Лекция №2
Линейные системы автоматического управления

Свойства линейных систем

На основе изучения многих моделей систем, можно придти к выводу, что системы, описываемые линейными дифференциальными уравнениями, несмотря на все их многообразие, обладают весьма ограниченным числом основных свойств. Эти свойства следующие:

- способность системы к усилению (ослаблению) сигнала;
- способность системы к накоплению (энергии, материи);
- инерционность;
- прогнозируемость;
- колебательность;
- устойчивость;
- запаздывание.

Строгого доказательства, что этот список является исчерпывающим, на сегодня не существует, но, основываясь на опыте, можно утверждать, что это так. Добавление в список некоторых свойств, например способности системы неоднократно терять и приобретать устойчивость при изменении некоторого ее параметра, не приводит к принципиальным отличиям. Исключение каких-то свойств не позволяет получить исчерпывающий список, поскольку исключаемое свойство нельзя заменить некоторой комбинацией, выразить оставленными.

Перечисленные свойства линейных систем, за исключением прогнозируемости безусловно, хорошо известны. Они расположены в списке по мере увеличения сложности, указанные ниже основываются на предыдущих свойствах.

О прогнозируемости следует сказать отдельно. Анализ линейных систем показал, что они в той или иной мере обладают свойством, позволяющим предсказывать их поведение на некоторый, пусть небольшой, промежуток времени. Это свойство обусловлено, в том числе и инерционностью системы, опирается на него, но, тем не менее, отличается настолько, что заслуживает отдельного названия и включения в список основных свойств линейной системы. Исходя из особенностей рассматриваемого свойства, его можно назвать прогнозируемостью.

Прогнозируемость системы определяется ее инерционностью и способом приложения к ней внешних воздействий. Прогнозируемость системы или звена может быть определена количественно. Не вдаваясь в подробности, уводящие от темы настоящей работы, можно сказать, что для систем с дробно-рациональной передаточной функцией прогнозируемость звена численно может быть определена как разность числа полюсов и числа нулей его передаточной функции.

В формальной, традиционной классификации, основанной на степени дифференциального уравнения звена, звено запаздывания выпадает из классификации, поскольку описывается не дифференциальным уравнением, или, если угодно, дифференциальным уравнением бесконечной степени. Поэтому включение его в традиционный набор типовых звеньев выглядит вынужденным, натужным. Но и отказаться от такого звена, естественно, невозможно. Положив в основу классификации звеньев не формальный признак, а объективно существующую, ограниченную совокупность основных свойств линейных систем, можно избежать и этого затруднения.

Классификация типовых звеньев линейных систем

Предлагаемая классификация типовых звеньев линейных систем внешне мало отличается от традиционной, в ней лишь добавлено звено третьего порядка, которое предлагается назвать звеном Вышнеградского, в честь автора знаменитой диаграммы. По существу же, отличие предлагаемой классификации более глубокое: она основывается на степени обладания звеном главными свойствами линейных систем. Итак, классификация следующая:

1. Простейшие или фундаментальные звенья:
    - пропорциональное;
    - интегрирующее;
    - дифференцирующее.
2. Звенья первого порядка:
    - апериодическое (инерционное);
    - форсирующее;
    - другие.
3. Звенья второго порядка:
    - колебательное;
    - апериодическое звено второго порядка (частный случай колебательного звена).
4. Звенья третьего порядка:
    - звено Вышнеградского;
    - другие звенья.
5. Звено запаздывания.

Классификация методов описания линейных систем

Математическое описание линейных систем, например систем автоматического управления, необходимый этап исследования их свойств и оптимизации характеристик в процессе разработки и проектирования.

Существует четыре основных метода описания линейных динамических объектов, в частности электрических цепей.

