Лекция №7

Схема решения эл. мех. задачи. Эквивалентные схемы преобразователей

Схема решения эл. мех. задачи для форменных мод колебаний

1) Выбор независимых переменных .

Для описания состояния эл. объема можно пользоваться $\forall$ из 4х систем уравнений состояния для пьезоэлектрической среды.

Переменные, описывающие пьезоэлектрик, бывают σ и u и электр. E и D.

1.1. Выбор независимых переменных (σ или u).

Оцениваются условия в направлениях перпендикулярных колебательному движению.

НЧ$\rightarrow \sigma = 0$ - свободный обьем

ВЧ$\rightarrow u = 0$ - заторможенный эл-т

1.2. Выбор независимых эл. переменных.(E или D)

Оцениваются эл. граничные условия в направлении колебательного движения.

Зависят от расположения эл-дов и формы пьезокерамического тела.

Для пьезомягких (эл. поле перпендикулярно направлению колебаний, поверхности эл-дов и колебат. смещению) $\rightarrow$E.

Для пьезожестких (эл. поле параллельно направлению колебаний) $\rightarrow$D.

2) Конструкция ур. состояния.

Анализируются отличные от нуля компоненты D,E,u,σ.

Составляются местные ур. пьезозоэф.

3) Составление ур. движения

По третьему закону Ньютона. Рассматрив. элемент. обьем.

$$F = ma$$

F-упругая сила$\rightarrow F = \dfrac{\partial \sigma}{\partial x}$;

ma-сила инерции$\rightarrow \rho \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}; \xi -$ смещение.

Далее выражаем σ из ур. движения. Решение получаем в виде

$$\xi = \left[A \sin \frac{wx}{\vartheta} + B \cos \frac{wx}{\vartheta} \right] e^{iwt}$$

Находим const A и B из граничных условий.

5) Решение эл. мех. задачи для тока или напряжения.

5.1. Для пьезомягких мод определ. ток I

$$I = \oint \frac{dD}{dt} dS$$

5.2 Для пьезожестких - напряжение U.

$$U = -\oint E dz$$

P.S. И-ю D и напряженность E находят из ур-я. состояния .

6) Решение эл. мех. задачи для комплексной проводимости (адмитанса) или сопротивления (импеданса).

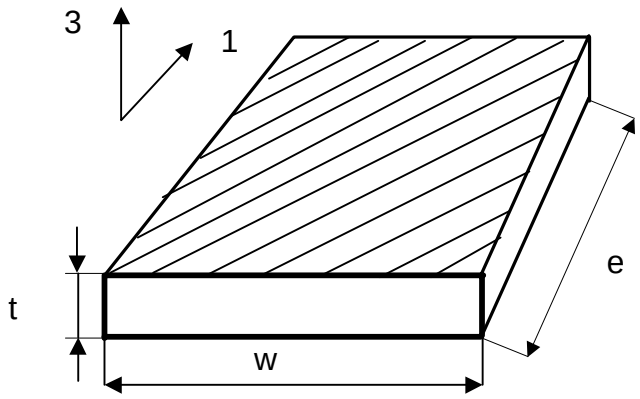
6.1. Для пьезомягких мод определяем проводимость

$$Y = \frac{I}{U}$$

6.2. Для пьезожестких мод Z

Z=U/I

Пьезокерамический стержень



Поперечный пьезоэффект. Эл. поле всегда направлено вдоль оси 3.

1) Эл. поле перпендикулярно мех. колеб.$\rightarrow$ независимая переменная E.
e>>w>>t $\rightarrow$ мода НЧ $\rightarrow$ независимая переменная σ.

2) Выбираем сист. ур. состояния

$$\begin{cases} D = d\sigma + \varepsilon^{\sigma} E \\ u = S^{E}\sigma + d_t E \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_3 = d_{31}\sigma_1 + \varepsilon^{\sigma}{}_{33} E_3 \\ u_1 = S_{11}{}^{E}\sigma_1 + d_{31} E_3 \end{cases}$$

3) Составл. ур. движения

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1}$$

$$\sigma_1 = \frac{u_1 - d_{31}E_3}{S^{E}{}_{11}}; \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_1}{S^{E}{}_{11}}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{d_{31}E_3}{S^{E}{}_{11}}\right) = \frac{1}{S^{E}{}_{11}} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x} = \left\{ u = \frac{\partial \xi}{\partial x} \right\} = \frac{1}{S_{11}} \cdot \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2}$$

