Лекция 6

Преобразование математических моделей систем. Передаточные функции. Модели в виде сигнальных графов

Чтобы изучить свойства сложных физических систем и научиться управлять ими, необходимо иметь или получить их математическую модель, т.е. установить все взаимосвязи между переменными, характеризующими поведение системы.

Поскольку все реальные системы являются динамическими, то для их описания используются дифференциальные уравнения.

Подавляющее большинство физических систем являются линейными в некотором диапазоне изменения переменных. Однако при неограниченном возрастании этих переменных все системы в конечном счете становятся нелинейными.

Необходимым условием линейности системы является соответствующая связь между возмущением $x(t)$ и реакцией $y(t)$. Если к системе, находящейся в состоянии покоя, приложить возмущение $X1(t)$, то на выходе появиться реакция $y1(t)$, если при тех же условиях к системе приложить возмущение $x_2(t)$, то она даст соответственно реакцию $y2(t)$. Необходимым условием линейности является то, что на возмущение $x1(t)+x2(t)$ система давала бы реакцию $y1(t)+y2(t)$. Это положение называют принципом *суперпозиции.* Кроме того, в линейной системе должен выполнятся фактор масштабообразования, т.е., если $x(t)\rightarrow y(t)$, то должно быть справедливо и соотношение $\beta x(t)\rightarrow\beta y(t)$, где β - масштабный коэффициент. Это свойство *гомогенности* системы.

Линейная система всегда удовлетворяет принципам суперпозиции и гомогенности.

Факт линейности или нелинейности может быть установлен экспериментально или по уравнениям, описывающим процессы, про* исходящие в системе.

Рассмотрим цепь с усилителем.

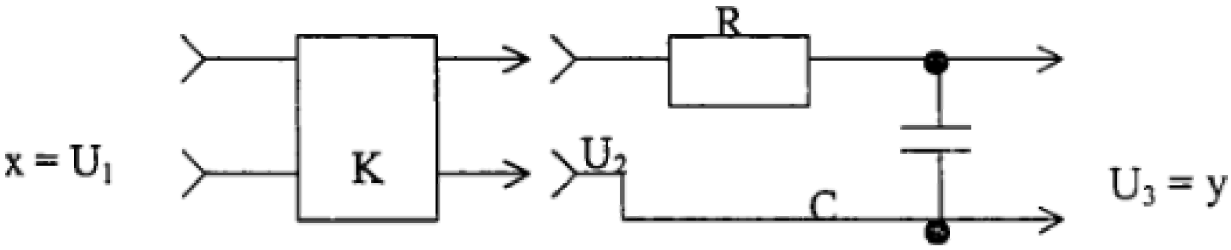


Схема усилителя с RC- цепочкой

Уравнение усилителя $U_2(t) = KU_1(t)$. Уравнение RC-цепи $T\frac{dU_3(t)}{dt} + U_3(t) = U_2(t)$, где T= RC-постоянная времени.

Приравнивая два выражения, получим $T\frac{dU_3(t)}{dt} + U_3(t) = KU_1(t)$, или используя обозначения входной и выходной величин, преобразуем к виду $T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$.

Если параметры К и Т неизменны, то справедлив принцип суперпозиции:

$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K(x1(t) + x2(t))$

$или T\frac{dy1(t)}{dt} + T\frac{dy2(t)}{dt} + y1(t) + y2(t) = K(x1(t) + x2(t))$

Принцип суперпозиции будет соблюдаться и для RC-цепи с переменными параметрами, когда коэффициент усиления K_n и постоянная времени T_n будут произвольными функциями времени. В этом случае уравнение с постоянными коэффициентами заменяется уравнением с переменными коэффициентами n: $T_n\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K_n x(t)$

Принцип суперпозиции после замены параметров также остается по-прежнему справедливым.

Предположим теперь, что параметры элемента R, C и коэффициент усиления K_n зависят от входной и выходной величин. В этом случае постоянная времени T_n также будет зависеть от входного воздействия x и выходной величины у. В этом случае принцип суперпозиции несправедлив и такие уравнения относят к нелинейным.

Если все элементы, входящие 6 систему, линейны, то система линейна Если хотя бы один из элементов обладает нелинейностью, то и вся система будет нелинейной.

Дифференциальные уравнения описывают процессы в автоматической системе. Исключая из полученных уравнений промежуточные величины, можно найти уравнения относительно интересующих нас величин. Однако эти операции очень трудоемки и громоздки.

Поэтому возникает потребность в упрощении этих промежуточных операций. Это достигается если вместо рассмотрения величин, характеризующих состояние системы во времени - оригиналов - рассматривать соответствующие им изображения, получаемые на основе преобразований Лапласа.

