Лекция №1-2

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ И ПРОЦЕССОВ

На этапе исследования и проектирования систем при построении и реализации машинных моделей (аналитических и имитационных) широко используется метод статистического моделирования (Монте-Карло), который базируется на использовании случайных чисел, т.е. возможных значений некоторой случайной величины с заданным распределением вероятностей.

Сущность метода статистического моделирования сводится к построению для процесса функционирования исследуемой системы S некоторого моделирующего алгоритма, имитирующего поведение и взаимодействие элементов системы с учетом случайных входных воздействий и воздействий внешней среды E, и реализации этого алгоритма с использованием программно-технических средств ЭВМ.

Различают две области применения метода статистического моделирования:

- для изучения стохастических систем;
- для решения детерминированных задач.

Основной идеей, которая используется для решения детерминированных задач методом статистического моделирования, является замена детерминированной задачи эквивалентной схемой некоторой стохастической системы, выходные характеристики последней совпадают с результатом решения детерминированной задачи. При такой замене погрешность уменьшается с увеличением числа испытаний (реализации моделирующего алгоритма) N.

В результате статистического моделирования системы S получается серия частных значений искомых величин или функций, статистическая обработка которых позволяет получить сведения о поведении реального объекта или процесса в произвольные моменты времени. Если количество реализации N достаточно велико, то полученные результаты моделирования системы приобретают статистическую устойчивость и с достаточной точностью могут быть приняты в качестве оценок искомых характеристик процесса функционирования системы *S*.

Понятие «статистическое моделирование» тесно связано с понятием «метод Монте-Карло» и почти ему тождественно.

Для решения задач методом Монте-Карло необходимо получать на ЭВМ последовательность выборочных значений случайной величины с заданным распределением. Такой процесс принято называть **моделированием случайной величины**. Случайные величины обычно моделируют с помощью преобразований одного или нескольких независимых значений случайной величины *a*, равномерно распределенной в интервале (0,1). Независимые случайные величины, равномерно распределенные в интервале (0,1).

Можно выделить следующие этапы моделирования случайных величин:

- генерирование *N* реализации случайной величины с требуемой функцией распределения;
- преобразование полученной величины, определяемой математической моделью;
- статистическая обработка реализации.

Особенностью первого этапа является то, что все методы для получения заданного распределения используют преобразование равномерно распределенной величины.

Конструктивно задаются случайная величина, равномерно распределенная в интервале (0,1), $\alpha \in (0,l)$, далее производится отображение $\omega = \varphi(x)$ $x \in (0,1)$ и получается новая случайная величина ξ с распределением, определяемым решаемой задачей, в общем случае $\varphi(x)$ может быть довольно сложным.

Далее следует получение некоторых характеристик. При параметрических оценках вычисляется некоторая функция $\xi(\theta_1,\theta_2,...,\theta_n)$. При непараметрическом задании функций распределения обычно вычисляются плотности или функции распределения. Чаще всего находят оценки математической ожидания. Погрешность оценки определяется дисперсией (если она известна) по числу экспериментов *N*.

В результате можно выделить следующие этапы (рисунок 1):

- подготовка исходных данных (блок 1),

- генерирование равномерно распределенных случайных чисел (блок 2),

- преобразования для получения заданного закона распределения (блок 3);

- выполнение дополнительных преобразований в соответствии с проблем ной областью (блок 4);

- статистическая обработка (блок 5).

Рисунок 1 - Технологический процесс в Монте-Карло системах где:

- ПИД - подготовка исходных данных,

- ГРРСЧ - генерирование равномерно распределенных случайных чисел;

- ГПЗ - генерирование произвольного (заданного) закона распределения;

- ДПр - дополнительные преобразования;

- СО - статистическая обработка.

Имитационные системы имеют следующие функциональные блоки:

- имитации входных процессов;

- имитации правил переработки входной информации исследуемой системы;

- накопления информации в результате моделирования;

- анализа накопленной информации;

- управления имитирующей системы.

Моделирование случайных процессов строится на основе базовых распределений случайных величин. Одним из таких процессов являются марковские процессы.

Марковские случайные процессы названы по имени выдающегося русского математика А.А. Маркова (1856-1922), впервые начавшего изучение вероятностной связи случайных величин и создавшего теорию, которую можно назвать “динамикой вероятностей”.