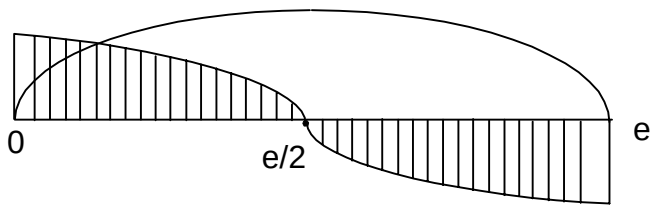
$$\rho \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = \frac{1}{S_{11}^{E}} \cdot \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = (\vartheta, E) = \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2}$$

$(\vartheta, E)^2 = \dfrac{1}{\rho S_{11}^E}$ – скорость распространения волн в стержне.

3) Получим обычное диф. ур. Его решения -гармоническая функция.

$\xi_1 = (A\sin\dfrac{wx_1}{\vartheta_1^E} + B\cos\dfrac{wx_1}{\vartheta_1^E})e^{iwt}$; А и В из граничных условий.



$\sigma = 0 / x = 0; x = e$ для основной моды

Далее находятся значения констант, подставляются в общее решение, находят п.5. и 6.

$$Y = jw\frac{ew}{t}\varepsilon_{33}^{\sigma}\left\{\left[1 - k_{31}^2\right] + k_{31}^2\frac{tg(we/2\vartheta_1 E)}{we/2\vartheta_1 E}\right\}$$

где k_{31} – коэф. эл. мех. связи

$\varepsilon_{33}^{\sigma}$ – диэл. прониц. свободного элемента.

$\varepsilon_{33}^{\sigma}(1 - k_{31}^2) = \varepsilon_{33}^{u}$ – диэл. прониц. закрепл. эл-та**.**

На резонансной частоте Im Y=0/

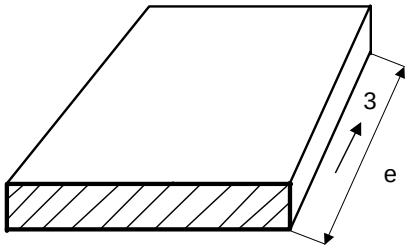
$$tg\frac{we}{2\vartheta_1 E} = \infty; \frac{we}{2\vartheta_1 E} = \frac{\pi}{2} \to f_p = \frac{\vartheta_1 E}{2e}$$

Преобразуем эту формулу.

$$e = \frac{\vartheta_1^E}{2f_p} = \lambda / 2$$

На резонансной длине стержня укладывается пол-длины волны

Пьезокерамический стержень



продольный эффект

1) $E // \sigma \to D$

НЧ $\to \sigma$

2) Используем (3) систему ур.

3) Оставляем компоненты D_3, σ_3;

4) Составляем ур-движ.

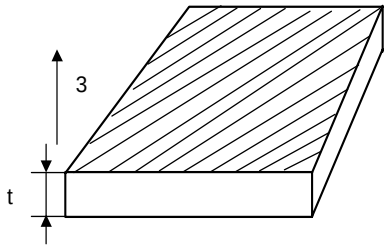
аналогично

только $(\vartheta_3^D)^2 = \dfrac{1}{S_{33}^D \rho}$ – скорость

5) Решение аналогично

$$f_p = \frac{\vartheta_3^D}{2e}$$

Тонкая пластина



1) E// $\sigma \to D$

ВЧ $\to u$

Используем (4) систему.

2) Используем переменные $D_3 u U_3$

3) Составляем аналогично ур-движ.

$$(\vartheta_3^D)^2 = \frac{C_{33}^D}{\rho}$$

5) Решаем

$$k_{22}^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{f_p \cdot 2t}{\vartheta_2^D} ctg \frac{\pi}{2} \frac{f_p \cdot 2t}{\vartheta_3^D}$$

$$k_{22}^2 = \frac{\pi \cdot f_p \cdot t}{\vartheta_3^D} ctg \frac{\pi \cdot f_p t}{\vartheta_3^D} \to f_p$$

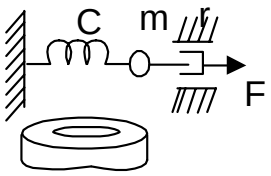
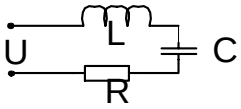
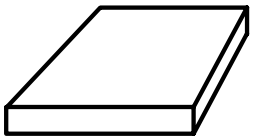
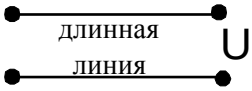
$$f_a = \frac{U_3^D}{2t}$$

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СХЕМЫ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ. РАЗЛИЧНЫЕ РЕЖИМЫ РАБОТЫ.

