Лекция №3-4

Экспериментально-статистическое моделирование

Современная промышленность и строительство на сегодняшний день не могут существовать вне компьютерного моделирования, особенно когда окончательное решение не может быть достигнуто путем физического эксперимента по причине значительных финансовых и временных затрат. Наиболее эффективным средством при решении конкретных задач оказалось экспериментально-статистическое моделирование – совокупность представлений, методов и алгоритмов, которая связывает математическое планирование эксперимента, регрессионный анализ и другие средства прикладной статистики с содержательным анализом получаемых ЭС-моделей. Его результаты приобретают дополнительную полезность, когда решение задач строительного материаловедения опирается на концепцию полей свойств материалов, направленной на максимальное извлечение полезной информации из эксперимента.

Процесс моделирования включает три элемента:

- субъект (исследователь),
- объект исследования,
- модель, определяющую (отражающую) отношения познающего субъекта и познаваемого объекта.

Первый этап построения модели предполагает наличие некоторых знаний об объекте-оригинале. Познавательные возможности модели обусловливаются тем, что модель отображает (воспроизводит, имитирует) какие-либо существенные черты объекта-оригинала. Вопрос о необходимой и достаточной мере сходства оригинала и модели требует конкретного анализа. Очевидно, модель утрачивает свой смысл как в случае тождества с оригиналом (тогда она перестает быть моделью), так и в случае чрезмерного во всех существенных отношениях отличия от оригинала. Таким образом, изучение одних сторон моделируемого объекта осуществляется ценой отказа от исследования других сторон. Поэтому любая модель замещает оригинал лишь в строго ограниченном смысле. Из этого следует, что для одного объекта может быть построено несколько «специализированных» моделей, концентрирующих внимание на определенных сторонах исследуемого объекта или же характеризующих объект с разной степенью детализации.

На втором этапе модель выступает как самостоятельный объект исследования. Одной из форм такого исследования является проведение «модельных» экспериментов, при которых сознательно изменяются условия функционирования модели и систематизируются данные о её «поведении». Конечным результатом этого этапа является множество (совокупность) знаний о модели.

На третьем этапе осуществляется перенос знаний с модели на оригинал – формирование множества знаний. Одновременно происходит переход с «языка» модели на «язык» оригинала. Процесс переноса знаний проводится по определенным правилам. Знания о модели должны быть скорректированы с учетом тех свойств объекта-оригинала, которые не нашли отражения или были изменены при построении модели.

Четвёртый этап – практическая проверка получаемых с помощью моделей знаний и их использование для построения обобщающей теории объекта, его преобразования или управления им.

Моделирование – циклический процесс. Это означает, что за первым четырёхэтапным циклом может последовать второй, третий и т. д. При этом знания об исследуемом объекте расширяются и уточняются, а исходная модель постепенно совершенствуется. Недостатки, обнаруженные после первого цикла моделирования, обусловленные малым знанием объекта или ошибками в построении модели, можно исправить в последующих циклах.

Сейчас трудно указать область человеческой деятельности, где не применялось бы моделирование. Разработаны, например, модели производства автомобилей, выращивания пшеницы, функционирования отдельных органов человека, жизнедеятельности Азовского моря, последствий атомной войны. В перспективе для каждой системы могут быть созданы свои модели, перед реализацией каждого технического или организационного проекта должно проводиться моделирование.

Успех экспериментального моделирования с моделью системы существенным образом зависит от правильного решения вопросов обработки и последующего анализа и интерпретации результатов моделирования. Особенно важно решить проблему текущей обработки экспериментальной информации при использовании модели для целей автоматизации проектирования систем.

Статистический анализ при проектировании оптико-электронных приборов и систем

Проектная процедура статистического анализа на системотехническом уровне заключается в определении зависимости характеристик выходного сигнала g(t) от известных характеристик (моментов) случайного воздействия (например, фона) u(t) на входе системы или во внутренних элементах системы (шумы элемента). Случайныепроцессы полностью описываются плотностью распределения вероятности (законом распределения), функциями распределения или характеристическими функциями. Однако на практике удобнее оперировать с моментными функциями, по которым можно однозначно определить плотность распределения вероятности.

В большинстве практически важных случаев для описания влияния случайных воздействий на работу ОЭПиС (оптико-электронные приборы и системы) достаточно знать первые две моментные функции выходного сигнала. Поэтому можно полагать задачу статистического анализа заключающейся в определении математического ожидания и корреляционной функции сигнала на выходе системы. Рассмотрим общий случай нестационарной полиномиальной системы, которая описывается выражением:

$$g(t) = \sum_{i=1}^{N} Hi(t, \tau_1 \dots \tau_i) \prod_{r=1}^{i} u\,(\tau_r) dv_\tau \tag{1.1}$$

$$g(t) = \sum_{i=1}^{N} Hi(t - \ \tau_{1\dots,t-\tau_1}) \prod_{r=1}^{i} u\,(\tau_r) dv_\tau \tag{1.2}$$