Марковские случайные процессы относятся к частным случаям случайных процессов (СП). В свою очередь, случайные процессы основаны на понятии случайной функции (СФ).

Случайной функцией называется функция, значение которой при любом значении аргумента является случайной величиной (СВ). По- иному, СФ можно назвать функцию, которая при каждом испытании принимает какой-либо заранее неизвестный вид. Такими примерами СФ являются: колебания напряжения в электрической цепи, скорость движения автомобиля на участке дороги с ограничением скорости, шероховатость поверхности детали на определенном участке и т.д.

Как правило, считают, что если аргументом СФ является время, то такой **процесс называют случайным**. Существует и другое, более близкое к теории принятия решений, определение СП. При этом под случайным процессом понимают процесс случайного изменения состояний какой-либо физической или технической системы по времени или какому-либо другому аргументу.

Нетрудно заметить, что если обозначить состояние s_i и изобразить зависимость $s_i(t)$, то такая зависимость и будет случайной функцией.

СП классифицируются по видам состояний s_i и аргументу t. При этом СП могут быть с дискретными или непрерывными состояниями или временем. Например, любой выборочный контроль продукции будет относиться к СП с дискретными состояниями (s_1- годная, s_2- негодная продукция) и дискретным временем (t_1, t_2- времена проверки). С другой стороны, случай отказа любой машины можно отнести к СП с дискретными состояниями, но непрерывным временем. Проверки термометра через определенное время будут относиться к СП с непрерывным состоянием и дискретным временем. В свою очередь, например, любая осциллограмма будет записью СП с непрерывными состояниями и временем.

Кроме указанных выше примеров классификации СП существует еще одно важное свойство. Это свойство описывает вероятностную связь между состояниями СП. Так, например, если в СП вероятность перехода системы в каждое последующее состояние зависит только от предыдущего состояния, то такой процесс называется процессом без последействия (рисунок 2).

Зависимость $P_{i/i+1} = f(S_i)$ называют переходной вероятностью, часто говорят, что именно процесс без последействия обладает марковским свойством, однако, строго говоря, здесь есть одна неточность. Дело в том, что можно представить себе СП, в котором вероятностная связь существует не только с предшествующими, но и более ранними ($S_{i-1}, S_{i-2}, \ldots$) состояниями, т.е.

$$P_{i/i+1} = f(S_i, S_{i-1}, S_{i-2}) \quad (1)$$

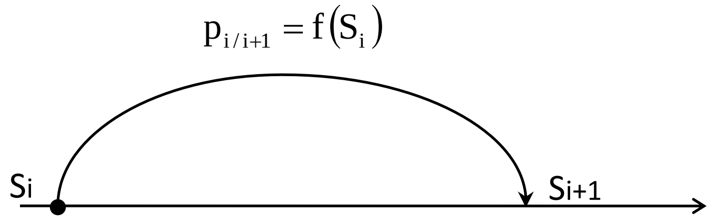


Рисунок 2 - Схема процесса без последействия

Такие процессы также рассматривались А.А. Марковым, который предложил называть сложной цепью. В настоящее время теория таких цепей разработана слабо и обычно применяют так называемый процесс укрупнения состояний путем математических преобразований, объединяя предшествующие состояния в одно.

Это обстоятельство должно обязательно учитываться при составлении математических моделей принятия решений.

Выше мы совершили незаметный терминологический переход от понятия СП к “марковской цепи”. Теперь эту неясность следует устранить. Отметим, во-первых, что случайный процесс с дискретными состояниями и временем называется случайной последовательностью.

Если случайная последовательность обладает марковским свойством, то она называется цепью Маркова. С другой стороны, если в случайном процессе состояния дискретны, время непрерывно и свойство последействия сохраняется, то такой случайный процесс называется марковским процессом с непрерывным временем.

Марковский СП называется однородным, если переходные вероятности $P_{i/i+1}$ остаются постоянными в ходе процесса.