Сущность метода эквивалентных схем:

Дифференциальные уравнения, описывающие явления в преобразователе, одинаковы по своей форме с уравнениями описывающими явления в некоторой электрической схеме, называемой эквивалентной.

Использование метода электроакустических аналогий:

Механическая система	Эквивалентная схема	Электрические дифференциальные уравнения.	Механические дифференциальные уравнения движения ПКЭ
		$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{c}q=v$	$\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{1}{a^2\rho S_{11}E}\xi=\frac{d_{31}}{a\rho S_{11}E}E_3$
		$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2 v}{\partial X^2}$	$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial e^2}=\frac{1}{S}\frac{\partial^2\xi}{\partial X^2}$

Преимущества метода:

Возможность использования эффективных методов теории электрических цепей .

Правила:

1. Использование уравнений пьезоэффекта (1)-(4) и соответствующие им уравнения движения.

2. Задаются граничные условия на двух активных поверхностях

F=0 КЗ свободный элемент

F≠0 ХХ заторможенный элемент

3.Получают систему из трех уравнений, описывающих процессы, протекающие в преобразователе

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \\ F_2 &= \\ U &= \end{aligned}\right\}(*),$$

где F_1, F_2 - силы, действующие на концах пьезоэлемента, U - напряжение на электродах.

4.Составляют эквивалентную схему, имеющую две пары механических *(F)* и одну пару электрических *(U)* клемм.

5.Вводим понятие “идеальный электромеханический трансформатор”, связывающий механическую и электрическую стороны. Коэффициент трансформации:

$$N = \frac{статич.внешн.сила}{внутр.эл.напряж.заторм.эл-та(U=\upsilon)} = \frac{F}{\upsilon}$$

N - определяет величину пьезоэффекта, эффективность преобразования механической энергии в электрическую.

F - статическая внешняя сила

U - внутреннее электрическое напряжение заторможенного элемента

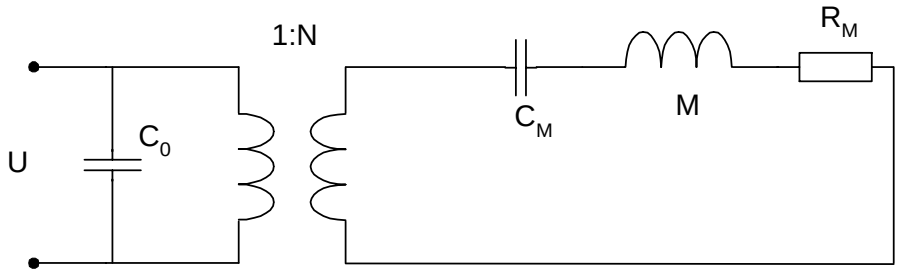
$N \sim 10^{-2}\text{-}10^{2}$ - порядок; $[N]=H/M$.

6. Уравнения (*) сопоставляются с уравнениями для эквивалентной электрической схемы

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= \\ U_2 &= \\ U &= \end{aligned}\right\}$$

Откуда получаем параметры эквивалентной схемы , как коэффициенты при одинаковых переменных.

5.3.2. Эквивалентная схема ненагруженного кольца



$C_0 = (1 - K_{31}^2)C^\sigma$ - емкость заторможенного кольца, где $C^\sigma = \frac{2\pi a w \varepsilon_{33}^\sigma}{t}$ - емкость свободного кольца;

K_{31} коэффициент электромеханической связи;

a - радиус кольца;

w - ширина кольца;

ε_{33}^σ - диэлектрическая проницаемость;

t - толщина кольца.

$N = \frac{2\pi w d_{31}}{S_{11}^E}$ - коэффициент трансформации, где

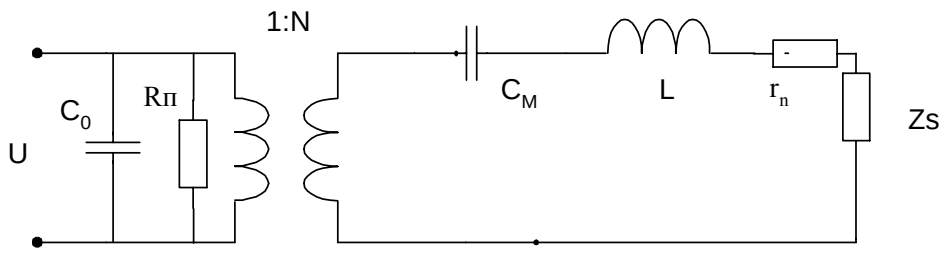
d_{31} - пьезомодуль;

s_{11}^E - упругий модуль.

