

53(075)
У912

№4358 – 2

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
Технологический институт
Федерального государственного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Южный федеральный университет»

Кафедра физики

**Учебно-методическое пособие и
контрольные задания по физике
Часть 2**

Для студентов всех инженерных специальностей
факультета безотрывных форм обучения



Таганрог 2010

УДК 53(075.8)

Составители: Г.В. Арзуманян, Л.Е. Гатько, А.В. Третьякова, В.А. Фатеева, Н.С. Чилингарова.

Учебно-методическое пособие и контрольные задания по физике. Ч. 2. – Таганрог: ТТИ ЮФУ, 2010. – 106 с.

В работе приводятся общие рекомендации по самостоятельному изучению дисциплины «Физика» и решению задач по данной дисциплине, программа курса «Физика» на третий учебный семестр, основные законы и соотношения, примеры решения задач, а также условия задач для выполнения контрольных работ по данной дисциплине, список вопросов для самоконтроля.

Работа предназначена для студентов факультета БФО, обучающихся по всем инженерным специальностям.

Табл. 12. Ил. 32. Библиогр.: 14 назв.

Рецензент: А.Б. Колпачев, канд. физ.-мат. наук, профессор кафедры физики ТТИ ЮФУ.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вашему вниманию предлагается учебно-методическое пособие по курсу «Физика» для студентов факультета БФО, обучающихся по всем инженерным специальностям ТТИ ЮФУ.

Дисциплина «Физика» совместно с дисциплиной «Высшая математика» составляет основу теоретической подготовки инженеров всех направлений и играет роль фундаментальной базы, без которой невозможна их дальнейшая успешная деятельность.

Основными целями дисциплины являются:

- формирование у студентов естественно-научного образа мышления;
- выработка умений и навыков по анализу реальных физических процессов.

Основными задачами курса «Физика» являются:

- обеспечение широкой теоретической подготовки студентов в области физики;
- получение студентами представлений об основных физических явлениях;
- усвоение студентами основных физических понятий и законов классической и современной физики, формирование представлений о границах применимости различных физических теорий;
- изучение приемов и приобретение навыков решения конкретных задач, помогающих студентам в дальнейшем решать инженерные задачи;
- формирование умения оценить степень достоверности результатов, полученных с помощью экспериментальных и теоретических методов исследований;
- получение начальных навыков проведения экспериментальных исследований в процессе выполнения лабораторных работ, ознакомление студентов с современными измерительными приборами, а также выработка навыков анализа реальных физических процессов.

В пособии приводится программа дисциплины «Физика» на третий семестр обучения, включающая следующие разделы: основы электростатики, постоянный ток, основы магнитостатики, электромагнетизм, механические и электромагнитные колебания. В пособии также представлены в виде соотношений основные законы теоретического курса, условия задач для выполнения контрольных работ по данной

дисциплине. Приводимые примеры решения задач облегчат освоение методики решения задач по соответствующей теме.

Авторы надеются, что данное методическое пособие поможет студентам в овладении основами данной дисциплины.

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Изучение студентом-заочником курса «Физика» складывается из следующих видов работ: самостоятельное изучение теоретического материала по учебным пособиям, работа в контакте с преподавателем, решение задач, выполнение контрольных и лабораторных работ, сдача зачетов и экзаменов.

Самостоятельное изучение дисциплины «Физика» по учебным пособиям является основным видом работы студента-заочника. При этом нужно иметь в виду следующее.

1. Изучать курс «Физика» необходимо систематически в течение всего учебного процесса. Знакомство с материалом дисциплины в сжатые сроки (например, перед экзаменом) не даёт глубоких и прочных знаний.

2. В качестве учебных пособий можно использовать учебники и методические пособия, указанные в списке основной и дополнительной литературы.

3. При чтении учебного пособия желательно составлять краткий конспект, в котором сжато описываются основные физические явления, приводятся определения физических величин и единицы их измерения, записываются формулировки законов и формулы, выражающие эти законы, по возможности делаются пояснительные чертежи и решаются типовые задачи.

4. Самостоятельную работу по изучению курса «Физика» желательно контролировать с помощью ответа на вопросы, предназначенные для самоконтроля (с. 96).

Решение задач является необходимым условием успешного изучения курса «Физика». Решение задач помогает успешно усвоить теоретический материал, понять смысл законов, закрепляет в памяти математические выражения законов, прививает умения и формирует навыки практического использования теоретических знаний. Следует отметить, что для решения задач по физике не существует универсального алгоритма. Тем не менее, *рекомендуется придерживаться сле-*

дующей схемы действий, которая зачастую помогает успешно решить задачу.

1. Попытаться предельно четко понять условие задачи и образно представить себе соответствующий физический процесс.

2. *Сделать рисунок или схему* (если это возможно), поясняющие содержание задачи, по возможности *указать все физические величины*, которые помогают понять физический процесс, описанный в задаче, и *которые могут быть пояснены на рисунке.*

3. Прежде чем начинать решать задачи, следует внимательно разобрать примеры решения задач по соответствующему разделу.

4. Записать после слова «Дано» все величины с числовыми значениями, которые используются при решении задачи, в том числе и величины, взятые из таблиц. Физические величины записываются в системе СИ с указанием их размерностей.

После слова «Найти» записать все величины или соотношения между ними, которые необходимо определить по условию задачи.

5. *Записать математические выражения законов*, которыми описываются процессы, указанные в задаче, и на которых базируется её решение. Привести *расшифровку всех буквенных обозначений*. Далее необходимо проанализировать полученные уравнения и попытаться мысленно представить себе последовательность действий по определению неизвестной величины.

6. Каждый этап решения задачи необходимо сопровождать *краткими и исчерпывающими пояснениями.*

7. Задачу необходимо решать *в общем виде*, т.е. выразить искомую величину в виде формулы, в которую входят величины, указанные после слова «Дано». Не допускается (за редкими исключениями) вычисление промежуточных величин. *Числовые значения* (без размерностей) *подставляются только в конечную формулу*, выражающую искомую неизвестную величину.

8. Произвести проверку размерности. Для этого подставить в конечную формулу наименование единиц всех входящих в неё величин и убедиться в правильности наименования искомой величины.

9. Оценить правдоподобность числового ответа. Иногда такая оценка помогает своевременно обнаружить ошибочность полученного результата и устранить её. Например, диэлектрическая проницаемость среды не может быть меньше единицы, давление газа, его объём –

величины только положительные и т.д.

Выполнение контрольной работы

В третьем семестре студенты выполняют две контрольные работы по следующим разделам:

– ***Основы электростатики. Постоянный ток (контрольная работа №3);***

– ***Основы магнитостатики. Механические и электромагнитные колебания (контрольная работа №4).***

При этом необходимо соблюдать следующие указания.

1. Контрольная работа выполняется только ***по условиям задач данного пособия***. Замена задач на другие, взятые из других изданий, не допускается.

2. Контрольная работа (***каждая!***) выполняется в обычной тетради (как правило, 18 с.) в клетку, на обложку которой наклеивается ***специальный (по содержанию и форме) бланк***, выдаваемый деканатом.

3. Контрольная работа выполняется ***шариковой ручкой черного или синего цвета***. На страницах тетради оставляются поля (2-3 см) для замечаний рецензента.

4. ***Оформление каждой задачи*** начинается с ***новой страницы***. Сначала без сокращений ***полностью переписывается условие задачи***. Далее выполняется её ***решение в соответствии с правилами***, изложенными ранее.

5. Если контрольная работа после рецензирования не была зачтена, студент ***обязан представить её на повторное рецензирование***. Повторная работа содержит те задачи, решения которых оказались неверными или к которым имелись существенные замечания. Она выполняется либо на свободных страницах тетради, где была выполнена незачтённая контрольная работа, либо в новой тетради. В последнем случае она представляется вместе с незачтённой работой. ***Правила оформления повторной работы не отличаются от правил оформления предыдущей работы. Не допускается делать исправления в том же месте, где были допущены ошибки.***

6. Если контрольная работа зачтена, но содержит замечания или ошибки, то эти недостатки необходимо устранить до экзамена, на практических занятиях. ***Зачтённые работы студенту не возвращаются.***

7. *Защита контрольной работы* проводится в виде беседы, в ходе которой *студент должен дать развернутое пояснение к любой задаче*, входящей в его контрольную работу.

8. Зачёт, выставленный по контрольной работе, действителен в течение *трёх учебных семестров*. Если за это время студент не сдал экзамен, то зачёт по контрольной работе аннулируется.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ НА ТРЕТИЙ СЕМЕСТР

Электричество и магнетизм

Электростатическое поле в вакууме

Электрический заряд и его свойства. Элементарный заряд. Закон сохранения электрического заряда. Закон Кулона. Электростатическое поле. Напряженность поля. Принцип суперпозиции полей. Силовые линии поля. Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме. Применение теоремы Гаусса к расчету полей. Работа по перемещению заряда в электрическом поле. Потенциал. Разность потенциалов. Циркуляция вектора напряженности электрического поля. Связь между напряженностью электрического поля и потенциалом.

Электростатическое поле в веществе. Энергия электрического поля

Проводники в электрическом поле. Поле внутри проводника и у его поверхности. Емкость. Конденсаторы. Соединение конденсаторов. Энергия системы зарядов. Энергия уединенного заряженного проводника. Энергия заряженного конденсатора. Энергия и объемная плотность энергии электрического поля.