Первые два назовем методами текущего (реального, ускоренного или замедленного) времени. Это:

- - дифференциальное уравнение и
- - интеграл Дюамеля

Другие два назовем апостериорными (ретроспективными) методами. Это:

- - спектральный метод, где используются комплексные коэффициенты передачи и спектры, и
- - операторный метод (метод преобразования Лапласа или метод передаточной функции).

Первые два метода позволяют определять текущее значение выходного сигнала системы (САР или электрической цепи), например тока в ветви или напряжения на элементе, независимо от того, известно ли воздействие на всем временном интервале или значения входного воздействия появляются только с течением времени и его поведение в будущем не известно. Универсальность важное достоинство этих методов, хотя они м.б. при аналитической реализации сравнительно трудоемки. Их можно применить, например, при описании систем слежения за неизвестными заранее сигналами. Естественно, они тем более справляются и с решением задач, в которых воздействие заранее известно на всем временном интервале, интересующем исследователя.

Апостериорные методы являются аналитическими и требуют знания входных воздействий в течение всего временного интервала, на котором отыскивается решение. Например, от минус до плюс бесконечности для первого, спектрального, и от нуля до плюс бесконечности для второго, операторного. А в результате расчета получается выходной сигнал системы на тех же временных интервалах.

Каждый из названных методов имеет варианты реализации.

Таким образом, первые два метода могут ответить на вопрос о том, как поведет себя система в дальнейшем в ответ на еще не известное воздействие, значения которого поступают с течением времени. Как частный случай, эти методы описывают и реакцию систем на заранее известное на заданном или на всем временном интервале воздействие. Вторые два метода позволяет только ответить на вопрос о том, как бы повела себя система, если бы на нее действовало известное в течение всего времени воздействие. Каждый из методов имеет свою предпочтительную область применения, в зависимости от формулировки задачи исследователем.

1. Дифференциальное уравнение – универсальный математический инструмент. Оно позволяет описывать линейную систему как в текущем времени, при неизвестном заранее сигнале, так апостериорно, при известном заранее сигнале, а также учитывать начальные условия. Для известного сигнала, наряду с полным решением, дифференциальное уравнение позволяет найти отдельно свободную и принужденную составляющие решения, определить переходной и установившийся режимы работы САР. Дифференциальное уравнение быстро и эффективно решается численно, моделирующие программы предоставляют многочисленные методы его решения. Наконец, дифференциальное уравнение может быть промоделировано на аналоговой или квазианалоговой (виртуальной) вычислительных машинах.
2. Метод интеграла Дюамеля, как и его вариант, интеграл свертки, способен описывать линейную систему в текущем времени и учитывать значение выходного сигнала в начальный момент времени. Метод нагляден, представляет выходной сигнал пределом суммы переходных функций, а значит, трактует поведение системы в любой момент времени как переходный режим, даже если она просто работает в установившемся режиме. При известном воздействии метод позволяет получать аналитическое решение в виде формулы. При численной реализации интеграл Дюамеля требует затрат значительно больших вычислительных мощностей по сравнению с методом дифференциального уравнения. Метод интеграла Дюамеля положен в основу описания очень полезных систем корреляционной обработки сигналов.
3. Спектральный метод аналитический, он позволяет решать задачи только для известных заранее сигналов, отличается наглядностью, поскольку оперирует спектрами сигналов и частотными характеристиками систем, имеющими ясный физический смысл и которые можно представлять графически, позволяет проследить прохождение отдельной синусоиды и их совокупности через систему.

Метод не учитывает начальных условий и любой выходной сигнал САР, найденный спектральным методом, формально можно рассматривать как установившийся, поэтому методом предпочтительнее рассчитывать принужденную составляющую аналитического решения дифференциального уравнения или установившийся режим работы САР, в частности при периодических воздействиях. При соответствующей постановке задачи, спектральный метод позволяет рассчитывать и переходный процесс. Известны приближенные решения, когда спектральный метод используется для описания работы системы в текущем (реальном) времени – мгновенный спектр и др.