Цепь Маркова считается заданной, если заданы два условия:

1. Имеется совокупность переходных вероятностей в виде матрицы:

$$\Pi(n)=\begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

2. Имеется вектор начальных вероятностей, описывающий начальное состояние системы.

$$P^{(0)}_{<n>} =< P_{01}, P_{02}, \dots, P_{0n} >, \ \dots.. \qquad (3)$$

Матрица (2) называется переходной матрицей (матрицей перехода). Элементами матрицы являются вероятности перехода из i-го в j-е состояние за один шаг процесса. Переходная матрица (2) обладает следующими свойствами:

а) $\forall\nabla P_{ij} \geq 0$, (3а)

б) $\sum\limits_{i=1}^{n} P_{ij} = 1$.

Матрица, обладающая свойством (3а), называется стохастической. Кроме матричной формы модель марковской цепи может быть представлена в виде ориентированного взвешенного графа (рисунок 3).

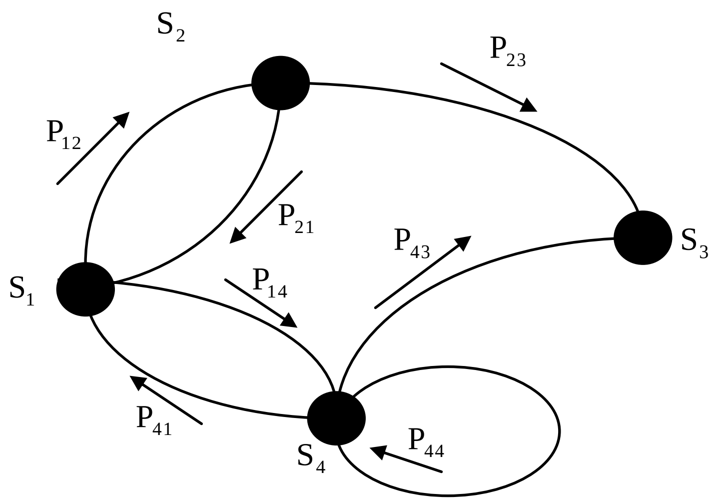


Рисунок 3 – Ориентированный взвешенный граф

Вершины графа обозначают состояние S_i, а дуги- переходные вероятности. Множество состояний системы марковской цепи, определенным образом классифицируется с учетом дальнейшего поведения системы.

1. *Невозвратное множество* (рисунок 4).

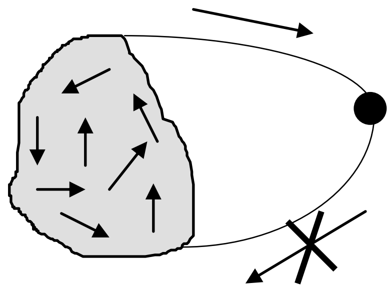


Рисунок 4 - Невозвратное множество

В случае невозвратного множества возможны любые переходы внутри этого множества. Система может покинуть это множество, но не может вернуться в него.

2. *Возвратное множество* (рисунок 5)

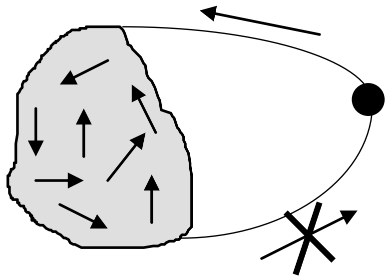


Рисунок 5 – Возвратное множество

В этом случае также возможны любые переходы внутри множества. Система может войти в это множество, но не может покинуть его.

3. *Эргодическое множество* (рисунок 6)

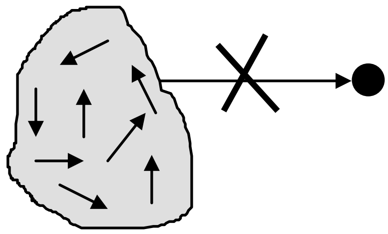


Рисунок 6 – Эргодическое множество

В случае эргодического множества возможны любые переходы внутри множества, но исключены переходы из множества и в него.