Как известно, n-мерный момент k-го порядка случайного процесса

{u(t)}определяется выражением

$$m_u^{(n)}(\tau_1, \dots, \tau_n) = M[\prod_{r=1}^{n} u(\tau_r)] = \int_{E^n}^{n} p_n\,(u_1, \dots, u_n, \tau_1, \dots, \tau_n) \prod_{r=1}^{n} u^k r(\tau_r) dv_t \tag{1.3}$$

где $\int_{E^n}^{n} p_n\,(u_1, \dots, u_n, \tau_1, \dots, \tau_n)$- многомерная плотность распределения вероятности процесса

$\{u(\tau)\}; k = \int_{r=1}^{n} k_r$ - порядок момента

Тогда, используя свойство линейности оператора M{×} и меняя местами операции интегрирования и усреднения, получим следующую формулу для вычисления математического ожидания сигнала на выходе полиномиальной системы

$$m_g(t) = M\{g(t)\} = \sum_{i=1}^{n} \int_{E^i}^{N} H_i(\,t, \tau_1, \dots, \tau_i) M\{\prod_{r=1}^{n} u(\tau_r)\} dv_t \tag{1.4}$$

Двумерный момент второго порядка для процесса {g(t)}определяется как

$$m_g^2(t_{1,} t_2) = M\{g(t_1) g(t_2)\} = \sum_{i=1}^{N} 1 \sum_{j=1}^{N} \int_{E^{i+j}}^{t} H_i(t_1, \tau_1, \dots, \tau_i) * H_j(t_2, \tau_{i+1}, \dots, \tau_{i+j}) \tag{1.5}$$

Аналогично p-мерный момент порядка p процесса {g(t)} в самом общем случае можно вычислить, пользуясь формулой

Из формул (1.2) – (1.4) следует: для определения n-мерного моментапорядка n случайного процесса {g(t)}. необходимо знать многомерные моменты входного сигнала вплоть до Nn. Вычисление моментов высших порядков упрощается, если система стационарна и сигнал на входе нелинейной системы также является стационарным. Пусть на входе стационарной нелинейной полиномиальной системы действует случайный нестационарный сигнал. Это означает, что ядра системы не изменяются во времени (являются стационарными), а сигнал на выходе системы определяется выражением

$$g(t) = \sum_{i=1}^{N} \int_{E^i}^{t} H_i(t-\tau_1, \dots, t-\tau_1) \prod_{r=1}^{i} u(\tau_r) d\nu_\tau \qquad (1.6)$$

Где $u(\tau_r) = m_u(\tau) + u_0(\tau)$- реализация нестационарного случайного процесса, имеющего математическое ожидание mu (t) ; 0 ( ) u t – центрированный случайный процесс, для которого $M\{u_0(\tau)\} = 0$,тогда математическое ожидание сигнала g(t).

$$m_g(t) = \sum_{i=1}^{N} \int_{E^i}^{g} H_i(t-\tau_1, \dots, t-\tau_1) M\left\{\prod_{r=1}^{i} u(\tau_r)\right\} d\nu_\tau = \sum_{i=1}^{N} \int_{E^i}^{g} H_i(t-\tau_1, \dots, t-\tau_1)\, m_u^{(i)}(\tau_{1,\dots,}\tau_i) d\nu_\tau \ (1.7)$$

Многовариантный анализ

Многовариантный анализ используется для исследования свойств ОЭПиС при изменении параметров её внутренних элементов или внешних воздействий в некотором диапазоне. Содержанием процедуры многовариантного анализа является набор отдельных процедур анализа, каждая из которых выполняется при определённом значении изменяемого параметра. Примерами такой проектной процедуры являются;

– анализ параметрической чувствительности (исследуется зависимость количественных и качественных характеристик ОЭПиС от отклонений параметров основных элементов вследствие технологических или эксплуатационных воздействий);

– граничные испытания (определяются допустимые пределы изменений параметров элементов по критерию надёжности ОЭПиС);

– анализ влияния шумов и фонов на характеристики ОЭПиС.

Типовой алгоритм процедуры рассмотрим на примере анализа параметрической чувствительности (рисунок 1).