Электростатическое поле в веществе. Свободные и связанные заряды. Электростатический диполь. Поле диполя. Электрический момент диполя. Диполь в однородном электрическом поле. Поляризация диэлектриков. Виды поляризации. Поляризованность (вектор поляризации). Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектриках, электрическое смещение. Диэлектрическая проницаемость. Поведение векторов \vec{E} и \vec{D} на границе двух диэлектриков.

Постоянный электрический ток. Законы постоянного тока

Электрический ток. Сила тока. Плотность тока. Уравнение непрерывности. Источники тока. Электродвижущая сила (ЭДС). Закон Ома для однородного и неоднородного участка цепи, для замкнутой цепи. Сопротивление проводника. Работа и мощность тока. Закон Джоуля – Ленца. Закон Ома и Джоуля – Ленца в интегральной и дифференциальной формах. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа.

Классическая теория электропроводности металлов. Объяснение

закона Ома и Джоуля – Ленца на основе классической теории электропроводности. Границы применимости законов Ома.

Механизм ионизации и рекомбинации. Потенциал ионизации. Несамоостоятельный и самостоятельный газы. Искровой, тлеющий и коронный разряды. Газоразрядная плазма.

Магнитостатическое поле в вакууме

Магнитное взаимодействие токов. Магнитное поле. Магнитная индукция. Силовые линии магнитного поля. Закон Био – Савара – Лапласа для элемента тока. Магнитное поле движущегося заряда. Принцип суперпозиции магнитных полей. Поток вектора индукции магнитного поля. Теорема Гаусса для индукции магнитного поля в вакууме. Сила Ампера. Магнитный момент контура с током. Контур с током в однородном и неоднородном магнитных полях. Работа перемещения проводника с током в магнитном поле. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции. Магнитное поле прямолинейного и кругового токов, соленоида, тороида.

Движение заряженных частиц в магнитостатическом поле

Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле. Сила Лоренца. Эффект Холла. Ускорение заряженных частиц. Масс-спектрометры.

Магнитостатическое поле в веществе

Намагничивание вещества. Вектор намагниченности. Магнитная восприимчивость. Напряженность магнитного поля. Магнитная проницаемость. Поток и циркуляция вектора напряженности магнитного поля. Поведение векторов \vec{B} и \vec{H} на границе двух магнетиков. Основные уравнения магнитостатики.

Диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики. Магнитомеханические и механомагнитные явления. Опыты Эйнштейна и де Хааса, Барнетта, Штерна и Герлаха. Поведение атома во внешнем магнитном поле. Орбитальные и спиновые магнитные моменты электрона. Ферромагнетизм. Домены. Основная кривая намагничивания. Магнитный гистерезис. Точка Кюри. Антиферромагнетики.

Электромагнетизм. Уравнения Максвелла

Явление электромагнитной индукции. Закон электромагнитной индукции Фарадея. Вихревое электрическое поле. Правило Ленца. Яв-

ление самоиндукции. Индуктивность. Энергия и плотность энергии магнитного поля. Взаимная индукция.

Ток смещения. Уравнения Максвелла. Материальные уравнения. Система уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной формах. Закон сохранения энергии электромагнитного поля.

Физика колебаний

Механические и электромагнитные колебания

Периодические процессы. Основные характеристики колебательного движения: амплитуда, фаза, период, частота. Свободные колебания. Квазиупругие силы. Гармонический осциллятор. Гармонические колебания. Пружинный, математический и физический маятники. Электрический колебательный контур. Уравнение гармонических колебаний. Энергия системы при гармонических колебаниях. Затухающие колебания. Вынужденные колебания. Основные характеристики затухающих и вынужденных колебаний. Резонанс (фазовый и амплитудный).

Переменный электрический ток. Катушка индуктивности и конденсатор в цепи переменного тока. Реактивное сопротивление.

Сложение одинаково направленных и взаимно перпендикулярных гармонических колебаний. Биения. Фигуры Лиссажу.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основной

1. Уколов А.С. Лекции по общему курсу физики. Ч.III. Стационарное электрическое поле: Учебное пособие. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 1999. – 137 с.
2. Уколов А.С. Лекции по общему курсу физики. Ч.IV. Стационарное магнитное поле: Учебное пособие. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000. – 97 с.
3. Уколов А.С. Лекции по общему курсу физики. Ч.V. Электромагнитное поле. Колебания и волны: Учебное пособие. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2001. – 129 с.
4. Методическое пособие к решению задач по курсу общей физики в системе РИТМ. Ч.1. /Г.В. Куповых, В.Г. Сапогин, А.В. Третьякова, В.А. Фатеева. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002. – 100 с.
5. Методическое пособие к решению задач по курсу общей физики в системе РИТМ. Ч.1. /Л.Е. Гатько, А.И. Матвеев, Ю.П. Пасичный. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002. – 163 с.
6. Савельев И.В. Курс общей физики: В 3 т.– М.: Наука, 2000. Т.1. – 350 с.
7. Савельев И.В. Курс общей физики: В 3 т.– М.: Наука, 2000. Т.2. – 345 с.
8. Трофимова Т.И. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1998. – 542 с.
9. Детлаф А.А., Яворский Б.М. Курс физики. – М.: Высшая школа, 2000. – 718 с.
10. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. – М.: Высшая школа, 1997. – 544 с.
11. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. – М.: Наука, 1990. – 400 с.

Дополнительный

1. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями. – М.: Мир, 1978. – 624 с.
2. Трофимова Т.И. Сборник задач по курсу физики: Учебное пособие для студентов вузов. – М.: Высшая школа, 1991. – 303 с.
3. Фирганг Е.В. Руководство к решению задач по курсу общей физики. – М.: Высшая школа, 1978. – 350 с.

РАЗДЕЛ 3. ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

3.1. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И СООТНОШЕНИЯ

Основы электростатики

1. Закон сохранения заряда: для любой электрически изолированной системы:

$$\sum_{i=1}^N Q_i = const,$$

где $\sum_{i=1}^N Q_i = const$ – алгебраическая сумма зарядов системы; N – число зарядов.

2. Закон Кулона:

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^3} \vec{r}_{1,2}; \quad |\vec{F}_{1,2}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1||q_2|}{\epsilon r^2},$$

где $\vec{F}_{1,2}$ – сила, действующая на данный заряд со стороны другого; $\vec{r} = \vec{r}_{1,2}$ – радиус-вектор, указывающий положение данного заряда, относительно другого; ϵ – диэлектрическая проницаемость среды; ϵ_0 – электрическая постоянная: $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

3. Напряженность электростатического поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q},$$

где \vec{F} – сила, действующая на пробный точечный заряд q , помещенный в данную точку поля.

4. Напряженность электростатического поля, создаваемого точечным зарядом q :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2} \frac{\vec{r}}{r}; \quad |\vec{E}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\epsilon r^2},$$

где r – радиус-вектор, проведенный от заряда q до точки, в которой определяется напряженность поля.

5. Работа сил электростатического поля при перемещении пробного заряда q_{np} из произвольной точки 1 поля в точку 2:

$$A_{1,2} = q_{np} \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}, d\vec{l} \rightrightarrows q_{np} \int_{(1)}^{(2)} E_l dl = - \left(W_2 - W_1 \right),$$

где E_l – проекция вектора \vec{E} на направление элементарного перемещения $d\vec{l}$; W – потенциальная энергия заряда в электростатическом поле.

5. Потенциальная энергия взаимодействия двух точечных зарядов:

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\epsilon r}.$$

6. Потенциал электростатического поля:

$$\varphi = \frac{W}{q_{np}},$$

где W – потенциальная энергия единичного положительного заряда (пробного заряда) q_{np} , помещенного в данную точку поля.

7. Потенциал электростатического поля точечного заряда на расстоянии r от заряда:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}.$$

8. Работа сил электростатического поля и разность потенциалов:

$$A_{1,2} = q_{np} \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}, d\vec{l} = q_{np} \int_{(1)}^{(2)} E_l dl = q_{np} (\varphi_1 - \varphi_2),$$

где E_l – проекция вектора \vec{E} на направление элементарного перемещения $d\vec{l}$.

9. Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\left(\frac{d\varphi}{dx}\vec{i} + \frac{d\varphi}{dy}\vec{j} + \frac{d\varphi}{dz}\vec{k}\right); \vec{E} = -grad\varphi,$$

где $\nabla = \frac{d}{dx}\vec{i} + \frac{d}{dy}\vec{j} + \frac{d}{dz}\vec{k}$ – оператор набла.

10. Разность потенциалов между точками 1 и 2 электростатического поля:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}, d\vec{l}.$$

11. Элементарный поток вектора напряженности электростатического поля:

$$d\Phi_E = \vec{E}, d\vec{S} = E dS \cos\alpha = E_n dS,$$

где $d\vec{S} = dS\vec{n}$ – вектор элемента поверхности; \vec{n} – единичный вектор

нормали к площадке dS ; α – угол между векторами \vec{E} и \vec{n} ; E_n – проекция \vec{E} на нормаль к площадке dS .