Применение преобразования Лапласа позволяет заменить операции дифференцирования и интегрирования более простыми операциями умножения и деления, тем самым существенно упростить составление и исследование уравнений автоматических систем.

Преобразование Лапласа

Введем комплексную переменную $p = \sigma + j\omega$ и определим интеграл

$$X(p) = \int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt$$

Функция $X(p)$, определяемая зависимостью $X(p) = \int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt$, где $p = \sigma + j\omega$, называется **изображением** $x(t)$ и обозначается $X(p) = L\{x(t)\}$, *где L – функция Лапласа (лапласиан).* Часто интеграл называют интегралом Лапласа.

Рассмотрим в качестве примера простейшее дифференциальное уравнение первого порядка

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$$

Подвергая его преобразованиям Лапласа, получаем

$$L\left\{T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)\right\}=L\{Kx(t)\}.$$

На основании теоремы линейности, получаем

$$LT\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\}+L\{y(t)\}=KL\{x(t)\}.$$

Теорема изображения от производной:

$$L\left\{\frac{dy(t)}{dt}\right\}=pL\{y(t)\}-y(0).$$

где $y(0)$ - начальное значение $y(t)$ при $t = 0$; p - комплексная переменная преобразования Лапласа.

С учетом теоремы изображения от производной преобразуем функцию $x(t)$ вещественной переменной t в функцию $x(p)$ комплексного переменного p, $L\{y(t)\} = Y\,(p)$ *тогда*

$$T\big(pY(p)-y(0)\big)+Y(p)=KX(p) \text{ или } (Tp+1)Y(p)=KX(p)+Ty(0)\,.$$

Это линейное алгебраическое уравнение. Решая его относительно Y(p) получим

$$Y(p)=\frac{K}{Tp+1}\left(X(p)+\frac{T}{K}y(0)\right)$$

Обозначим $\mathrm{W(p)}=\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{Tp+1}}$ и $\mathrm{X_н(p)}=\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{K}}\mathrm{y(0)}$ - начальное значение изображения. Тогда уравнение элемента относительно изображений можно записать в форме

$$\mathrm{Y(p)=W(p)(X(p)+X_н(p))}$$

В частном, но часто встречающемся случае начальные значения равны нулю, т.е. $\mathrm{X_н(p)}=0$ и уравнение приобретает вид

$$Y(p)=W(p)(X(p)$$

Функция $W(p)$, зависящая исключительно от параметров элемента и определяюшая связь между преображениями выходной и входной величины, называется передаточной функцией системы,

Передаточной функцией системы называется отношение выходной величины ко входной, представленных в операторной форме или в функции комплексного переменного Р.

Передаточная функция описывает динамические свойства звена или системы.

Передаточные функции. Модели в виде сигнальных графов

Структурные схемы состоят из блоков направленного действия, каждому из которых соответствует определенная передаточная функция, Например, в системе на рис. 5,4 имеются две выходных переменных. С помощью передаточных функций мы можем записать связывающие их уравнения:

$Y_1(p) = G_{11}(p) \cdot X_1(p) + G_{21}(p) \cdots X_2(p);$

$Y_2(p) = G_{21}(p) \cdot X_2(p) + G_{12}(p) \cdots X_1(p).$

где $G_{ij}(p)$ – передаточная функция с i-го входа на j-й выход.

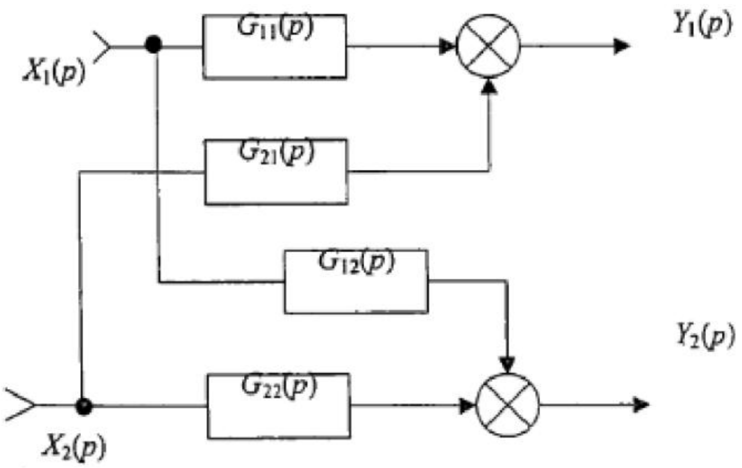


Схема системы с перекрестными связями

В общем случае, при наличии i-входов j-выходов, связывающие их уравнения можно записать в матричной форме:

$$\begin{vmatrix} У_1(p) \\ У_2(p) \\ У_i(p) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G_{11}(p) & \dots & G_{1j}(p) \\ G_{21}(p) & \dots & G_{2j}(p) \\ G_{i1}(p) & \dots & G_{ij}(p) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X_1(p) \\ X_2(p) \\ X_i(p) \end{vmatrix},$$

или в компактной форме

$$Y = G \cdot X,$$

где У, *X* -матрицы-столбцы выходных и входных переменных; *G*-матричная передаточная функция размерности *i j*.