4. Операторный метод развивает спектральный метод, и также применим только при известных воздействиях на динамическую систему, он дает возможность учитывать начальное состояние динамической системы, что позволяет применять его для апостериорного описания и расчета переходных процессов. Операторным методом может быть найден и установившийся режим САР или линейной электрической цепи путем определения решения при устремлении его аргумента (времени) к бесконечности. Метод аналитический, не нагляден, при формальном применении довольно прост, давая алгоритм решения задач, связанных с переходными процессами, в том числе вызываемыми заданными коммутациями в цепи.

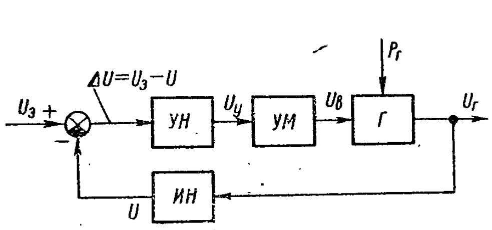
1. Математическое описание САУ

В самом общем виде порядок исследования САУ в обоих случаях включает математическое описание системы, исследование ее установившихся режимов и исследование переходных режимов.

Математическое описание системы начинается с разбиения ее на звенья и описания этих звеньев. Последнее может осуществляться либо аналитически в виде уравнений, связывающих входные и выходные величины звена, либо графически в виде характеристик, описывающих ту же связь. По уравнениям или характеристикам отдельных звеньев составляются уравнения или характеристики системы в целом, на основании которых и исследуется система.

Для математического описания систему разбивают на звенья по другому принципу, а именно — исходя из удобства получения этого описания. Для этого *систему следует разбивать на возможно более простые («мелкие») звенья, но вместе с тем необходимо, чтобы они обладали направленностью действия.*

Звеном направленного действия называется звено, которое передает воздействие только в одном направлении — со входа на вход, так что изменение состояния такого звена не влияет на состояние предшествующего звена, работающего на его вход. В результате при разбиении системы на звенья направленного действия математическое описание каждого такого звена может быть составлено без учета связей его с другими звеньями. Соответственно математическое описание всей системы в целом может быть получено как совокупность составленных независимо друг от друга уравнений или характеристик отдельных звеньев, образующих систему, дополненных уравнениями связи между звеньями.



В результате разбиения САУ на звенья направлен-

Рис. 1-1. Разбиение на звенья системы автоматического регулирования напряжения синхронного генератора.

ного действия и получения математического описания звеньев составляется структурная схема системы. Структурная схема системы состоит из прямоугольников, изображающих звенья схемы, и стрелок, соединяющих выходы и входы звеньев согласно связям между звеньями в системе. Стрелками показываются также внешние воздействия, приложенные к отдельным звеньям системы. Каждому звену структурной схемы придается описывающее его уравнение или характеристика. При этом уравнение обычно записывается прямо на схеме внутри изображающего звено прямоугольника в виде передаточной функции (см. § 1-2). Получение структурной схемы является конечной целью математического описания системы.

В качестве примера на рис. 1-1 показано разбиение на звенья системы автоматического регулирования напряжения синхронного генератора, изображенной на рис. В-2, *в*. При этом принято, что усилитель регулятора состоит из двух частей — усилителя напряжения *УН* и усилителя мощности *УМ* в виде, например, электромашинного усилителя. Каждый из этих усилителей обладает направленностью действия и поэтому может быть выделен в виде отдельного звена.

На рис. 1-1 стрелками показаны внешние воздействия — задающее воздействие $U_з$ и возмущение в виде нагрузки $P_г$ на зажимах генератора. На этом же рисунке в виде кружочка, разделенного на секторы, дано условное изображение элемента сравнения, т. е. суммирующего элемента, выявляющего разность $\Delta U = U_з - U$. Зачерненный сектор соответствует вычитаемому сигналу. Для большей наглядности рядом показаны еще и знаки сигналов (плюс у $U_з$ и минус у U).