4. Поглощающее множество (рисунок 7)

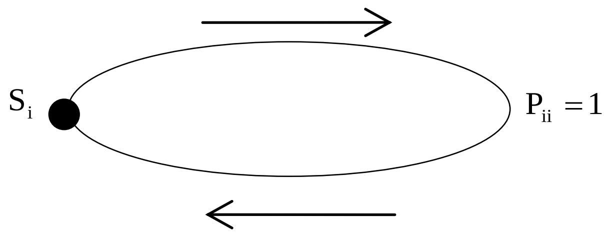


Рисунок 7 – Поглощающее множество

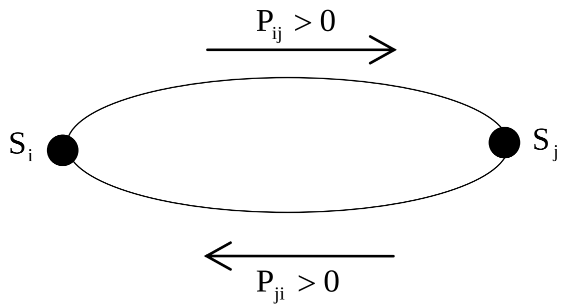
При попадании системы в это множество процесс заканчивается.

Кроме описанной выше классификации множеств различают состояния системы:

а) *существенное состояние* (рисунок 8): возможны переходы из S_i в S_i и обратно.

Рисунок 8 – Существенное состояние

б) *несущественное состояние* (рисунок 9): возможен переход из S_i в S_j



, но невозможен обратный.

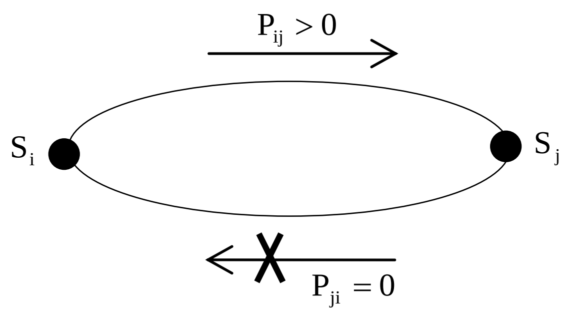


Рисунок 9 – Несущественное состояние

В некоторых случаях, несмотря на случайность процесса, имеется возможность до определенной степени управлять законами распределения или параметрами переходных вероятностей. Такие марковские цепи называются управляемыми. Очевидно, что с помощью управляемых цепей Маркова (УЦМ) особенно эффективным становится процесс принятия решений, о чем будет сказано впоследствии.

Основным признаком дискретной марковской цепи (ДМЦ) является детерминированность временных интервалов между отдельными шагами (этапами) процесса. Однако часто в реальных процессах это свойство не соблюдается и интервалы оказываются случайными с каким-либо законом распределения, хотя марковость процесса сохраняется. Такие случайные последовательности называются полумарковскими.

Кроме того, с учетом наличия и отсутствия тех или иных, упомянутых выше, множеств состояний марковские цепи могут быть поглощающими, если имеется хотя бы одно поглощающее состояние, или эргодическими, если переходные вероятности образуют эргодическое множество.

В свою очередь, эргодические цепи могут быть регулярными или циклическими. Циклические цепи отличаются от регулярных тем, что в процессе переходов через определенное количество шагов (циклов) происходит возврат в какое-либо состояние. Регулярные цепи этим свойством не обладают. Если просуммировать все вышесказанные определения, то можно дать следующую классификацию марковских процессов (рисунок 10).

