Лекция 5

Математические модели в изучении управляющих систем

Любая физическая система - есть преобразователь, превращающий входные параметры в выходные. Усилие мышцы преобразуется в перемещение конечности, определенная яркость света вызывает конкретный размер зрачка глаза, изменение положения тела в пространстве приводит к реакции мышечной системы, направленной на удержание равновесия тела и т.д.

Если назвать человека связанного с работой автоматических систем условно «исследователем», то перед ним, в зависимости от ситуаций, возникают два вида задач.

1. Выяснение и изучение свойств, принципов работы готовых, реальных систем управления (анализ систем).

2. Разработка систем с необходимой структурой, заданными свойствами и принципом действия на основе предварительно установленных физических процессов (синтез систем).

При решении обеих задач используются математические модели физических объектов, только при анализе проходят путь от объекта к математической модели, а при синтезе наоборот - от модели к объекту.

Динамика объектов в общем случае описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями. Поскольку большинство реальных систем являются нелинейными, для их линеаризации применяют методы линейной аппроксимации. Приведение уравнений к линейному виду позволяет применять наиболее простые методы исследования поведения систем, например, графоаналитические, алгебраические и т.д.

Поведение систем и составляющих их звеньев описываются также определенными характеристиками, которые рассматривают отдельно для двух режимов: статического и динамического. На основе характеристик формируются определенные параметры систем и звеньев.

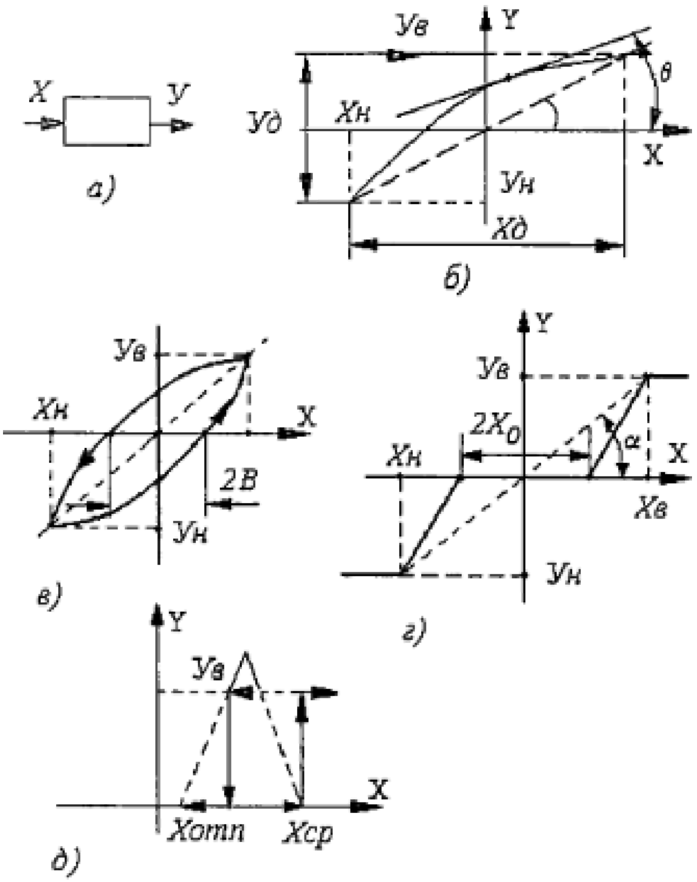
Дифференциальные уравнения получаются при анализе динамических процессов и их характеристик, когда установлены все необходимые взаимосвязи между переменными, характеризующими поведение системы.