2. Уравнения звеньев системы. Линеаризация

упрощения звеньев. Главным упрощением, к которому следует стремиться при выводе уравнений звеньев системы, является их линеаризация, т. е. описание линейными дифференциальными уравнениями. Линеаризация нелинейности, содержащейся в уравнении звена, заключается в замене этой нелинейности приближенной линейной зависимостью.

Рассмотрим звено, описываемое нелинейной статической зависимостью $Y = \varphi(X)$ (рис. 1-2, *а*). Пусть установившийся режим звена соответствует значениям входной и выходной величин

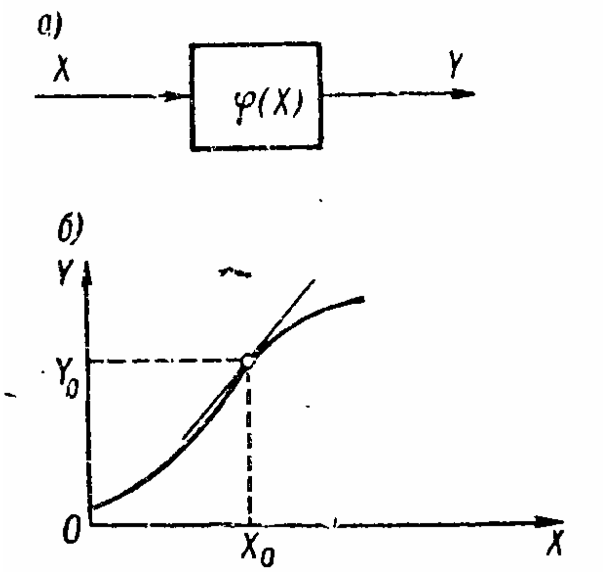


Рис. 1-2. Линеаризация статического звена.

X_0 и Y_0 (рис. 1-2; *б*) и отклонения X от X_0 в процессе работы звена достаточно малы. В этом случае исходную нелинейную зависимость $Y = \varphi(X)$ можно разложить в ряд Тейлора в окрестностях точки установившегося режима и, отбросив члены ряда выше первого порядка малости, получить следующую приближенную зависимость:

$$Y \approx \varphi(X_0) + \left(\frac{d\varphi}{dX}\right)_0 (X - X_0), \tag{1-1}$$

где $\left(\frac{d\varphi}{dX}\right)_0$ — значение производной функции $\varphi(X)$ по X при подстановке в выражение этой производной $X = X_0$.

Это уравнение можно переписать в таком окончательном виде:

$$\Delta Y \approx k \Delta X, \tag{1-2}$$

где

$$\Delta X = X - X_0; \quad \Delta Y = Y - Y_0; \quad k = \left(\frac{d\varphi}{dX}\right)_0.$$

Проведенная линеаризация имеет простую графическую интерпретацию: она соответствует, как показано на рис. 1-2, *б*, замене действительной нелинейной характеристики касательной к ней в точке, соответствующей установившемуся режиму. Коэффициент k в уравнении (1-2) равен тангенсу угла наклона этой касательной относительно оси абсцисс. Поэтому его величина может быть найдена чисто графическим построением без нахождения аналитического выражения для исходной нелинейной зависимости $\varphi(X)$.

Рассмотрим теперь более общий случай, когда звено описывается нелинейным уравнением, включающим производные по времени от входной и выходной величин:

$$\varphi(X,\ X',\ X'',\ \ldots,\ Y,\ Y',\ Y'',\ \ldots)=0. \tag{1-3}$$

Разложив, как и прежде, нелинейную функцию, находящуюся в левой части уравнения, в ряд Тейлора в точке установившегося режима, получим следующее линейное дифференциальное уравнение для приращений переменных:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X}\right)_0 \Delta X+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X'}\right)_0 \Delta X'+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X''}\right)_0 \Delta X''+\ldots$$
$$\ldots+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial Y}\right)_0 \Delta Y+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial Y'}\right)_0 \Delta Y'+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial Y''}\right)_0 \Delta Y''+\ldots\approx 0. \tag{1-4}$$

Здесь $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X}\right)_0$, $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X'}\right)_0$ и т. д. — значения производных функции φ, получающиеся при подстановке значений X_0, Y_0 и нулевых значений производных, соответствующих установившемуся режиму.