$C_M = \frac{a S_{11}^E}{2\pi w t}$ - механическая гибкость кольца;

$M = 2\pi a t w \rho$ - масса кольца.

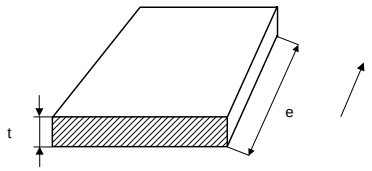
5.3.3. Эквивалентная схема нагруженного кольца



$R_n = \dfrac{1}{\omega C_0 tg\delta}$ - сопротивление электрических потерь;

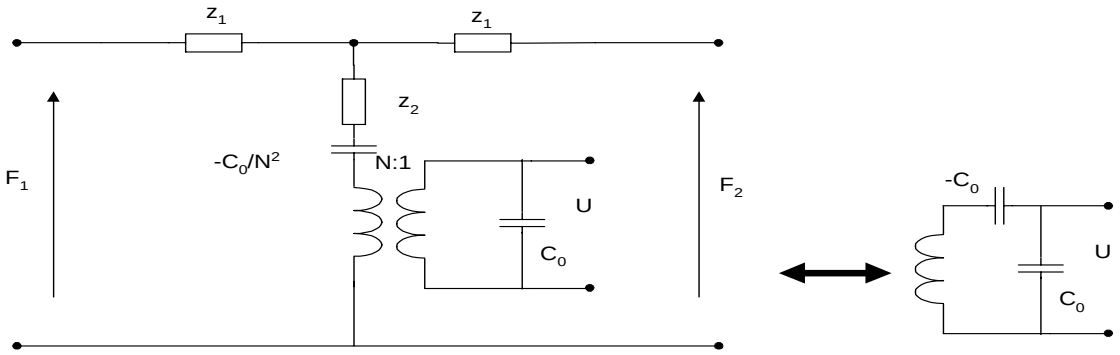
$Z_S = (\rho c)_{среды} S_{изл}$ -механический импеданс нагрузки.

5.3.4. Эквивалентная схема стержня. Продольный эффект. Пьезожесткая мода.



Электрический аналог стержня - длинная линия , поэтому используется Т-образная схема замещения.

Шестиполюсник.



$C_0 = \dfrac{wt}{l}\varepsilon_{33}^{\sigma}(1 - K_{33}^2)$ -емкость заторможенного элемента;

$-\dfrac{C_0}{N^2}$ - емкость динамического торможения. Представляет собой отрицательную гибкость. Означает, что реальная упругость стержня меньше его фактической упругости из-за пьезоэлектрической реакции, обусловленной совпадением электрического и механического полей.

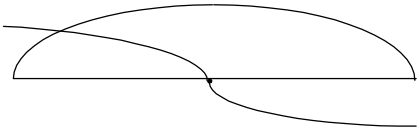
Примечание: - появляется только при продольном эффекте.

$N = \dfrac{wtd_{33}}{lS_{22}^E}$;

$Z_2 = -jz_0 \dfrac{1}{\sin kl}$ - имеет смысл упругости

$Z_1 = -jz_0 tg\frac{kl}{2}$ - представляет собой массу; $K = \frac{\omega}{v_3^D}$

Примечание: - обратить внимание на то, что масса разделена пополам по узловой линии, а гибкость сосредоточена в одном месте.



Функции sin, tg указывают на неоднозначность решения, периодичность.