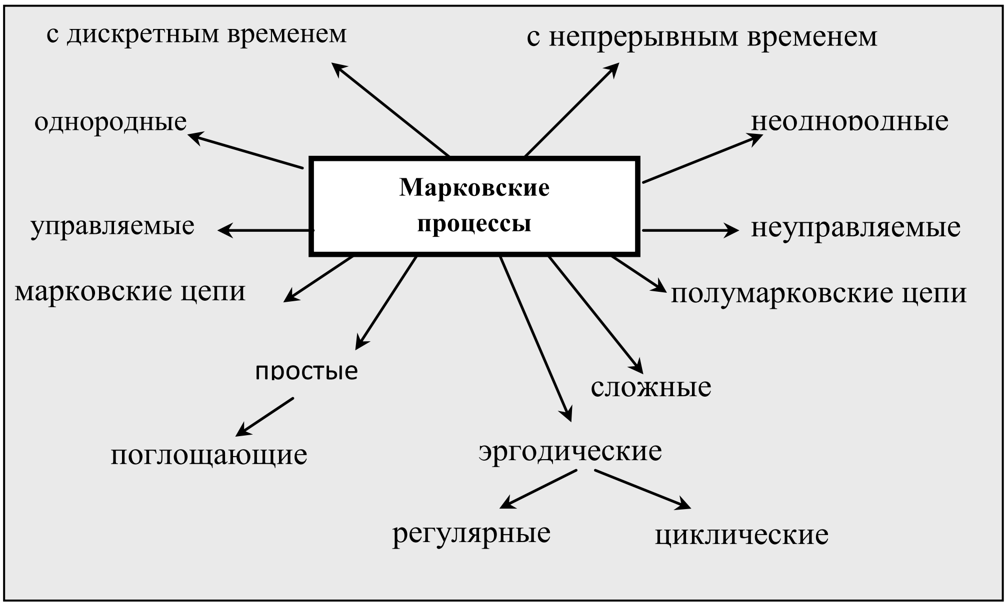


Рисунок 10 – Классификация Марковских процессов

Простейшими случайными объектами при статическом моделировании систем являются **случайные события.**

В моделировании систем методами имитационного моделирования, существенное внимание уделяется учету случайных факторов и воздействий на систему. Для их формализации используются случайные события, дискретные и непрерывные величины, векторы, процессы. Формирование реализации случайных объектов любой природы сводится к генерации и преобразованию последовательностей случайных чисел.

В практике имитационного моделирования систем на ЭВМ ключевым факторам является оптимизация алгоритмов работы со случайными числами.

Таким образом, наличие эффективных методов, алгоритмов и программ формирования, необходимых для моделирования конкретных систем последовательностей случайных чисел, во многом определяет возможности практического использования машинной имитации для исследования и проектирования систем.

Моделирование противоположных событий

Пусть имеются случайные числа r_i т.е. возможные значения случайной величины ξ, равномерно распределенной в интервале (0,1). Необходимо реализовать случайное событие A, наступающее с заданной вероятностью p. Определим A как событие, состоящее в том, что выбранное значение r_i случайной величины ξ удовлетворяет неравенству:

$$r_i \le p \tag{1}$$

Противоположное событие A состоит в том, что $r_i > p$. Тогда P(Ā)=1–p.

Процедура моделирования состоит в выборе значений r_i и сравнения их с p. Если условие (1) выполняется, то исходом испытания является событие A, иначе Ā.

Пример 1. Вероятность замены неисправной детали на новую при ремонте автомобиля в каждом испытании равна 0,53. Смоделировать пять испытаний и определить последовательность замены детали на новую или восстановленную.

Решение. Пусть событие А состоит в замене детали на новую, тогда противоположное событие Ā – замена детали на восстановленную.

Пусть из таблицы выбраны равномерно распределенные на интервале (0,1) случайные числа 0,52; 0,56; 0,09; 0,32 и 0,10.

Тогда при пяти испытаниях получим следующую последовательность реализации событий А, Ā А, А, А.

Моделирование дискретной случайной величины

Для того чтобы смоделировать (разыграть) дискретную случайную величину X, заданную законом распределения:

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

надо: 1) разбить интервал (0,1) на *n* частичных интервалов:

Δ_1 – (0;p_1),

Δ_2 – ($p_1; p_1 + p_2$),

…

Δ_n – ($p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}; 1$).

2) выбрать случайное число *rj*

Если случайное число *rj* попало в частичный интервал Δ_i, то разыгрываемая величина приняла возможное значение x_i.

Пример 2. Известно количество машин, приезжающих на мойку автомашин в течение последних 100 часов.

Число машин в час	Частота
4	5
5	11
6	16
7	23
8	45

Смоделировать прибытие автомашин в течение 6 часов.

Решение.

Построим закон распределения дискретной случайной величины *X*.

n=5+11+16+23+45=100.

X	4	5	6	7	8
p	0,05	0,11	0,16	0,23	0,45

Разобьем интервал (0,1) на пять частичных интервала:

Δ_1 – (0;0,05),

Δ_2 – (0,05;0,05+0,11)=(0,06;0,16),

Δ_3 – (0,16;0,32),

Δ_4 – (0,32;0,55),

Δ_5 – (0,55;1).

Выпишем из таблицы «Равномерно распределенные случайные числа», шесть случайных чисел, например, 0,32; 0,17; 0,9; 0,05; 0,97; 0,87 (пятая строка таблицы снизу).