Показанная процедура линеаризации нелинейных звеньев приводит к приближенному описанию их линейными дифференциальными уравнениями в отклонениях, или, как еще говорят, в вариациях.

Допустимость такой линеаризации ограничена следующими очевидными условиями. Во-первых, *она применима только для малых отклонений*, т. е. полученные в результате линеаризации уравнения пригодны для приближенного исследования только таких режимов в системах, при которых переменные величины на входе звеньев претерпевают достаточно малые отклонения от установившихся значений. При этом точность исследования растет с уменьшением отклонений.

Во-вторых, поскольку такая линеаризация основана на разложении в ряд Тейлора, она применима только к непрерывно дифференцируемым нелинейностям. Поэтому такие нелинейности называются линеаризуемыми. Нелинейные звенья, не удовлетворяющие этому требованию, называются существенно нелинейными. К существенно нелинейным звеньям, например, относятся звенья с прерывистыми характеристиками типа релейных характеристик и с неоднозначными характеристиками типа петли гистерезиса.

В теории автоматического управления приняты определенные формы записи дифференциальных линеаризованных уравнений звеньев. При этом уравнение (1-4) (с учетом только приведенных там членов) должно записываться так:

$$(T_1^2p^2 + T_2p + 1)\,y = (k_1 + k_2p + k_3p^2)\,x. \qquad (1\text{-}5)$$

Здесь $p \equiv \frac{d}{dt}$ — символ дифференцирования по времени; $x = \frac{\Delta X}{X_0}$; $y = \frac{\Delta Y}{Y_0}$ — приращения переменных в относительных единицах;

$$k_1 = -\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X}\right)_0}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial Y}\right)_0}\cdot\frac{X_0}{Y_0}; \quad k_2 = -\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X'}\right)_0}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial Y}\right)_0}\cdot\frac{X_0}{Y_0};$$

$$k_3 = -\frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X''}\right)_0}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial Y}\right)_0}\cdot\frac{X_0}{Y_0}$$ — коэффициенты передачи;

$$T_1^2 = \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial Y''}\right)_0}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial Y}\right)_0}; \quad T_2 = \frac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial Y'}\right)_0}{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial Y}\right)_0}$$ — постоянные времени.

Особенности приведенной формы записи заключаются в следующем. Во-первых, выходная величина и ее производные находятся в левой части уравнения, а входная величина и ее производные — в правой. Во-вторых, коэффициент при приращении выходной величины равен единице [в результате деления обеих частей уравнения на $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial Y}\right)_0$]. В-третьих, приращения переменных выражены в относительных единицах и обозначаются строчными буквами. Правда, иногда более удобно использовать абсолютные значения приращений переменных. В этом случае выражения для коэффициентов передачи, стоящих в правой части уравнения, соответственно изменяются.

Коэффициенты левой части уравнения — постоянные времени — в обоих случаях остаются без изменения. Размерность их — секунда в степени, равной порядку производной, перед которой стоит данный коэффициент.

Другой формой записи линейных уравнений звеньев является запись с помощью передаточной функции. Уравнение (1-5) при этом принимает вид:

$$y = \frac{k_1 + k_2p + k_3p^2}{T_1^2p^2 + T_2p + 1}\,x \qquad (1\text{-}6)$$

или

$$y = W(p)\,x, \qquad (1\text{-}7)$$

где

$$W(p) = \frac{k_1 + k_2p^2 + k_3p^2}{T_1^2p^2 + T_2p + 1}.$$

Дробь $W(p)$ называется передаточной функцией звена. Пока будем рассматривать ее просто как удобный способ записи дифференциальных уравнений. Строгое определение передаточной функции будет дано в шестой главе с помощью преобразования Лапласа.