Основные принципы построения структурных схем САУ основаны на четырех схемах соединения составляющих их звеньев:

- последовательное соединение;
- параллельной;
- схема с обратной связью без преобразования выходного сигнала;
- схема встречно-параллельного соединения.

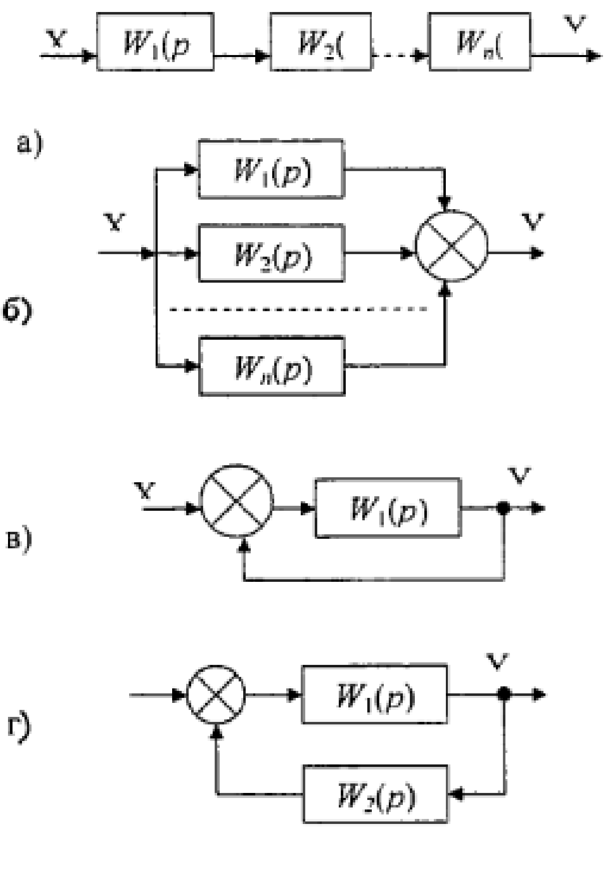
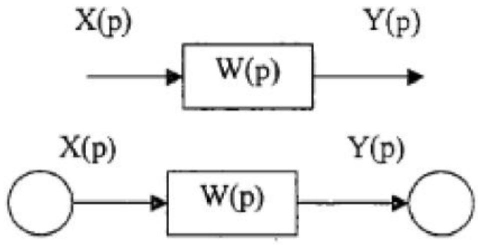


Рис. 5.5. Схемы соединения звеньев САУ

Модели в виде сигнальных графов

Сигнальный граф представляет собой диаграмму, состоящую из узлов, соединенных между собой отдельными направленными ветвями, и является графическим средством описания линейных соотношений между переменными.

Сигнальные графы особенно важны для систем управления с обратной связью, поскольку теория этих систем в первую очередь рассматривает распространение и преобразование сигналов- Основным элементом сигнального графа является однонаправленный отрезок называемый *ветвью* и входной переменными, наподобие звена в структурной схеме.



Изображения передаточных функции звена

Точки входа и выхода называются *узлами.* Сумма всех сигналов, вводящих в узел, образует соответствующую этому узлу переменную. *Путь* - это ветвь или последовательность ветвей, которые могут быть проведены от одного узла к другому. *Контур* - это замкнутый путь, который начинается и заканчивается в одном и том же узле, причем вдоль этого пути ни один другой узел не встречается дважды. *Некасаюшиемися* называются такие контуры, которые не имеют общего узла. Два касающихся контура имеют один или более общих узлов. Сигнальный граф это наглядный метод записи системы алгебраических уравнений, показывающий связь между переменными.

В общем случае передаточная функция системы, описанной сигнальным графом, определяется по формуле Мэйсона:

$$W(p) = \frac{\sum_k p_{ijk} \cdot \Delta_{ijk}}{\Delta},$$

где p_{ijk} - коэффициенты передачи k-го пути от переменной xi к переменной xj; Δ - определитель графа; Δ_{ijk} – дополнительный множитель для пути p_{ijk}.