12. Теорема Гаусса для вектора напряженности электростатического поля в вакууме:

а) в случае системы точечных зарядов:

$$\Phi_E = \oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i,$$

где q_i – заряды внутри выбранной замкнутой поверхности S ;

б) в случае непрерывного распределения зарядов:

$$\Phi_E = \oint_{(S)} (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{(V)} \rho(x, y, z) dV,$$

где $\rho(x, y, z) = \frac{dq}{dV}$ – объёмная плотность заряда внутри выбранной замкнутой поверхности S , ограничивающей объём V ;

в) в дифференциальной форме:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_y}{dy} + \frac{dE_z}{dz} = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}.$$

13. Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля в интегральной форме и дифференциальной формах:

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = 0; \quad \text{rot} \vec{E} = 0.$$

14. Напряженность E и потенциал φ электростатического поля, создаваемого системой зарядов (принцип суперпозиции электростатических полей):

а) точечных зарядов:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i, \quad \varphi = \sum_{i=1}^N \varphi_i,$$

где \vec{E}_i , φ_i – напряженность и потенциал в данной точке поля, создаваемого i -м зарядом;

б) непрерывно распределенных зарядов:

$$\vec{E} = \int_{(V)} d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{(V)} \left(\frac{dQ}{r^3} \vec{r} \right), \quad \varphi = \int_{(V)} d\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{(V)} \left(\frac{dQ}{r^2} \vec{r} \right),$$

где $d\vec{E}$, $d\varphi$ – напряженность и потенциал в данной точке поля, создаваемого элементарным зарядом dQ ; V – область пространства распределенных зарядов.

15. Плотность заряда (линейная, поверхностная, объёмная):

$$\tau = \frac{dQ}{dl}, \quad \sigma = \frac{dQ}{dS}, \quad \rho = \frac{dQ}{dV}.$$

16. Напряженность и потенциал электростатического поля зарядов, обладающих симметрией распределения:

а) равномерно заряженной бесконечной плоскости:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} \vec{e}_x & \text{при } x > 0, \\ -\frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} \vec{e}_x & \text{при } x < 0; \end{cases} \quad \varphi = \begin{cases} \varphi_0 - \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} x & \text{при } x > 0, \\ \varphi_0 + \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0} x & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

где $\sigma = \frac{dq}{dS} = \text{const}$ – поверхностная плотность заряда плоскости;

\vec{e}_x – единичный орт-вектор оси координат ОХ, перпендикулярной заряженной плоскости; ε – диэлектрическая проницаемость среды; $\varphi_0 = \text{const}$ – потенциал в точке с координатой $x = x_0$;

б) двух одинаково равномерно заряженных, но противоположно по знаку, параллельных бесконечных плоскостей:

$$E = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, x > d, \\ \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} & \text{при } 0 < x < d; \end{cases} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0} d,$$

где d – расстояние между плоскостями; $(\varphi_1 - \varphi_2)$ – разность потенциалов между плоскостями;

в) проводящей заряженной сферы радиусом R :

$$E = \begin{cases} 0 & \text{при } r \leq R, \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{\varepsilon r^2} & \text{при } r > R; \end{cases} \quad \varphi = \begin{cases} \varphi_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R} & \text{при } 0 \leq r < R, \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r} & \text{при } r \geq R, \end{cases}$$

где Q – заряд сферы;

г) равномерно заряженного по объёму шара радиусом R :

$$E = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r & \text{при } 0 \leq r < R, \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{\rho}{3\varepsilon\varepsilon_0} \frac{R^3}{r^2} & \text{при } r \geq R; \end{cases} \quad \varphi = \begin{cases} \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right) & \text{при } 0 \leq r < R, \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r} & \text{при } r \geq R, \end{cases}$$

где Q – заряд сферы; $\rho = \frac{dq}{dV} = const$ – объёмная плотность заряда шара;

д) поле равномерно заряженной бесконечной нити:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}; \quad \varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) + \varphi_0,$$

где $\varphi_0 = const$ – потенциал поля на произвольном расстоянии $r = r_0$ от нити;

е) поле бесконечной равномерно заряженной цилиндрической поверхности радиусом R :

$$E = \begin{cases} 0 & \text{при } r < R, \\ \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon r} & \text{при } r \geq R; \end{cases} \quad \varphi = \begin{cases} \varphi_0 & \text{при } r < R, \\ \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{\epsilon r} + \varphi_0 & \text{при } r \geq R, \end{cases}$$

где $\varphi_0 = const$ – значение потенциала на заряженной цилиндрической поверхности при $r = R$; $\tau = \frac{dq}{dl}$ и $\sigma = \frac{\tau}{2\pi R}$ – соответственно линейная и поверхностная плотности заряда цилиндра;

ж) поле бесконечного равномерно заряженного по объёму цилиндра радиусом R :

$$E = \begin{cases} \frac{\rho}{2\epsilon_0} r = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 R^2} r & \text{при } r < R, \\ \frac{\rho}{2\epsilon\epsilon_0} \frac{R^2}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0 r} & \text{при } r \geq R; \end{cases}$$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\rho}{4\epsilon_0} (R^2 - r^2) + \varphi_0 = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + \varphi_0 & \text{при } r < R, \\ \frac{\rho}{2\epsilon\epsilon_0} R^2 \ln \frac{R}{r} + \varphi_0 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon\epsilon_0} \ln \frac{R}{r} + \varphi_0 & \text{при } r \geq R, \end{cases}$$

где $\varphi_0 = const$ – потенциал на поверхности объёмно заряженного цилиндра ($r = R$).

Электростатическое поле в диэлектриках

1. Дипольный (электрический) момент:

$$\vec{p} = q\vec{l},$$

где \vec{l} – плечо диполя (вектор, направленный по оси диполя от $-q$ к $+q$, модуль которого равен расстоянию между зарядами диполя).

2. Электрическое поле диполя ($r \gg l$):

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta}, \quad \varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ql\cos\theta}{r^2},$$

где θ – угол между вектором электрического момента диполя \vec{l} и радиус-вектором \vec{r} , проведённый из начала координат (середины оси диполя) в точку наблюдения.

3. Механический момент сил, действующий на диполь в однородном электростатическом поле:

$$\vec{M} = [\vec{p}, \vec{E}], \quad |\vec{M}| = |\vec{p}||\vec{E}|\sin(\hat{\vec{p}}, \vec{E}).$$

4. Вектор поляризованности диэлектрика:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow A} \frac{\sum \vec{p}}{\Delta V},$$

где $\sum_{\Delta V} \vec{p}$ – сумма дипольных моментов молекул, заключённых внутри физически малого объёма ΔV в окрестности данной точки А.

5. Связь между поляризованностью диэлектрика и напряжённостью электростатического поля в диэлектрике:

$$\vec{P} = \chi\epsilon_0\vec{E},$$

где χ – диэлектрическая восприимчивость (безразмерная положительная величина).

6. Поверхностная плотность связанных зарядов σ' :

$$\sigma' = P \cos\alpha = P_n,$$

где P_n – нормальная составляющая вектора поляризованности диэлектрика в данной точке поверхности.

7. Теорема Гаусса в интегральной форме для вектора поляризованности диэлектрика:

$$\oint_{(S)} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{(V)} \rho' dV,$$

где ρ' – объёмная плотность «избыточных» связанных зарядов внутри замкнутой поверхности S .

8. Вектор электрического смещения:

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}.$$

9. Теорема Гаусса для вектора электрического смещения:

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_0 dV,$$

где ρ_0 – объёмная плотность свободных зарядов, заключённых внутри замкнутой поверхности S .

10. Напряженность электростатического поля вблизи поверхности проводника:

$$E_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Проводники в электростатическом поле

1. Электроёмкость проводника:

$$C = \frac{q}{\varphi},$$

где q и φ – соответственно заряд и потенциал уединенного проводника.

2. Электроёмкость конденсатора:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

где q – заряд конденсатора; $\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов между его пластинами.

3. Электроёмкость уединенного сферического проводника:

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R,$$

где R – радиус сферы.

4. Ёмкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d},$$

где S – площадь пластин конденсатора; d – расстояние между ними.

5. Ёмкость сферического конденсатора:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1},$$

где R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) – радиусы концентрических металлических сфер.

6. Ёмкость цилиндрического конденсатора:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln(R_2 / R_1)},$$

где R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) – радиусы металлических цилиндров; l – длина цилиндров ($l \gg (R_2 - R_1)$).

7. Соединение конденсаторов:

а) последовательное:

$$U = \sum_i U_i; \quad Q = Q_1 = Q_2 = \dots = Q_N = \text{const}; \quad \frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i};$$

б) параллельное:

$$U = U_1 = U_2 = \dots = U_N = \text{const}; \quad Q = \sum_i Q_i; \quad C = \sum_i C_i.$$

8. Энергия системы точечных зарядов:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i,$$

где $\varphi_i = \sum_{\substack{i,k=1 \\ i \neq k}}^N \varphi_{i,k}$ – потенциал результирующего поля, созданного всеми

зарядами системы, кроме q_i , в той точке, где находится заряд q_i .

9. Энергия уединенного заряженного проводника:

$$W = \frac{q\varphi}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2},$$

где q – избыточный заряд проводника; φ – его потенциал; C – ёмкость проводника.

10. Энергия заряженного конденсатора:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2},$$

где q – заряд конденсатора; $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ – разность потенциалов между его пластинами (численно равно напряжению); C – электроёмкость конденсатора.

11. Объёмная плотность энергии электрического поля:

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{\mathbf{E}, \vec{D}}{2}.$$

Постоянный электрический ток

1. Сила тока:

$$i = \frac{dq}{dt} \text{ – мгновенное значение тока;}$$

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \text{ – среднее значение тока,}$$

где q – заряд, перенесённый через поверхность S за время t .

