W_6$, $P_2 = W_1W_2W_7W_6$, $P_3 = W_1W_2W_3W_4W_8$
2. В системе есть следующие контуры:
3. $L_1 = -W_2W_3W_4W_5W_{oc2}$, $L_2 = -W_5W_6W_{oc1}$, $L_3 = -W_8W_{oc1}$, $L_4 = -W_7W_{oc2}W_2$, $L_5 = -W_4W_{oc4}$, $L_6 = -W_1W_2W_3W_4W_5W_6W_{oc3}$, $L_7 = -W_1W_2W_7W_6W_{oc3}$, $L_8 = -W_1W_2W_3W_4W_8W_{oc3}$.
4. Контур L_5 не касается контуров 4 и 7, контур 3 не касается контура 4, все остальные контуры являются касающимися. Поэтому определитель графа равен:

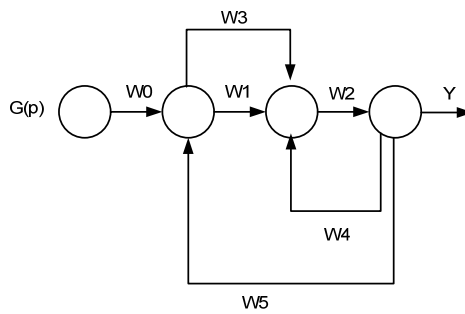
$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7 + L_8) + (L_5L_7 + L_5L_4 + L_3L_4)$$
5. Дополнительные множители:

$$\Delta_1 = \Delta_3 = 1, \Delta_2 = 1 - L_5 = 1 + W_4W_{oc4}.$$

Передаточная функция системы имеет вид

$$W = \frac{P_1 + P_2\Delta_2 + P_3}{\Delta}$$

1. Пусть система представлена сигнальным графом с двумя параллельными путями. Определить передаточную функцию системы по формуле Мейсона.



1. Система имеет два простых пути: $P_1 = W_0W_1W_2$, $P_2 = W_0W_3W_2$,
2. В системе есть три контура:
3. $L_1=W_1W_2W_5$, $L_2=W_2W_4$, $L_3=W_3W_2W_5$.
4. Все контуры являются касающимися. Поэтому определитель графа равен:

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3)$$
5. Т.к. все контуры являются касающимися, то после их удаления из определителя графа, получаем следующие дополнительные множители:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 1.$$

6. Передаточная функция системы по формуле Мейсона имеет вид

$$W = \frac{P_1\Delta_1 + P_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{W_0W_1W_2 + W_0W_3W_2}{1 - (L_1 + L_2 + L_3)}$$