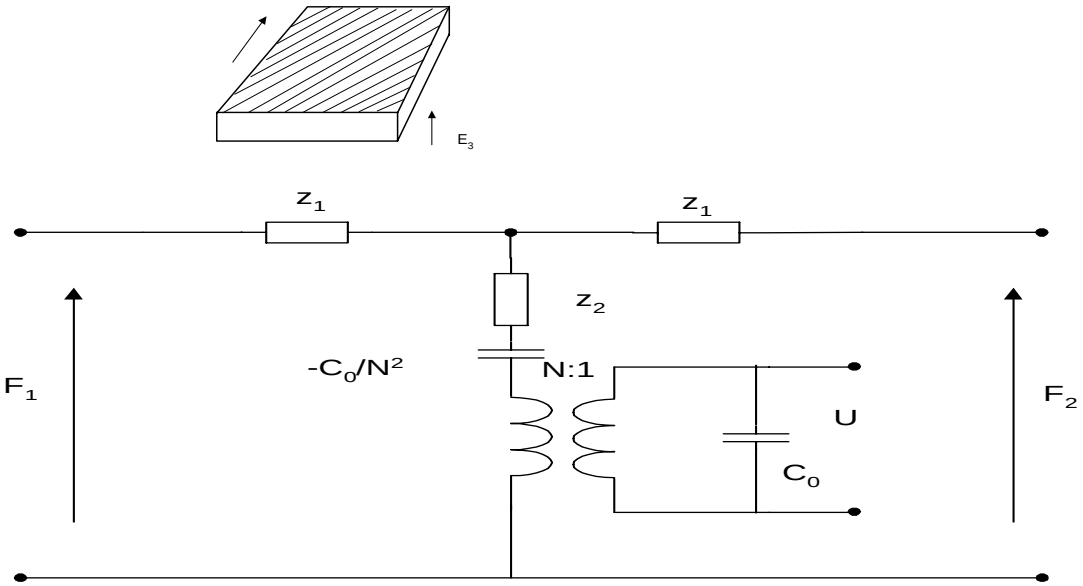
$Z_0 = \rho v_3^D S_{n.c.}$ - характеристический импеданс, где п.с.-поперечное сечение.

$S = wt$ - поперечное сечение в направлении, перпендикулярном колебательному движению.

5.3.5. Стержень. Поперечный эффект. Пьезомягкая мода

Поперечный эффект. Пьезомягкая мода.

E⊥ξ

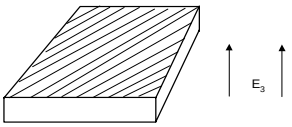


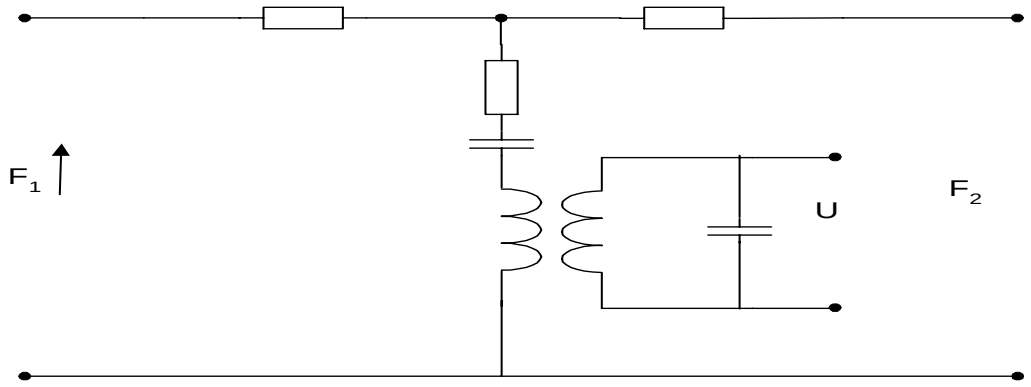
$$C_0 = \frac{Wl}{t}\varepsilon_{33}^{\sigma}(1 - K_{33}^2);$$

$$N = \frac{Wd_{31}}{S_{11}^E};$$

$$Z_0 = \rho v_1^E (wt)$$

5.3.6. Колебания пластины по толщине





$$N = C_0 h_{33};$$

$$C_0 = \frac{lw\,\varepsilon_{33}^{U}}{t};$$

$$Z_0 = \rho V_3^D (wl).$$

5.3.7. Упрощения эквивалентных схем

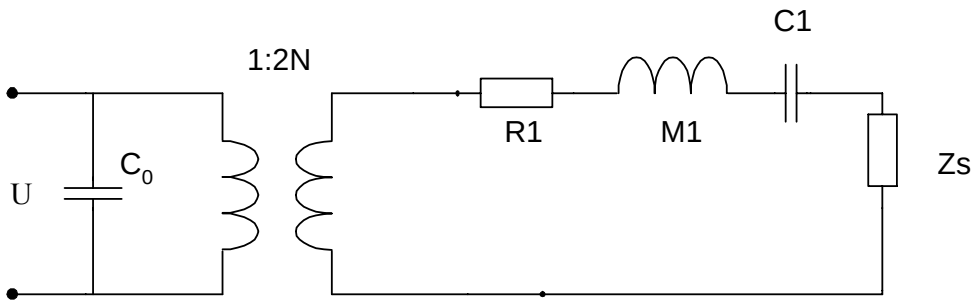
Вблизи основного резонанса, для частот $f_p \pm 0{,}7 f_p$ схема с распределенными параметрами может быть заменена схемой с сосредоточенными параметрами путем замены тригонометрических функций (sin и tg) первыми двумя членами их разложения в ряд. Образуется схема с комбинацией последовательного и параллельного соединения эквивалентных масс и гибкостей.