2. Плотность тока в проводнике:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}; \vec{j} = q_0 n \langle \vec{u} \rangle,$$

где dS_{\perp} – площадь элементарной поверхности, перпендикулярной направлению переноса заряда; q_0 – заряд носителей тока; n – их концентрация; $\langle \vec{u} \rangle$ – средняя скорость упорядоченного движения зарядов в проводнике.

3. Поток вектора плотности тока:

$$\Phi_j = \int_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = I.$$

4. Работа сторонних сил \vec{F}^* , при переносе носителя тока из точки 1 в точку 2:

$$A_{1,2}^* = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}^* \cdot d\vec{l} = q_0 \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}^* \cdot d\vec{l},$$

где q_0 – заряд носителя тока; $\vec{E}^* = \vec{F}^* / q_0$ – напряженность поля сторонних сил.

5. Электродвижущая сила (ЭДС): $\mathcal{E}_{1,2} = \frac{A_{1,2}^*}{q_0} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}^* \cdot d\vec{l}$.

6. Падение напряжения (напряжение):

$$U_{1,2} = \frac{A_{1,2}}{q_0} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{1,2},$$

где $A_{1,2} = A_{1,2}^{(эл)} + A_{1,2}^*$ – полная работа, совершаемая как электростатическими $A_{1,2}^{(эл)}$, так и сторонними силами $A_{1,2}^*$.

7. Сопротивление однородного изотропного проводника:

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

где ρ – удельное электрическое сопротивление материала проводника; l – его длина; S – площадь поперечного сечения проводника.

8. Закон Ома для линейного участка цепи:

а) неоднородный участок цепи:

$$I = \frac{U_{1,2}}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E}_{1,2}}{R};$$

б) однородный участок цепи ($\mathcal{E}_{1,2} = 0$):

$$I = \frac{U_{1,2}}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R};$$

в) замкнутый участок цепи ($\varphi_1 = \varphi_2$):

$$I = \frac{U_{1,2}}{R+r} = \frac{\mathcal{E}_{12}}{R+r},$$

где r – внутреннее сопротивление источника; R – сопротивление внешнего (по отношению к источнику) участка замкнутой цепи.

9. Закон Ома в дифференциальной форме:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} (\vec{\mathcal{E}} + \vec{E}^*) = \sigma (\vec{\mathcal{E}} + \vec{E}^*),$$

где σ – удельная электропроводимость; \vec{E} – напряженность электростатического поля; \vec{E}^* – напряженность поля сторонних сил.

10. Работа и мощность тока:

$$\delta A_{1,2} = IU_{1,2}dt = I^2 R_{1,2}dt = \frac{U_{1,2}^2}{R_{1,2}} dt; \quad P_{1,2} = \frac{\delta A_{1,2}}{dt}.$$

11. Удельная мощность тока: $P_{\text{уд}} = \frac{dP}{dV} = \frac{\delta A}{dVdt} = \sigma (\vec{\mathcal{E}} + \vec{E}^*)^2$.

12. Закон Джоуля – Ленца: $A_{1,2} = Q$.

13. Соединение N проводников:

а) последовательное:

$$U = \sum_i U_i; \quad I = I_1 = I_2 = \dots = I_N = \text{const}; \quad R = \sum_i R_i;$$

б) параллельное:

$$U = U_1 = U_2 = \dots = U_N = \text{const}; \quad I = \sum_i I_i; \quad \frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}.$$

14. Правила Кирхгофа.

Первое правило: алгебраическая сумма токов в любом узле (точка соединения трех или более проводников) разветвленной цепи равна нулю:

$$\sum_k I_k = 0.$$

Второе правило: алгебраическая сумма падений напряжений для любого замкнутого контура, выделенного в сложной цепи, равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре:

$$\sum_k I_k R_k = \sum_i \mathcal{E}_i.$$

3.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Три точечных заряда $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1,0$ нКл расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой заряд Q_4 нужно поместить в центре треугольника (рис 1), чтобы указанная система зарядов находилась в равновесии?

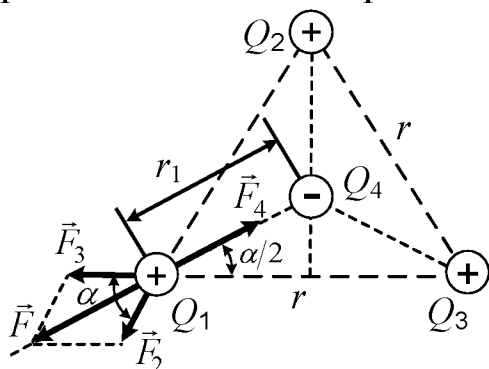


Рис. 1

Дано: $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1,0 \cdot 10^{-9}$ Кл;
 $\alpha = 60^\circ$.

Найти: Q_4 .

Решение. По условию задачи три одинаковых заряда $Q_1 = Q_2 = Q_3$ расположены в вершинах **равностороннего треугольника**. Поэтому любой заряд Q_4 , помещенный в центр треугольника, будет находиться в равновесии, так как сумма

сил, действующих на неё, равна нулю. Следовательно, для решения задачи необходимо определить условие, при котором какой-нибудь один из трех зарядов $Q_1 = Q_2 = Q_3$ (они эквивалентны), например Q_1 , находится в равновесии. Равновесие заряда Q_1 может быть обеспечено, если заряд Q_4 будет **отрицательный**.

Таким образом, условие равновесия заряда Q_1 определяется следующим уравнением (см. рис. 1):

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0, \quad (1)$$

где $\vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ – силы, с которыми на заряд Q_1 действуют заряды Q_2, Q_3, Q_4 .

Проектируя уравнение (1) на оси координат, получаем:

$$\begin{cases} F_3 \sin \alpha/2 - F_2 \sin \alpha/2 = 0, \\ F_3 \cos \alpha/2 + F_2 \cos \alpha/2 - F_4 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Первое уравнение в (2), в силу симметрии расположения зарядов, являлось изначально очевидным.

Из закона Кулона (с учетом условия задачи $Q_1 = Q_2 = Q_3$) имеем:

$$F_3 = F_2 = \frac{Q_1^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}; \quad F_4 = \frac{Q_1 |Q_4|}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}.$$

Подставляя эти соотношения во второе уравнение системы (2),

получаем: $\frac{Q_1 |Q_4|}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} = 2 \frac{Q_1^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha/2$, откуда:

$$|Q_4| = 2 \frac{Q_1 r_1^2}{r^2} \cos(\alpha/2). \quad (4)$$

Из геометрических построений в равностороннем треугольнике следует, что

$$r_1 = \frac{r/2}{\cos(\alpha/2)} = \frac{r}{2 \cos(\alpha/2)}.$$

С учетом этого, а также, что заряд Q_4 отрицательный, формула (4) примет вид

$$Q_4 = -\frac{Q_1}{2 \cos(\alpha/2)}.$$

Вычисление:

$$Q_4 = -\frac{10^{-9}}{\sqrt{3}} = -0,577 \cdot 10^{-9} = -0,577 \text{ нКл}.$$

Следует отметить, что равновесие системы зарядов будет неустойчивым.

Задача 2. Два одинаковых маленьких шарика с равными зарядами, подвешенных на тонких нитях одинаковой длины, находятся в керосине. Какова должна быть плотность шариков, чтобы угол расхождения нитей в воздухе и в керосине был один и тот же? Плотность керосина $\rho_k = 0,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; относительная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 2$.

Дано: $\rho_0 = 0,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\varepsilon = 2$.

Найти: Q_4 .

Решение. Рассмотрим взаимодействие между двумя шариками в воздухе (рис.2, а). Система шариков симметрична, поэтому достаточно рассмотреть силы, действующие на один из шариков. На шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила Кулона \vec{F} и сила натяжения нити \vec{T} . Так как шарик находится в равновесии, то

$$m\vec{g} + \vec{F} + \vec{T} = 0. \quad (1)$$

Проектируя уравнение (1) на оси X и Y, получим соответственно:

$$OX: F - T \sin \alpha = 0;$$

$$OY: mg - T \cos \alpha = 0.$$

Исключая T из этих выражений, получим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{mg}. \quad (2)$$

Рассмотрим взаимодействие между шариками в керосине (рис. 2, б). В этом случае дополнительно

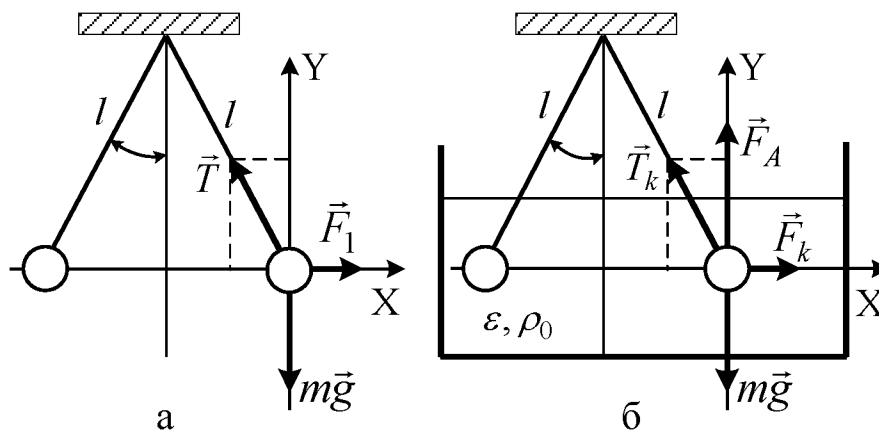


Рис. 2

смотрим действие двумя шариками в керосине (см. рис. 2, б). На шарик действует ещё сила

Архимеда \vec{F}_A . Поэтому условие равновесия в этом случае принимает вид

$$m\vec{g} + \vec{F}_2 + \vec{T} + \vec{F}_A = 0.$$

Поступая аналогично первому случаю и учитывая, что угол расхождения нитей в воздухе и в керосине один и тот же, получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_2}{mg - F_2}, \quad (3)$$

где F_k – сила кулоновского взаимодействия зарядов в керосине.