Случайное число 0,32 принадлежит частичному интервалу Δ_3, поэтому разыгрываемая дискретная случайная величина приняла возможное значение x_3=6; случайное число 0,17 принадлежит частичному интервалу Δ_3, поэтому разыгрываемая дискретная случайная величина приняла возможное значение x_3=6.

Аналогично получим остальные возможные значения.

Итак, прибытие машин в течение шести часов:

6;6;8;4;8;8.

Моделирование полной группы событий

Пусть $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_n$, - полная группа событий, наступающих с вероятностями $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \dots, \mathrm{p}_n$ соответственно.

Моделирование полной группы несовместных событий можно свести к разыгрыванию дискретной случайной величины X со следующим законом распределения:

X	1	2	…	n
p	p_1	p_2	…	p_n

Правило: для того чтобы смоделировать испытание, в каждом из которых наступает одно из событий $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_n$ полной группы событий, наступающих с вероятностями $\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2, \dots, \mathrm{p}_n$ соответственно, достаточно разыграть дискретную случайную величину со следующим законом распределения:

X	1	2	…	n
p	p_1	p_2	…	p_n

Если в испытании величина X приняла возможное значение x_i., то наступило событие A_i.

Пример 3. Заданы вероятности четырех событий, образующих полную группу: p(A_1)=0,19; p(A_2)=0,21; p(A_3=0,34; p(A_4)=0,26. Смоделировать пять испытаний, в каждом из которых появляется одно из четырех заданных событий.

Решение. Построим закон распределения дискретной случайной величины *X*

X	1	2	3	4
p	0,19	0,21	0,34	0,26

Разобьем интервал (0,1) на четыре частичных интервала:

Δ_1 – (0;0,19),

Δ_2 – (0,19;0,40),

Δ_3 – (0,40;0,74),

Δ_4 – (0,74;1).

Выпишем из таблицы «Равномерно распределенные случайные числа», пять случайных чисел, например, 0,66; 0,31; 0,85; 0,63; 0,73.

Случайное число 0,66 принадлежит частичному интервалу Δ_3, поэтому разыгрываемая дискретная случайная величина приняла возможное значение x_3=3, следовательно появилось событие A_3; случайное число 0,31 принадлежит частичному интервалу Δ_2, поэтому разыгрываемая дискретная случайная величина приняла возможное значение x_2=2, значит появилось событие A_2.

Аналогично получим остальные возможные значения.

Итак, последовательность появления событий: A_3; A_2; A_4; A_3; A_3.

Моделирование независимых событий

Пусть независимые переменные A и B наступают с вероятностями p_{A} и p_{B}. Возможными исходами совместных испытаний будут события АВ, $\overline{\text{A}}$В, А$\overline{\text{B}}$, $\overline{\text{AB}}$ с вероятностями $p_{\text{A}}p_{\text{B}}, (1-p_{\text{B}})p_{\text{A}}, (1-p_{\text{A}})p_{\text{B}}, (1-p_{\text{B}})(1-p_{\text{A}})$.

В моделировании испытаний можно использовать два варианта расчетов:

1) последовательную проверку условия (1);

2) определение одного из исходов АВ, $\overline{\text{A}}$В, А$\overline{\text{B}}$, $\overline{\text{AB}}$ по жребию с соответствующими вероятностями.

Для первого варианта необходима пара чисел x_i, для выполнения условия (1). Во втором варианте необходимо одно число x_i, но сравнений может потребоваться больше.

Моделирование зависимых событий

Пусть события A и B являются зависимыми. События наступают с вероятностями p_{A} и p_{B}. *P(B/A)* – условная вероятность наступления события *B* при условии, что событие А произошло. Считается, что условная вероятность *P(B/A)* задана.

Из последовательности случайных чисел $\{x_i\}$ извлекается число x_m, удовлетворяющее $x_m < p_{\text{A}}$. Если это неравенство справедливо, то наступило событие *A*. дальше из совокупности чисел $\{x_i\}$ берется очередное число x_{m+1} и проверяется условие $x_{m+1} \leq$ *P(B/A)*. Возможный исход испытания являются AB или $A\bar{B}$.