Динамические свойства линейных звеньев и систем автоматического управления в целом могут быть описаны уравнениями, как показано выше, и графическими характеристиками. В теории автоматического управления применяются два типа таких характеристик — переходные и частотные.

Эти характеристики могут быть сняты экспериментально или построены по уравнению звена. Имеется и обратная возможность — по экспериментально полученным характеристикам составить уравнение звена. Кроме того, с помощью этих характеристик можно определить реакцию звена на любое возмущение произвольного вида. Все это будет рассмотрено ниже.

Рассматривая выше формы записи уравнений, принятые в теории автоматического управления, мы оперировали для определенности уравнением второго порядка. Однако в общем случае в результате линеаризации различных звеньев могут быть получены уравнения любого порядка. В общем случае звено системы автоматического управления описывается дифференциальным уравнением:

$$Q(p)\,y = \sum_{i=1}^{n} R_i(p)\,x_i \tag{1-8}$$

или в другом виде:

$$y = \sum_{i=1}^{n} W_i(p)\,x_i. \tag{1-9}$$

Здесь x_i — входные воздействия на звено ($i = 1, 2, \ldots, n$); $Q(p)$ и $R_i(p)$ — полиномы относительно p; $W_i(p) = \frac{R_i(p)}{Q(p)}$ — передаточная функция звена для i-го входного воздействия.

А. Переходные характеристики

Переходная, или временна́я, характеристика звена представляет собой график изменения во времени выходной величины звена, вызванного подачей на его вход единичного ступенчатого воздействия. **Единичное ступенчатое воздействие** — это воздействие, которое мгновенно возрастает от нуля до единицы и далее остается неизменным. Сказанное иллюстрируется рис. 1-4, *а* и *б*. На рис. 1-4, *б* показаны четыре различных вида переходных характеристик, соответствующих различным типам звеньев, которые будут подробно рассмотрены в следующем параграфе.

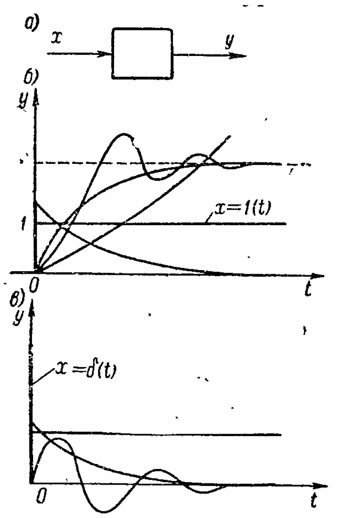


Рис. 1-4. Переходные характеристики.

Аналитическое выражение для переходной характеристики — переходная функция — обозначается $h(t)$. Аналитическое выражение единичного ступенчатого воздействия — единичная ступенчатая функция — обозначается $1(t)$ и может быть описана следующим равенством:

$$1(t)=\begin{cases} 0 & \text{при } t<0; \\ 1 & \text{при } t\geqslant 0. \end{cases} \qquad (1\text{-}23)$$

Таким образом, $h(t)$ — это выражение для $y(t)$ при $x(t) = 1(t)$.

Наряду с переходной характеристикой применяется импульсная переходная (временна́я) характеристика, представляющая собой реакцию звена на единичный импульс. Единичный импульс — это математическая идеализация предельно короткого импульсного сигнала. Единичный импульс — это импульс, площадь которого равна единице при длительности, равной нулю, и высоте, равной бесконечности. На рис. 1-4, *в* он условно показан в виде утолщения на оси ординат. Там же изображены и типичные формы самих импульсных переходных характеристик.