Выталкивающая сила Архимеда:

$$F_A = \rho_0 V g = \frac{\rho_0 m g}{\rho},$$

где $V = m/\rho$ – объём шарика, ρ – плотность шарика.

Подставляя это выражение в уравнение (3), получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_2}{mg \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)}. \quad (4)$$

Приравняв правые стороны уравнений (2) и (4) и проведя простые преобразования, получаем:

$$1 - \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{F_2}{F_1}. \quad (5)$$

Так как сила взаимодействия зарядов в диэлектрике уменьшается в ε раз $\left(\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{\varepsilon}\right)$, то выражение (5) представимо в виде $1 - \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{1}{\varepsilon}$. Отсюда

окончательно получаем выражение для плотности шарика: $\rho = \frac{\varepsilon \rho_0}{\varepsilon - 1}$.

Вычисление. Подставляя численные значения физических величин в конечное соотношение, получим:

$$\rho = \frac{2 \cdot 0,8 \cdot 10^3}{2-1} = 1,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Задача 3. На тонком стержне длиной $l = 20$ см находится равномерно распределенный электрический заряд. На продолжении оси стержня на расстоянии $a = 10$ см от ближайшего конца находится точечный заряд $Q = 40$ нКл, который взаимодействует со стержнем с силой $F = 6$ мкН. Определить линейную плотность τ заряда на стержне.

Дано: $l = 0,20$ м, $a = 0,10$ м, $Q = 40 \cdot 10^{-9}$ Кл, $F = 6 \cdot 10^{-6}$ Н.

Найти: τ .

Решение. Сила взаимодействия F заряженного стержня с точечным зарядом Q зависит от линейной плотности τ заряда на стержне. Зная силу F , можно определить τ . Заряженный стержень не является точечным, поэтому закон Кулона непосредственно применять нельзя. В таких случаях поступают следующим образом. Выделим на стержне (рис.3) малый участок dr с зарядом $dQ = \tau dr$.

Этот заряд можно рассматривать как точечный. Тогда согласно закону Кулона имеем:

$$dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q\tau dr}{r^2}.$$

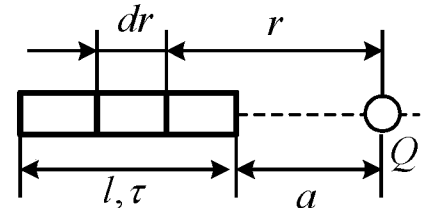


Рис. 3

Интегрируя это выражение в пределах от a до $a + l$, получаем:

$$F = \frac{Q\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_a^{a+l} \frac{dr}{r^2} = -\frac{Q\tau}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a+l} - \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ql\tau}{a(a+l)},$$

откуда

$$\tau = \frac{4\pi\epsilon_0 a(a+l) F}{Ql}.$$

Вычисление:

$$\tau = \frac{0,1 \cdot 0,3 \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^9 \cdot 40 \cdot 10^{-9} \cdot 0,2} = 2,5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м} = 2,5 \text{ нКл/м}.$$

Задача 4. Электростатическое поле создаётся бесконечно длинным равномерно заряженным с линейной плотностью $\tau = 15$ нКл/м цилиндром радиусом $R = 7$ мм. Определить: 1) напряженность поля E в

точках, лежащих от оси цилиндра на расстояниях $r_1 = 5$ мм и $r_2 = 1$ см; 2) разность потенциалов между двумя точками этого поля, отстоящими соответственно на расстояниях $h_3 = 1$ см и $h_4 = 2$ см от поверхности цилиндра.

Дано: $R = 7 \cdot 10^{-3}$ м, $\tau = 15 \cdot 10^{-9}$ Кл/м, $r_1 = 5 \cdot 10^{-3}$ м, $r_2 = 1 \cdot 10^{-2}$ м, $h_3 = 1 \cdot 10^{-2}$ м, $h_4 = 2 \cdot 10^{-2}$ м.

Найти: $E_1(r_1)$, $E_2(r_2)$, $\varphi_3(r_3) - \varphi_4(r_4)$.

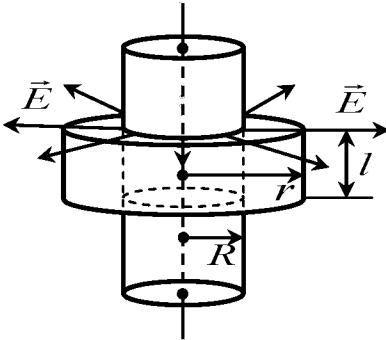


Рис. 4

Решение. Заряженная цилиндрическая поверхность разбивает пространство на две области: I) $r < R$; II) $r \geq R$ (рис. 4). С другой стороны, из соображений симметрии следует, что напряженность поля \vec{E} , создаваемого цилиндром, во всей области пространства направлена вдоль радиальных прямых, а модуль вектора \vec{E} зависит только от расстояния r от оси цилиндра. Поэтому в качестве замкнутой поверхности (гауссовой поверхности) выберем коаксиальный цилиндр радиусом r и высотой l . В этом случае линии напряженности пересекают только боковую поверхность выбранного цилиндра.

Согласно теореме Гаусса имеем:

$$\Phi_E = \oint_{(S_{\text{бок}})} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \Phi_{E_{\text{бок}}} = \int_{(S_{\text{бок}})} \vec{E}_n \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i.$$

I) $r < R$. Так как $r < R$, то рассматриваемая гауссова поверхность зарядов q_i внутри не содержит. Следовательно, в этой области $E_I = 0$.

Так как по условию задачи $r_1 < R$, то $E_1(r_1) = 0$.

II) $r \geq R$. Поток вектора \vec{E}_{II} сквозь торцы коаксиального цилиндра радиуса r равен нулю, так как торцы параллельны линиям напряженности. По теореме Гаусса, для второй области имеем:

$$\Phi_E = \Phi_{E_{\text{бок}}} = \int_{(S_{\text{бок}})} \vec{E}_{II} \cdot d\vec{S} = 2\pi r l E_{II} = \frac{\tau l}{\epsilon_0},$$

где $\tau = q/l$ – линейная плотность заряда.

Отсюда получаем выражение для напряженности электростатического поля во второй области ($r \geq R$):

$$E_{II} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r}. \quad (1)$$

Разность потенциалов между точками r_3 и r_4 электростатического поля найдем из выражения

$$\varphi_3 - \varphi_4 = \int_{(3)}^{(4)} \vec{E}_{II} \cdot d\vec{l}$$

Подставим сюда уравнение (1) для напряженности поля и проинтегрируем:

$$\varphi_3 - \varphi_4 = \int_{(r_3)}^{(r_4)} E_{II} dr = \int_{(R+h_3)}^{(R+h_4)} \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R+h_4}{R+h_3}. \quad (2)$$

Вычисления. Подставляя числовые данные в выражения (1) и (2), получим:

$$E_1(r_1) = 0; \quad E_2(r_2) = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \frac{15 \cdot 10^{-9}}{10^{-2}} = 27 \text{ кВ/м.}$$

$$\varphi_3 - \varphi_4 = \frac{15 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \ln \left(\frac{27 \cdot 10^{-3}}{17 \cdot 10^{-3}} \right) = 125 \text{ В.}$$

Задача 5. Определить ускоряющую разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, которую должен пройти в электрическом поле электрон, обладающий скоростью $v_1 = 2 \cdot 10^6$ м/с, чтобы его скорость возросла в $n = 3$ раза.

Дано: $v_1 = 2 \cdot 10^6$ м/с, $v_2 = nv_1$, $n = 3$, $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Найти: $\varphi_1 - \varphi_2$.

Решение. Согласно теореме о кинетической энергии, работа сил электростатического поля равна изменению кинетической энергии электрона

$$A = E_{k2} - E_{k1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (1)$$

С другой стороны, работа сил поля равна

$$A = e(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (2)$$

Приравняв правые части равенств (1) и (2) и учитывая, что $v_2 = nv_1$, получим:

$$e(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} (n^2 - 1).$$

Отсюда искомая разность потенциалов равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{mv_1^2}{2e} (n^2 - 1).$$

Вычисление. Подставляя в это выражение числовые данные, найдем числовое значение разности потенциалов:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 4 \cdot 10^{12} \cdot (-1)}{2 \cdot (1,6 \cdot 10^{-19})} = -91 \text{ В.}$$

Задача 6. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено двумя слоями диэлектриков: стекла толщиной $d_1 = 0,1$ см и слоя парафина толщиной $d_2 = 0,2$ см (рис. 5,а). Разность потенциалов между обкладками $U = 200$ В. Определить:

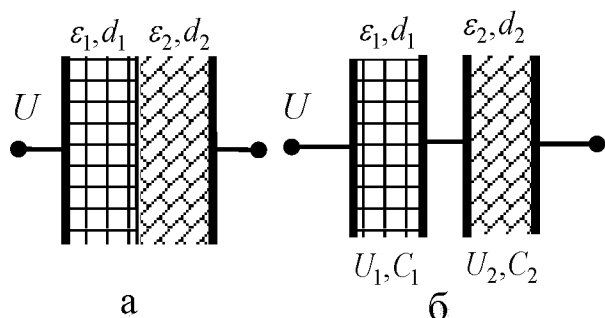


Рис. 5

1) падение потенциала в каждом из слоёв и напряженность поля в каждом слое диэлектрика; 2) ёмкость такого конденсатора; 3) поверхностную плотность связанных зарядов на диэлектриках. Площадь пластин конденсатора равна $S = 100 \text{ см}^2$.