Для односторонней нагрузки схема выглядит следующим образом:

$$R_1 = \frac{Z_0 \pi}{2Q_M}; \quad M_1 = \frac{M}{2}; \quad C_1 = \frac{2}{\pi^2} * \frac{eS^E{}_{11(33)}}{S_K}$$

$$R_2 = \frac{8Z_0 Q}{\pi}; \quad M_2 = \frac{8M}{\pi^2}; \quad C_2 = \frac{eS^E{}_{11(33)}}{8S_K} \quad Q = \frac{\omega m}{R} - \textit{добротность системы}$$

При присоединении нагрузки $Z_S << Z_{11}$



В области частой ниже резонансной f_p примерно в 5 раз и более. Аргумент тригнометрических функций kl мал, так, что

$tg\frac{ke}{2} \approx \frac{ke}{2}$ и $\sin ke \approx ke$ e<<λ

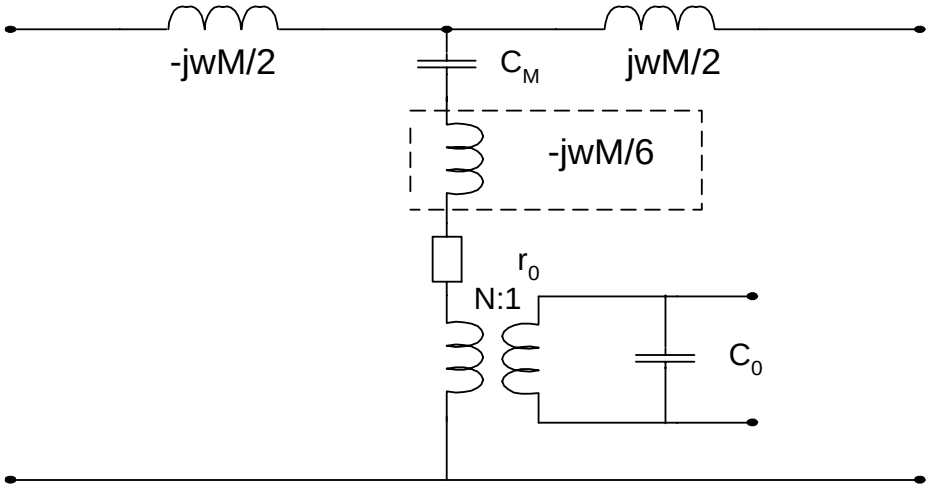
В результате чего "Т"-образное звено схемы упрощается вследствие введения сосредоточенных параметров- эквивалентной массы и гибкости.
M=ρSe-масса стержня

$C_M = \frac{eS^E{}_{11(33)}}{S}$ -механическая гибкость

На частотах в области f_p, когда <u>колебательный размер</u> хотя и сравним, но остается меньше длинны волны в материале

e<<λ

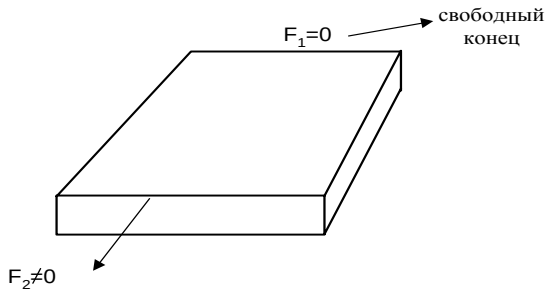
функцию sin заменяют не аргументом, а двумя членами разложения и тогда в общую ветвь добавляется эквивалентная масса $\frac{M}{6}$.