5.1. Характеристика элементов систем. Статическим режим работы

Структурная схема элемента, на вход которого подана величина X, а на выходе получен сигнал Y, приведена на рнс. 5,1 а. Если *X, Y и* внешние условия среды не изменяются, то функция преобразования *Y=f[X) или* зависимость между выходным сигналом У и входной величиной *X* в установившихся условиях при постоянстве внешних воздействий является статической характеристикой рассматриваемого элемента. На практике эта зависимость может быть нелинейной (рис, 5.1, б), может характеризоваться гистерезисом, т.е. несовпадением значении Y при возрастании и убывании *X* (рис. 5.1, в), зоной нечувствительности 2X0 (рис. 5.1, г) или иметь релейный характер, когда срабатывание элемента происходит при значении входной величины *Хср,* а выключение или отпускание - при величине *Хотп,* причем *Хотп* < *Хср* (рис. 5,1, д), Здесь *Хв, Хн, Хср, Хотп, Yв, YН* - предельные значения величин. *Хд, Yд* - диапазоны изменения величин или их сигналов. *Чувствительность* элемента определяется выражением

$$S = \frac{dY}{dX} = \frac{m_y}{m_x}\theta,$$

где m_x, m_y - масштабы графика по осям *X, У;* θ- угол наклона касательной к характеристике в данной точке (рис, 5.1,6).



Рнс. 5.1. Элемент системы к его статические характеристики:

а) структурная схема элемента; б) нелинейная статическая характеристика; s) характеристика гистерезъсного типа; г) характеристиха с зоной нечувствительности; д) релейный элемент и егохи-характеристика

Порогом чувствительности называют минимальное приращение входной величины Xmin которому соответствует минимальное изменение выходного сигнала Ymin.

В случаях, когда нелинейность мала, производят линеаризацию статической характеристики. При этом наиболее простой из способов линеаризации состоит в том, что кривую характеристики заменяют хордой, стягивающей предельные значения функции *У* и проходящей через начало координат под углом *а* (рис. 5,1, о). Более точные результаты может дать кусочно-линейная аппроксимация. Для гистере-зисной кривой (рис, 5.1, в), имеющей небольшую ширину петли 2В, характеристика аппроксимируется штриховой прямой, проходящей через предельные значения функции и начало координат. Аналогично действуют и в случае характеристики с небольшой зоной нечувствительности (рис. 5.1, *г)*. Статические характеристики релейного типа (рис. 5.1, *д)* заменяют линейными пилообразными характеристиками отдельно для фронта и спада сигнала.

Если статическая характеристика аппроксимирована прямой, то функция преобразования приобретает вид y=Sx, где S = const-коэффициент преобразования или чувствительность элемента.

5.1.2. Динамическая характеристика

В большинстве случаев, на рабочих режимах функционирования систем, входные величины не остаются постоянными во времени, Внешние условия также претерпевают изменения.

Для установления зависимостей между входной величиной X, выходным сигналом Yи их производными, т.е. скоростями и ускорениями изменения величин служат динамические характеристики. Для этого, на основе известных физических законов составляют дифференциальные уравнения. Обычно дифференциальные уравнения получаются нелинейными, но в ряде случаев изменения входной величины их удается свести к уравнениям линейного типа вида

$$\begin{gathered} a_0 \frac{d^n У}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} У}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dУ}{dt} + a_n У = \\ = в_0 \frac{d^m X}{dt^m} + в_1 \frac{d^{m-1} X}{dt^{m-1}} + \ldots + в_{m-1} \frac{dX}{dt} + в_m X \end{gathered} \tag{5.1}$$

где $a_0,\ldots a_n$, $в_0\ldots в_m$ - постоянные координаты.

Статическая характеристика элемента системы, определяющая связь между входной величиной X и выходным сигналом Y в установившихся условиях работы при постоянстве внешних параметров, может быть представлена как частный случай динамической характеристики при равенстве нулю всех производных. Тогда уравнение (5.1) будет иметь следующий вид

$$a_n y = в_m x, \text{ или } y = \frac{в_m}{a_n} x = S \cdot x \ ,$$

где $S = \frac{dУ}{dX} = \frac{в_m}{a_m} = const$ – чувствительность элемента.