Дано: $d_1 = 0,1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $d_2 = 0,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $U = 200 \text{ В}$, $S = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$, $\varepsilon_1 = 6$, $\varepsilon_2 = 2$.

Найти: U_1, E_1, U_2, E_2 .

Решение.

1. Разность потенциалов между пластинами конденсатора равна сумме напряжений на слоях диэлектрика (рис. 5,б)

$$U = U_1 + U_2. \quad (1)$$

Учитывая, что поле в пределах каждого из диэлектрических слоёв однородно, выражение (1) можно представить в виде

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2, \quad (2)$$

где E_1 и E_2 – напряженность поля в диэлектриках; d_1 и d_2 – толщина диэлектриков.

С другой стороны, силовые линии поля перпендикулярны границе раздела диэлектриков. Следовательно, электрическое смещение D в обоих слоях диэлектрика одинаково:

$$D = D_{n1} = D_{n2} = D_1 = D_2 = \varepsilon_1 \varepsilon_0 E_1 = \varepsilon_2 \varepsilon_0 E_2, \quad (3)$$

где D_{n1}, D_{n2} – нормальные составляющие электрического смещения в диэлектрических слоях; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – диэлектрические проницаемости диэлектриков.

Решая совместно уравнения (2) и (3), найдем напряженности поля в диэлектрических слоях:

$$E_1 = \frac{\varepsilon_2 U}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}, \quad E_2 = \frac{\varepsilon_1 U}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}. \quad (4)$$

Падение потенциала в каждом из слоёв найдем на основании выражения (2):

$$U_1 = E_1 d_1 = \frac{\varepsilon_2 d_1}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2} U, \quad U_2 = \frac{\varepsilon_1 d_2}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2} U. \quad (5)$$

2. Рассматриваемый конденсатор можно представить как два последовательно соединенных конденсатора (рис.5,б). Полная ёмкость конденсатора в этом случае будет равна

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2},$$

где $C_1 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0 S}{d_1}$ и $C_2 = \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0 S}{d_2}$ – ёмкость конденсатора с соответствующим диэлектриком.

С учетом вышесказанного, искомая ёмкость конденсатора равна

$$C = \varepsilon_0 S \left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2} \right)^{-1}. \quad (6)$$

3. Так как силовые линии электрического поля перпендикулярны границе раздела диэлектрика, то поверхностная плотность связанных зарядов равна модулю вектора поляризованности диэлектрика $\sigma' = P_n = P$. Поляризованность диэлектрика P и напряжённость E электростатического поля в диэлектрике связаны соотношением $P = \chi \varepsilon_0 E$, где $\chi = \varepsilon - 1$ – диэлектрическая восприимчивость диэлектрика, связанная с диэлектрической проницаемостью соотношением $\varepsilon = 1 + \chi$. Таким образом, мы получаем следующее соотношение для поверхностной плотности связанных зарядов:

$$\sigma' = P = \chi \varepsilon_0 E = (\varepsilon - 1) \varepsilon_0 E.$$

Подставляя в это уравнение выражения (4) для напряженности поля, окончательно получим:

$$\sigma'_1 = \frac{(\varepsilon_2 - 1) \varepsilon_2 \varepsilon_0 U}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}, \quad \sigma'_2 = \frac{(\varepsilon_1 - 1) \varepsilon_1 \varepsilon_0 U}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2}. \quad (7)$$

Вычисления. Подставляя числовые данные задачи в уравнения (4), (5) и (7), получаем:

$$E_1 = 28,6 \text{ кВ}; \quad E_2 = 85,7 \text{ кВ}. \quad U_1 = 28,6 \text{ В}; \quad U_2 = 171,4 \text{ В}.$$

$$\sigma'_1 = 253 \text{ нКл/м}^2; \quad \sigma'_2 = 3,79 \text{ мкКл/м}^2.$$

Задача 7. Батарея элементов, замкнутая на сопротивление $R_1 = 3 \text{ Ом}$, даёт силу тока $I_1 = 2,5 \text{ А}$. Та же батарея, замкнутая на сопротивление $R_2 = 9 \text{ Ом}$, даёт силу тока $I_2 = 1 \text{ А}$. Найти потери мощности P внутри батареи элементов и КПД батареи η в обоих случаях.

Дано: $R_1 = 3 \text{ Ом}$, $I_1 = 2,5 \text{ А}$, $R_2 = 9 \text{ Ом}$, $I_2 = 1 \text{ А}$.

Найти: P_{r1} , η_1 , P_{r2} , η_2 .

Решение. Для нахождения потери мощности $P_r = I^2 r$ внутри батареи элементов необходимо знать внутреннее сопротивление батареи r . Для этого воспользуемся законом Ома для полной цепи.

$$\text{В первом случае: } I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r}, \text{ а во втором случае } - I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + r}.$$

Решая совместно эти два равенства, получим выражение для внутреннего сопротивления источника и его ЭДС:

$$r = \frac{I_1 R_1 - I_2 R_2}{I_2 - I_1}, \quad (1)$$

$$\mathcal{E} = \frac{I_1 I_2 (R_1 - R_2)}{I_2 - I_1}.$$

С учетом выражения (1), мощность, которая теряется внутри источника, в первом случае равна

$$P_{r1} = I_1^2 r = \frac{I_1^2 (I_1 R_1 - I_2 R_2)}{I_2 - I_1}, \quad (2)$$

во втором случае:

$$P_{r2} = I_2^2 r = \frac{I_2^2 (I_1 R_1 - I_2 R_2)}{I_2 - I_1}. \quad (3)$$

Согласно определению, КПД источника равен отношению полезной работы источника (мощности, выделяемой во внешней цепи $P_R = I^2 R$) к полной работе источника (мощности, выделяемой во внешней и внутренней цепи $P = I^2 (R + r)$): $\eta = \frac{R}{R + r}$. С учетом этого соотношения, по-

лучаем выражения для КПД источника в первом случае:

$$\eta_1 = \frac{R_1(I_2 - I_1)}{I_2(R_1 - R_2)} \quad (4)$$

во втором случае:

$$\eta_2 = \frac{R_2(I_2 - I_1)}{I_1(R_1 - R_2)} \quad (5)$$

Вычисления. Подставляя числовые данные задачи в уравнения (3), (4) и (5), получаем:

$$P_{r1} = \frac{2,5^2 \cdot (0,5 \cdot 3 - 1 \cdot 9)}{1 - 2,5} = 6,25 \text{ Вт}; \quad P_{r2} = \frac{1^2 \cdot (0,5 \cdot 3 - 1 \cdot 9)}{1 - 2,5} = 1 \text{ Вт};$$

$$\eta_1 = \frac{3 \cdot (-2,5)}{1 \cdot (-9)} = 0,75; \quad \eta_2 = \frac{9 \cdot (-2,5)}{2,5 \cdot (-9)} = 0,9.$$

Задача 8. Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 50$ Ом равномерно растёт от $I_1 = 0$ до $I_2 = 3$ А за время $\tau = 6$ с. Определить выделившееся в проводнике за это время количество теплоты.

Дано: $R = 50$ Ом, $I_1 = 0$, $I_2 = 3$ А, $\tau = 6$ с.

Найти: Q .

Решение. Согласно закону Джоуля – Ленца, для бесконечно малого промежутка времени имеем

$$\delta Q = I^2 R dt. \quad (1)$$

По условию задачи сила тока равномерно растёт, т.е. $I = kt$, где коэффициент пропорциональности k равен отношению приращения силы тока к интервалу времени, за который произошло это приращение:

$$k = \frac{I_2 - I_1}{\tau} = \text{const}.$$

С учетом этого, закон Джоуля – Ленца (1) можно представить в виде $\delta Q = k^2 R t^2 dt$. Проинтегрировав это выражение и подставив выражение для k , найдем искомое количество теплоты:

$$Q = \int_0^{\tau} k^2 R t^2 dt = k^2 R \int_0^{\tau} t^2 dt = k^2 R \left(\frac{t^3}{3} \Big|_0^{\tau} \right) = \frac{1}{3} (I_2 - I_1)^2 R \tau.$$

Вычисление. Подставляя числовые данные в это выражение, находим:

$$Q = \frac{1}{3} (-0,2) \cdot 50 \cdot 6 = 900 \text{ Дж.}$$

Задача 9. Три гальванических элемента, с электродвижущими силами $\varepsilon_1 = 2,5 \text{ В}$, $\varepsilon_2 = 2,2 \text{ В}$ и $\varepsilon_3 = 3 \text{ В}$ и с внутренними сопротивлениями r по $0,2 \text{ Ом}$ каждый, включены в цепь, как показано на рис. 6,а. Внешнее сопротивление $R = 4,7 \text{ Ом}$. Найти токи во всех участках цепи и количество теплоты, выделяющееся во всей цепи за время $\tau = 10 \text{ с}$.