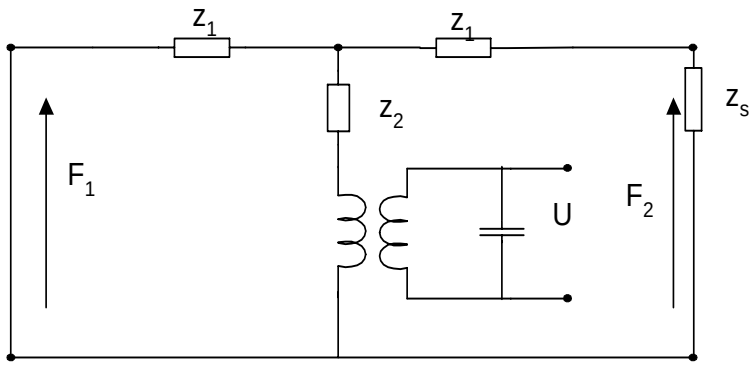


Все расчетные модели и эквивалентные схемы верны, когда резонансные (колебательные) размеры значительно больше остальных.
стержень→↑в 1,5-2 раза
цилиндр → высота в 1,5-2 раза меньше резонансного размера, толщина стенки $\leq \frac{1}{4}$ диаметра

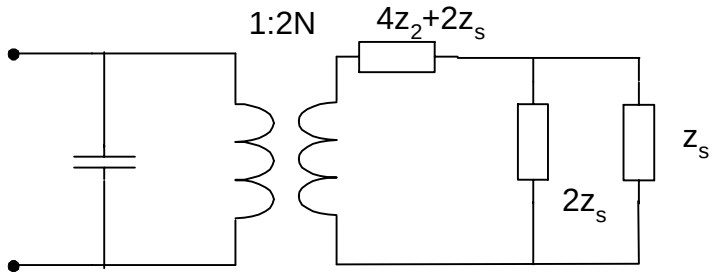
Различные режимы работы.

1. Акт. стержень с одним свободным кон.



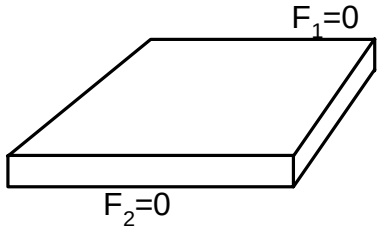


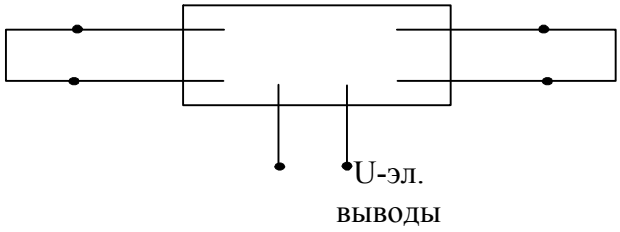
Методами ТОЭ схема упрощается к следующему виду:



Вывод: при односторонней нагрузке коэф. трансформации удваивается.

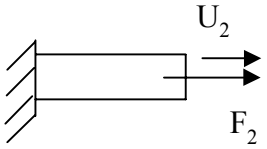
2.Акт. стержень с двумя свободн. концами.



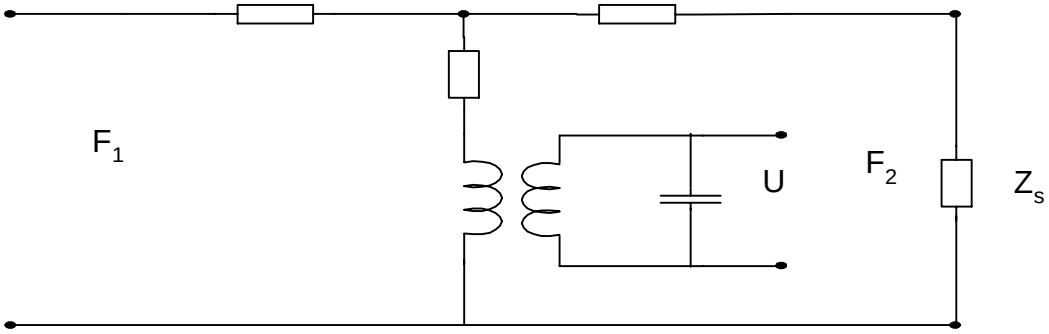


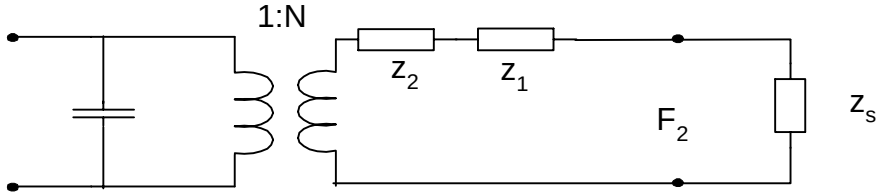
Вывод: ненагруженный эл-т явл. двуполюсником.

3.Акт. стержень с одним закрепленным концом (тяжелая тыльная накладка либо спец.-демпфирование).