Аналитическое выражение для импульсной переходной характеристики — *импульсная переходная функция*, или *весовая функция* (*функция веса*), — обозначается $w(t)$. Выражение для единичного импульса соответственно называется *единичной импульсной функцией* или *дельта-функцией* и обозначается $\delta(t)$. Таким образом, $w(t)$ — это $y(t)$ при $x(t) = \delta(t)$.

Математически дельта-функцию можно записать так:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0; \\ 0 & \text{при } t \gtrless 0. \end{cases} \qquad (1\text{-}24)$$

При этом согласно определению

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1. \qquad (1\text{-}25)$$

Дельта-функция просто связана с единичной ступенчатой функцией:

$$\delta(t) = 1'(t). \qquad (1\text{-}26)$$

Из (1-26) следует аналогичная связь между переходной и весовой функциями линейных звеньев:

$$w(t) = h'(t) \qquad (1\text{-}27)$$

и наоборот

$$h(t) = \int\limits_0^t w(t)\, dt. \qquad (1\text{-}28)$$

Учитывая это простое соотношение между переходной и весовой функциями, ниже будем применять главным образом первую из них, имея в виду, что вторую при необходимости всегда можно получить по формуле (1-27).

Зная переходную или весовую функцию, можно определить реакцию звена на произвольное входное воздействие при нулевых начальных условиях с помощью следующих формул:

$$y(t) = h(t)\, x(0) + \int\limits_0^t h(t-\tau)\, x'(\tau)\, d\tau, \qquad (1\text{-}29)$$

где $x(0)$ — значение $x(t)$ при $t = 0$;

$$y(t) = h(0)\, x(t) + \int\limits_0^t w(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau. \qquad (1\text{-}30)$$

Б. Частотные характеристики 28

Частотные характеристики описывают установившиеся вынужденные колебания на выходе звена, вызванные гармоническим воздействием на входе. Рассмотрим такой режим.

Пусть на вход звена (рис. 1-6, *а*) подано гармоническое воздействие

$$x = x_{\text{макс}} \sin \omega t,$$

где $x_{\text{макс}}$ — амплитуда, а ω — угловая частота этого воздействия.

По окончании переходного процесса на выходе звена будут существовать гармонические колебания с той же частотой, что и входные колебания, но отличающиеся в общем случае по амплитуде и фазе, т. е. в установившемся режиме выходная величина звена

$$y = y_{\text{макс}} \sin(\omega t + \varphi),$$

где $y_{\text{макс}}$ — амплитуда выходных установившихся колебаний; φ — фазовый сдвиг между входными и выходными колебаниями.

При фиксированной амплитуде входных колебаний амплитуда и фаза установившихся колебаний на выходе звена зависят от частоты колебаний. Если постепенно увеличивать от нуля частоту колебаний и определять установившиеся значения амплитуды и фазы выходных колебаний для разных частот, можно получить зависимость от частоты отношения амплитуд $A = y_{макс}/x_{макс}$ и сдвига фаз φ выходных и входных установившихся колебаний. Эти зависимости называются соответственно $A(\omega)$ — а м п л и т у д н о й ч а с т о т н о й х а р а к т е р и с т и к о й (а. ч. х.) и $\varphi(\omega)$ — ф а з о в о й ч а с т о т н о й х а р а к т е р и с т и к о й (ф. ч. х.). Примерный вид этих характеристик у обычных инерционных звеньев изображен на рис. 1-6, *б* и *в*. Как показано на этих рисунках, у таких звеньев в силу их инерционности амплитудная частотная характеристика по мере увеличения частоты в конце концов спадает до нуля. При