Дано: $\varepsilon_1 = 3 \text{ В}$, $\varepsilon_2 = 2 \text{ В}$, $\varepsilon_3 = 3 \text{ В}$, $r_1 = r_2 = r_3 = 1 \text{ Ом}$, $R = 5 \text{ Ом}$, $\tau = 10 \text{ с}$.

Найти: $I_1, I_2, I_3, \varphi_B - \varphi_A, Q$.

Решение. Для решения задачи применим законы Кирхгофа для данной разветвленной цепи. Вначале выберем предполагаемое направление токов в ветвях электрической цепи так, как показано на рис. 6,б. Тогда по первому закону Кирхгофа, для узла А имеем:

$$I_1 + I_2 - I = 0. \quad (1)$$

Для узла В мы получим тождественное уравнение.

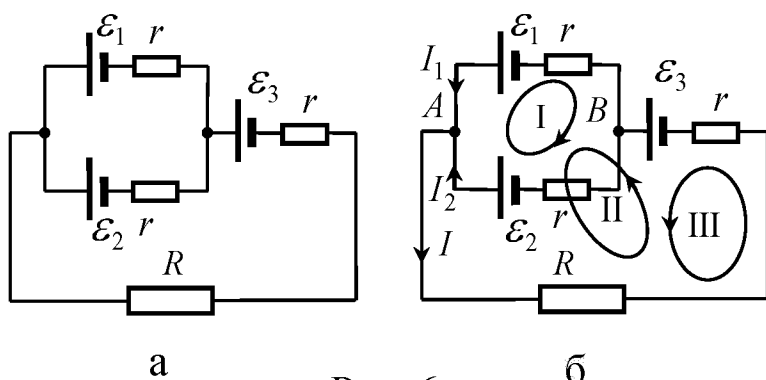


Рис. 6

Для применения второго правила Кирхгофа выберем предполагаемое направление обхода по замкнутым контурам (всего три контура) электрической цепи так, как показано на рис. 6,б. Тогда по второму правилу Кирхгофа имеем:

$$\begin{cases} I_2 r - I_1 r = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 & (\text{I - й контур}), \\ I_1 r + IR + Ir = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 & (\text{II - й контур}), \\ I_2 r + IR + Ir = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 & (\text{III - й контур}). \end{cases} \quad (2)$$

Система уравнений (2) является линейно зависимой (первое уравнение системы можно получить путем составления разности третьего и второго уравнений). Поэтому для решения задачи возьмем уравнение (1) и первое и второе уравнения системы (2):

$$\begin{cases} I_2 r - I_1 r = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1, \\ I_1 r + IR + Ir = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3, \\ I_1 + I_2 - I = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Таким образом, мы получили 3 уравнения с тремя неизвестными токами I_1 , I_2 , I . При решении задач на применение правил Кирхгофа, удобнее уравнения (3) представить в числовом виде. Подставляя данные задачи в уравнение (3), получаем:

$$\begin{cases} I_2 - I_1 = -1, \\ I_1 + 6I = 6, \\ I_1 + I_2 - I = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$$I_1 = \frac{12}{13}, I_2 = -\frac{1}{13}, I = \frac{11}{13}. \quad (4)$$

Отрицательный знак у тока I_2 указывает на то, что направление тока нами изначально было выбрано неверно. Ток I_2 в действительности течёт от В к А, а не наоборот, как это было принято при составлении уравнений (1) и (2).

Согласно закону Джоуля – Ленца, количество теплоты, выделяющееся во всей цепи, равно:

$$Q = I^2(R + r) + I_1^2 r + I_2^2 r. \quad (5)$$

Вычисления. Значения токов в ветвях электрической цепи, мы уже нашли:

$$I_1 \approx 0,923 \text{ А}, I_2 \approx 0,077 \text{ А}, I \approx 0,846 \text{ А}.$$

Для нахождения Q подставим значения токов в ветвях (4) и данные задачи в уравнение (5):

$$Q = \left(\frac{11}{13}\right)^2 6 \cdot 10 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 1 \cdot 10 + \left(\frac{1}{13}\right)^2 1 \cdot 10 \approx 51,538 \text{ Дж}.$$

3.3. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Таблица 1

Варианты	Номера задач									
0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
1	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99

1. По окружности радиусом $R = 5$ см могут свободно (без трения) перемещаться три заряженных шарика. Один из них имеет заряд $q = 4$ нКл. Заряды двух других равны между собой. Определить эти заряды, если при равновесии дуга окружности между одинаковыми зарядами составляет $\alpha = 60^\circ$.

2. Два положительных точечных заряда Q и $9Q$ закреплены на расстоянии $d = 100$ см друг от друга. Определить, в какой точке на прямой, проходящей через эти заряды, следует поместить третий заряд, чтобы он находился в положении устойчивого равновесия.

3. Два одинаково заряженных шарика подвешены в одной точке на нитях одинаковой длины. При этом нити разошлись на угол α . Шарик погружают в масло. Какова плотность ρ масла, если угол расхождения нитей при погружении в масло остается неизменным? Плотность материала шариков $\rho_0 = 1,5 \cdot 10^3$ кг/м³.

4. Четыре одинаковых заряда $Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = 40$ нКл закреплены в вершинах квадрата со стороной $a = 10$ см. Найти силу F , действующую на один из этих зарядов со стороны трех остальных.

5. Два одинаковых шарика, размерами которых можно пренебречь, подвешены на двух нитях так, что их поверхности соприкасаются. Какой заряд нужно сообщить шарикам, чтобы натяжение нитей стало равным $T = 0,098$ Н? Расстояние от точки подвеса до центра шарика равно $l = 10$ см. Вес каждого шарика равен $m = 5$ г.

6. В вершинах квадрата со стороной $a = 10$ см расположены четыре одноименных заряда $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 20$ нКл (рис. 7). Какова напряженность E и потенциал φ электростатического поля в точке А, расположенной на расстоянии $2a$ от центра квадрата?

7. В вершинах квадрата со стороной $a = 15$ см расположены заряды $q_1 = q_3 = 2$ нКл, а в двух других вершинах – заряды $q_2 = q_4 = -8$ нКл (рис. 7). Какова напряженность E и потенциал φ электростатического поля в точке А, расположенной на расстоянии $2a$ от центра квадрата?

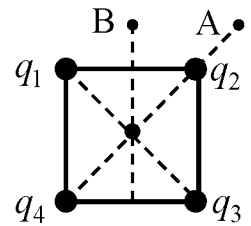


Рис. 7

8. В двух вершинах квадрата со стороной $a = 10$ см расположено по заряду $q_1 = q_2 = 8$ нКл, а в двух других вершинах – заряды $q_3 = q_4 = -3$ нКл (рис. 7). Какова напряженность E и потенциал φ электростатического поля в точке В, расположенной на расстоянии $2a$ от центра квадрата?

9. Четыре одноименных заряда $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 10$ нКл расположены в вершинах квадрата с диагональю $l = 20$ см (рис. 7). Какова напряженность E и потенциал φ электростатического поля в точке, отстоящей на расстояние $h = 10$ см от центра квадрата и расположенной симметрично относительно вершин квадрата?

10. В двух вершинах квадрата со стороной $a = 20$ см расположено по заряду по $q_1 = q_3 = 15$ нКл каждый, а в двух других вершинах – заряды $q_2 = q_4 = -5$ нКл (рис. 7). Какова напряженность E и потенциал φ электростатического поля в точке В, расположенной на расстоянии $2a$ от центра квадрата?

11. Тонкое кольцо несет равномерно распределенный заряд $Q = 0,2$ мкКл. Определить напряженность E и потенциал φ электростатического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке А, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние $r = 20$ см. Радиус кольца $R = 10$ см.

12. Электростатическое поле создаётся равномерно заряженным стержнем длиной $l = 20$ см (рис. 8). Определить напряженность E и потенциал φ электростатического поля в точке С, если линейная плотность заряда стержня $\tau = 0,1$ мкКл, $a = 10$ см, $h = 10$ см.

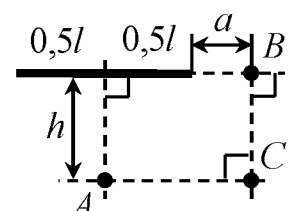


Рис. 8

13. Электростатическое поле создаётся равномерно заряженным стержнем длиной $l = 20$ см и точечным зарядом $Q = 0,2$ мкКл,

расположенном в точке В (рис. 8). Определить напряженность E и потенциал φ электростатического поля в точке А, если линейная плотность заряда стержня $\tau = 0,1$ мкКл, $a = 10$ см, $h = 10$ см.

14. По тонкому полукольцу равномерно распределен заряд $Q = 20$ мкКл с линейной плотностью $\tau = 0,1$ мкКл/м. Определить напряженность E и потенциал φ электростатического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке О, совпадающей с центром кольца.

15. По тонкому кольцу равномерно распределен заряд $Q = 10$ нКл с линейной плотностью $\tau = 0,01$ мкКл/м. Определить напряженность E и потенциал φ электростатического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке А, лежащей на оси кольца и удаленной от его центра на расстояние, равное радиусу кольца.

16. Треть тонкого кольца радиуса $R = 10$ см несет распределенный заряд $Q = 50$ нКл. Определить напряженность E и потенциал φ электростатического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке О, совпадающей с центром кольца.