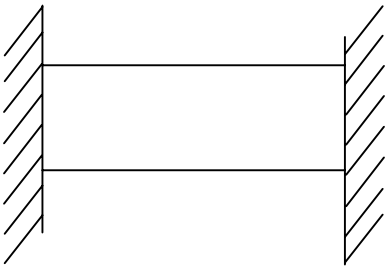


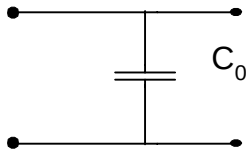
$F_1 = \infty; \quad U_1 = 0$





4. Акт. стержень с двумя закрепленными концами.



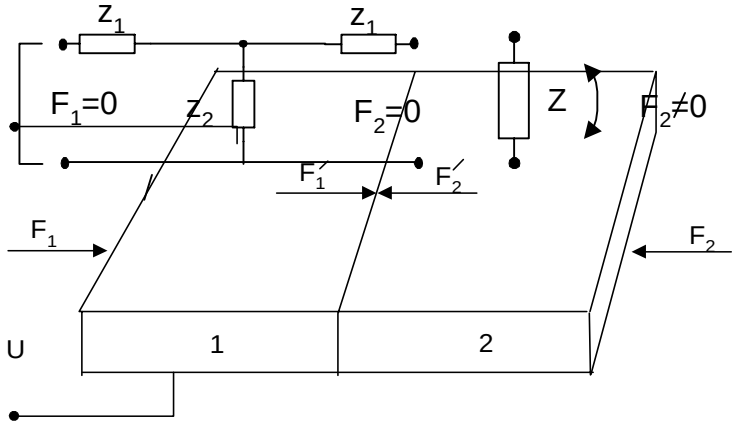


- гибкость

$F_1 = \infty$; $F_2 = \infty$;

$U_1 = 0$; $U_2 = 0$;

5. Составной стержень.



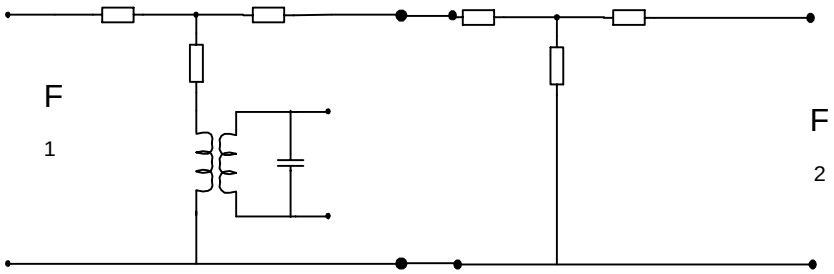
5. Составной стержень.

1-активный стержень
2-пассивный стержень

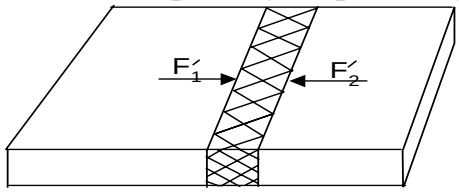
<u>жесткое соединение</u>

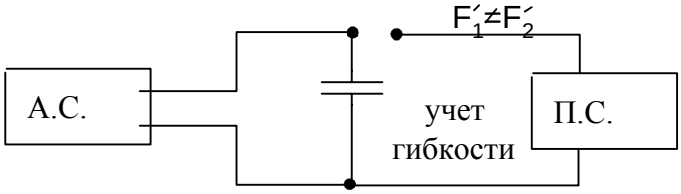
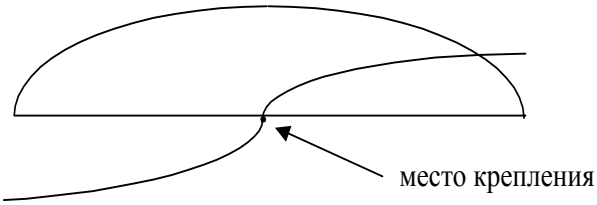
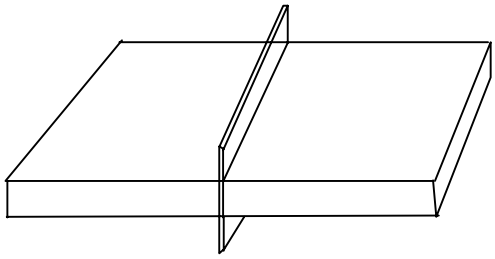
$F_1' = F_2'$

$U_1' = U_2'$ - перемычка



Соедин. через акуст. развязку (клей, экран, резина).





Учет пласт. крепления