Если условие x_m<p_{A} не выполняется, то наступило событие $\bar{A}$. Для испытания, связанного с событием *B*, необходимо определить вероятность:

$$P(B/A) = \frac{P(B)-P(A)P(\frac{B}{A})}{1-P(A)}$$

Выберем из совокупности $\{x_i\}$ число x_{m+1}, проверим справедливость неравенства $x_{m+1} \leq$ *P(B/A)*. В зависимости от того, выполняется оно или нет, получим исходы испытания $\overline{\text{A}}$В или АВ.

Моделирование непрерывной случайной величины

<u>Правило 1.</u> Для того чтобы смоделировать (разыграть) возможное значение x_i непрерывной случайной величины *X*, зная ее функцию распределения *F(x)*, надо выбрать случайное число r_i, приравнять его функции распределения и решить относительно x_i полученное уравнение:

$$F(x_i)= r_i.$$

<u>Правило 2.</u> Для того чтобы разыграть возможное значение x_i непрерывной случайной величины *X*, зная ее плотность распределения *f(x)*, надо выбрать случайное число r_i, и решить относительно x_i уравнение:

$$\int_{-\infty}^{x_i} f(\mathrm{x})dx = r_i$$

или уравнение

$$\int_a^{x_i} f(\mathrm{x})dx = r_i \qquad (2)$$

где *a* – наименьшее возможное значение *X*.

Пример 4. Разыграть четыре возможных значения непрерывной случайной величины X распределенной равномерно в интервале (4;14).

Решение. Случайная величина *X*, распределенная равномерно в интервале *(а,в)* имеет функцию распределения

$$F(x)=\frac{x-a}{b-a}, (a < x < b$$

В нашем случае,

F(x)=(x-4)/(14-4)=(x-4)/10

В соответствии с правилом 1, приравняем заданную функцию распределения случайному числу r_i.

Выпишем из таблицы четыре случайных числа, например 0,74; 0,02; 0,94; 0,36.

(x_1–4)/10=0,74, x_1 =11,4.

(x_2–4)/10=0,02, x_2 2=4,2.

$(x_3–4)/10=0,94$, x_3 =13,4.

$(x_4–4)/10=0,36$, x_4 =7,6.

Итак, разыгранные возможные значения:

11,4; 4,2; 13,4; 7,6.

Для ряда законов распределения, наиболее часто встречающихся, получено аналитическое решение уравнения (2), результаты которого приведены в таблице 1.

Таблица 1

Формулы для моделирования случайных величин

Закон распределения случайной величины	Плотность распределения	Формула для моделирования случайной величины
Экспоненциальный	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$	$x_i=-\frac{1}{\lambda}\ln r_i$
Вейбулла	$f(x)=\frac{a}{b}\left(\frac{x}{a}\right)^{a-1}e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^a}$	$x_i=b(-\ln r_i)^{\frac{1}{a}}$
Гамма-распределение	$f(x)=\frac{\lambda^n}{\Gamma(\eta)}e^{-\lambda x}x^{\eta-1}$	$x_i=-\frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{\eta}\ln(1-r_j)$
Нормальное	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	$x_i=\bar{x}+\sigma\left(\sum_{j=1}^{12}r_j-6\right)$

Параметры гамма-распределения вычислим по следующим формулам:

$$\lambda=\frac{\bar{x}}{\sigma^2};\ \eta=\frac{\overline{(x)}^2}{\sigma^2}$$

Пример 5. Для ПК интенсивность потока отказов λ=1,2 отказов/сутки. Определить последовательность значений продолжительности интервалов между отказами ПК. Известно, что эти интервалы описываются показательным законом распределения. Число реализаций равно 4.

Решение. Определим продолжительность интервала между отказами t_i, используя формулу для моделирования случайной величины, распределенной в соответствии с экспоненциальным законом:

$$t_i=x_i=-\frac{1}{\lambda}lnr_i$$

Значения r_i определим по таблице случайных чисел.

Допустим r_1=0,7182; r_2=0,4365; r_3=0,1548; r_4=0,8731.

Тогда

$$t_1 = -\frac{1}{1,2} ln0,7182 = 6,6 \text{ суток};$$

$$t_2 = -\frac{1}{1,2} ln0,4365 = 16,5 \text{ суток} ;$$

$$t_3 = -\frac{1}{1,2} ln0,1548 = 37,3 \text{ суток};$$

$$t_4 = -\frac{1}{1,2} ln0,8731 = 2,7 \text{ суток};$$