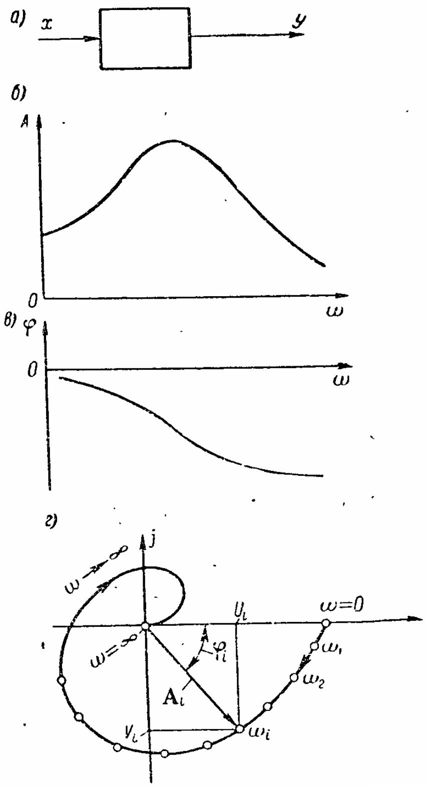


Рис. 1-6. Частотные характеристики.

этом, чем менее инерционно звено, тем длиннее его амплитудная частотная характеристика, т. е. тем больше полоса пропускаемых звеном частот, или, просто, его п о л о с а п р о п у с к а н и я.

Теоретически частотная характеристика продолжается до бесконечности, но практически полоса пропускания оценивается значением частоты, при котором отношение амплитуд A окончательно становится меньше определенного достаточно малого конечного значения. Это значение обычно берут равным 0,05 (на этой частоте

Обыкновенные амплитудная и фазовая частотные характеристики можно объединить в одну характеристику — а м п л и т у д н о - ф а з о в у ю ч а с т о т н у ю х а р а к т е р и с т и к у (а. ф. ч. х.), используя $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ в качестве полярных координат (рис. 1-6, *г*). Каждая точка амплитудно-фазовой частотной характеристики соответствует определенному значению частоты ω. Значения ω для конечного количества точек характеристики наносятся вдоль характеристики, как показано на рис. 1-6, *г*. Имея

Амплитудно-фазовую частотную характеристику можно строить и в прямоугольной системе координат — в комплексной плоскости. При этом координатами будут показанные на рис. 1-6, *г* проекции U и V вектора **A** на соответствующие оси. Зависимости $U(\omega)$ и $V(\omega)$ называются соответственно д е й с т в и т е л ь н о й и м н и м о й ч а с т о т н ы м и х а р а к т е р и с т и к а м и.

Аналитические выражения для рассмотренных выше частотных характеристик могут быть легко получены по передаточной функции. Если в выражение передаточной функции звена $W(p)$ подставить $p = j\omega$, то получится комплексная величина $W(j\omega)$, которая представляет собой функцию ω и называется а м п л и т у д н о - ф а з о в о й ч а с т о т н о й ф у н к ц и е й. Эта функция является аналитическим функцию φ (ω). Докажем это. Для удобства воспользуемся символической формулой записи гармонических функций, т. е. представим установившиеся колебания на входе и выходе звена в виде:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_{\text{макс}} e^{j\omega t}; \\ y &= y_{\text{макс}} e^{j(\omega t + \varphi)}. \end{aligned}\right\} \quad (1\text{-}33)$$

поэтому окончательно имеем

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (1\text{-}35)$$

Формула (1-35) определяет искомую связь передаточной функции с частотными функциями звена, указанную выше: модуль частотной функции $W(j\omega)$ есть $A(\omega)$, а аргумент — $\varphi(\omega)$.

Если представить $W(j\omega)$ не в показательной, как в (1-35), а в алгебраической форме, т. е.

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega), \quad (1\text{-}36)$$

то здесь $U(\omega)$ и $V(\omega)$ — введенные ранее действительная и мнимая частотные функции, являющиеся координатами амплитудно-фазовой характеристики в комплексной плоскости.

После подстановки в выражение для передаточной функции $p = j\omega$ получаем

$$W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} = \frac{U_R(\omega) + jV_R(\omega)}{U_Q(\omega) + jV_Q(\omega)},$$

где индексами R и Q отмечены части соответствующих комплексных величин в числителе и знаменателе.