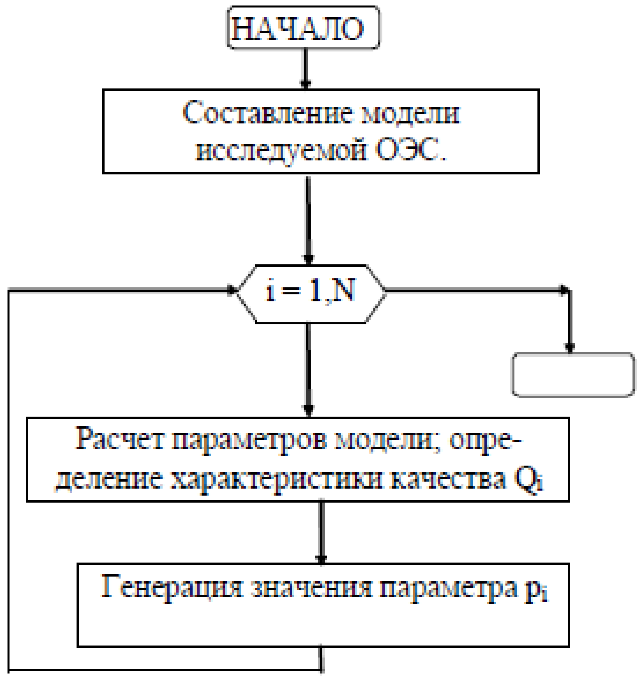

Рисунок 1 – Типовой алгоритм процедуры

На первом этапе составляется модель исследуемой ОЭПиС (например,фотометра) в виде зависимости некоторой характеристики качества Q (например, погрешности измерения) от исследуемого параметра p (например, отклонения чувствительности приёмника оптического излучения от номинальной вследствие технологических причин). Далее, по циклическому алгоритму рассчитывается массив значений параметра Qi для генерируемых значений параметра pi. Генерация значений параметра pi выполняется с учетом случайных факторов, определяющих его изменение в реальных условиях. Полученная в результате циклов выборка значений параметра Qi позволяет достоверно оценить влияние технологического уровня точности изготовления фотоприёмника. Рассмотренный пример показывает, что базовой операциейпроцедуры многовариантного анализа является синтез значений изменяемого параметра как некоторой случайной величины (или случайного процесса) по её характеристикам. Далее рассмотрены методы синтеза случайных величин при различных видах их функции распределения.

Корреляционный анализ результатов моделирования

С помощью корреляционного анализа исследователь может установить, насколько тесна связь между двумя (или более) случайными величинами, наблюдаемыми и фиксируемыми при моделировании конкретной системы S. Корреляционный анализ результатов моделирования сводится к оценке разброса значений h относительно среднего значения , т. е. к оценке силы корреляционной связи. Существование этих связей и их тесноту можно для схемы корреляционного анализа выразить при наличии линейной связи между исследуемыми величинами и нормальности их совместного распределения с помощью коэффициента корреляции.Для того чтобы оценить точность полученной при обработке результатов моделирования системы S оценки rxh, целесообразно ввести в рассмотрение коэффициент

$$w = \ln [(1+ rxh)/(1-rxh)]/2,$$

причем w приближенно подчиняется гауссовскому распределению со средним значением и дисперсией. Из-за влияния числа реализаций при моделировании N на оценку коэффициента корреляции необходимо убедиться в том, что действительно отражает наличие статистически значимой корреляционной зависимости между исследуемыми переменными модели Мм. Это можно сделать проверкой гипотезы H0: rxh=0. Если гипотеза H0 при анализе отвергается, то корреляционную зависимость признают статистически значимой. Очевидно, что выборочное распределение введенного в рассмотрение коэффициента w при rxh= 0 является гауссовским с нулевым средним mw = 0 и дисперсией .При анализе результатов моделирования системы S важно отметить то обстоятельство, что даже если удалось установить тесную зависимость между двумя переменными, то отсюда еще непосредственно не следует их причинно-следственная взаимообусловленность. Возможна ситуация, когда случайные x и h стохастически зависимы, хотя причинно они являются для системы S независимыми. При статистическом моделировании наличие такой зависимости может иметь место, например, из-за коррелированности последовательностей псевдослучайных чисел, используемых для имитации событий, положенных в основу вычисления значений x и y. Таким образом, корреляционный анализ устанавливает связь между исследуемыми случайными переменными машинной модели и оценивает тесноту этой связи. Однако в дополнение к этому желательно располагать моделью зависимости, полученной после обработки результатов моделирования.

Регрессионный анализ результатов моделирования

Регрессионный анализ дает возможность построить модель, наилучшим образом соответствующую набору данных, полученных в ходе машинного эксперимента с системой S. Под наилучшим соответствием понимается минимизированная функция ошибки, являющаяся разностью между прогнозируемой моделью и данными эксперимента. Такой функцией ошибки при регрессионном анализе служит сумма квадратов ошибок. В статических моделях система представляется неизменной во времени. Такие модели удобны, когда нужно описать структуру системы, то есть из каких объектов она состоит, как эти объекты связаны сдруг с другом и каковы свойства этих объектов. Образно говоря, статическая модель представляет собой как бы “фотографию” существенных свойств системы в некоторый момент времени. Примеры статических моделей: карта местности, схема персонального компьютера, перечень планет Солнечной системы с указанием их массы. Динамические модели содержат информацию о поведении системы и ее составных частей. Для описания поведения обычно используются записанные в виде формул, схем или компьютерных программ соотношения, позволяющие вычислить параметры системы и ее объектов, как функции времени. Примеры динамических моделей: набор формул небесной механики, описывающий движение планет Солнечной системы; график изменения температуры в помещении в течение суток; видеозапись извержения вулкана. В зависимости от цели моделирования для одной и той же системы могут создаваться как статические, так и динамические модели. Построение динамических моделей обычно сложнее, чем статических, поэтому, если значения свойств системы изменяются редко или медленно, то лучше построить статическую модель системы и при необходимости вносить в нее коррективы.