17. Две трети тонкого кольца радиусом $R = 10$ см несут равномерно распределенный с линейной плотностью $\tau = 0,2$ мкКл/м заряд. Определить напряженность E и потенциал φ электростатического поля, создаваемого распределенным зарядом в точке О, совпадающей с центром кольца.

18. Электростатическое поле создаётся равномерно заряженным стержнем длиной $l = 20$ см и точечным зарядом $Q = 0,2$ мкКл, расположенным в точке С (рис. 8). Определить напряженность E и потенциал φ электростатического поля в точке А, если линейная плотность заряда стержня $\tau = 0,1$ мкКл, $a = 10$ см, $h = 10$ см.

19. Электростатическое поле создаётся равномерно заряженным стержнем длиной $l = 20$ см и точечным зарядом $Q = 0,2$ мкКл, расположенным в точке А (рис. 8). Определить напряженность E и потенциал φ электростатического поля в точке В, если линейная плотность заряда стержня $\tau = 0,1$ мкКл, $a = 10$ см, $h = 10$ см.

20. Электростатическое поле создаётся равномерно заряженным стержнем длиной $l = 20$ см и точечным зарядом $Q = 0,2$ мкКл, расположенным в точке С (рис. 8). Определить напряженность E и потенциал φ электростатического поля в точке В, если линейная плотность заряда стержня $\tau = 0,1$ мкКл, $a = 10$ см, $h = 10$ см.

21. На двух коаксиальных бесконечных цилиндрах радиусами R и $2R$ равномерно распределены заряды, соответственно с поверхностными плотностями $\sigma_1 = -2\sigma$, и $\sigma_2 = \sigma$, где $\sigma = 50$ нКл/м². Требуется: 1) используя теорему Остроградского – Гаусса, найти зависимость напряженности $E(r)$ и потенциала $\varphi(r)$ электростатического поля и построить их графики для трех областей: I – $r < R$; II – $R \leq r \leq 2R$; III – $r > 2R$; 2) найти величину и направление напряженности E поля в точке, удаленной от оси цилиндров на расстояние $r_0 = 1,5R$.

22. См. условие задачи 21. Поверхностные плотности зарядов принять равными $\sigma_1 = \sigma = 60$ нКл/м², $\sigma_2 = -\sigma$, а $r_0 = 3R$.

23. См. условие задачи 21. Поверхностные плотности зарядов принять равными $\sigma_1 = -\sigma$, $\sigma_2 = 4\sigma$, где $\sigma = 30$ нКл/м², а $r_0 = 4R$.

24. На двух концентрических сферах радиусами R и $2R$ равномерно распределены заряды соответственно с поверхностными плотностями $\sigma_1 = 4\sigma$ и $\sigma_2 = \sigma = 30$ нКл/м². Требуется: 1) используя теорему Остроградского – Гаусса, найти зависимость напряженности $E(r)$ и потенциала $\varphi(r)$ электростатического поля от расстояния и построить их графики для трех областей: I – $r < R$; II – $R \leq r \leq 2R$; III – $r > 2R$; 2) найти величину и направление напряженности E в точке, удаленной от центра концентрических сфер на расстояние $r_0 = 1,5R$.

25. См. условие задачи 24. Поверхностные заряды принять равными $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = -\sigma$, где $\sigma = 0,1$ мкКл/м², а $r_0 = 3R$.

26. См. условие задачи 24. Поверхностные заряды принять равными $\sigma_1 = -4\sigma$, $\sigma_2 = \sigma$, $\sigma = 50$ нКл/м², а $r_0 = 1,5R$.

27. См. условие задачи 24. Поверхностные заряды принять равными $\sigma_1 = -2\sigma$, $\sigma_2 = \sigma$, где $\sigma = 0,1$ мкКл/м², а $r_0 = 3R$.

28. На двух бесконечных параллельных плоскостях, расположенных на расстоянии d друг от друга, равномерно распределены заряды с поверхностными плотностями $\sigma_1 = 2\sigma$ и $\sigma_2 = \sigma = 30$ нКл/м² (рис. 9). Требуется: 1) используя теорему Остроградского – Гаусса и принцип суперпозиции электрических полей, найти выражение для напряженности $E(x)$ и потенциала $\varphi(x)$ электростатического поля для областей I, II и III и построить их графики; 2) найти величину и направление напряженности поля E в точке, расположенной слева от плоскостей.

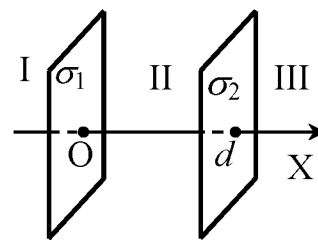


Рис. 9

29. См. условие задачи 28. Поверхностные заряды принять равными

ми $\sigma_1 = -4\sigma$, $\sigma_2 = 2\sigma$, где $\sigma = 40$ нКл/м². В п.2 точка расположена между плоскостями.

30. См. условие задачи 28. Поверхностные заряды принять равными $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = -2\sigma$, где $\sigma = 20$ нКл/м. В п.2 точка расположена справа от плоскостей.

31. Электрон, пройдя в плоском конденсаторе путь от одной пластины до другой, приобрел скоростью $v = 10^5$ м/с. Расстояние между пластинами $d = 8$ мм. Найти разность потенциалов U между пластинами и поверхностную плотность заряда σ на них.

32. Электрон с энергией $T = 400$ эВ (в бесконечности) движется по направлению к поверхности заряженного по объёму шара радиусом $R = 10$ см. Определить минимальное расстояние a , на которое приблизится электрон к поверхности шара, если объёмная плотность заряда шара $\rho = -10$ нКл.

33. В поле плоского конденсатора напряженностью $E = 200$ В/м влетает электрон со скоростью $v_0 = 2$ Мм/с. Скорость электрона направлена под углом $\alpha = 60^\circ$ к направлению силовых линий. Определить минимальное перемещение электрона, при котором его скорость будет равна половине начальной.

34. Протон находится на расстоянии $3R$ от поверхности заряженного до потенциала $\varphi = 400$ В металлического шара радиусом R . Какой минимальной скоростью v_{\min} должен обладать протон, чтобы он мог достигнуть поверхности этого шара?

35. Два одноименных одинаковых точечных неподвижных заряда величиной $Q = 10$ нКл каждый соединены между собой гладкой тонкой горизонтальной изолирующей нитью длиной $l = 2$ м. По нити может перемещаться бусинка массой $m = 1$ г, несущая заряд $q = 10$ нКл. Бусинку вывели из положения равновесия толчком, после которого она стала совершать колебания с амплитудой $A = 50$ см. Определите максимальную скорость бусинки.

36. Электрическое поле создано бесконечной заряженной прямой нитью с линейной плотностью заряда нити $\tau = 10$ нКл/м. В этом поле движется электрон. В точке 1, удаленной на расстояние $2a$ от нити, кинетическая энергия электрона $T_1 = 200$ эВ. Определить его кинетическую энергию T_2 в точке 2, удаленной на расстояние a от нити.

37. Электростатическое поле создаётся положительно заряженной бесконечной нитью. Протон, двигаясь от нити под действием сил поля

с расстояния $r_1 = 1$ см до $r_2 = 5$ см, изменил свою скорость с $v_1 = 1$ Мм/с до $v_2 = 10$ Мм/с. Определить линейную плотность заряда нити.

38. Электростатическое поле создаётся бесконечно длинным равномерно заряженным по объёму цилиндром радиусом R . Электрон, оторвавшись от поверхности цилиндра с начальной скоростью, близкой к нулю, на расстоянии $r = 3R$ от его оси имел скорость $v_2 = 100$ км/с. Определить объёмную плотность заряда цилиндра.

39. Маленький шар массой $m = 0,2$ г, имеющий заряд $q = 1$ мкКл, скользит без трения с высоты $h = 3$ м по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. В вершине прямого угла, у основания наклонной плоскости, находится неподвижный точечный заряд $Q = 2$ мкКл. Определите скорость шарика у основания, если начальная его скорость равна нулю.

40. Электрон, имеющий горизонтальную скорость $v_0 = 3$ Мм/с, влетает в однородное электростатическое поле с напряженностью $E = 200$ кВ/м перпендикулярно силовым линиям поля. Найдите величину скорости v и угол между вектором скорости и направлением силовых линий через $t = 0,5$ нс.

41. Плоский конденсатор, с расстоянием между пластинами $d = 5$ мм, имеет площадь обкладок $S = 100$ см². Заряд конденсатора $Q = 200$ нКл. В середину конденсатора, параллельно пластинам, вставлена фарфоровая пластина толщиной $d_0 = 2$ мм. Определить: 1) ёмкость нового конденсатора и падение напряжения в каждом её слое; 2) работу внешних сил, которую нужно совершить, чтобы вынуть эту пластину из конденсатора при отключенном источнике.

42. Плоский конденсатор, с расстоянием между пластинами $d = 5$ мм, имеет площадь обкладок $S = 100$ см². Заряд конденсатора $Q = 200$ нКл. В конденсатор вставлена металлическая пластина толщиной $d_0 = 2$ мм. Определить: 1) ёмкость первоначального конденсатора и падение напряжения в каждом её слое; 2) работу внешних сил, которую нужно совершить, чтобы вынуть эту пластину из конденсатора при отключенном источнике.

43. Плоский воздушный конденсатор, с расстоянием между пластинами $d = 5$ мм и площадью каждой из них $S = 40$ см², присоединен к источнику постоянного напряжения $U = 1$ кВ. Параллельно обкладкам в конденсатор ввели металлическую пластину толщиной $d_0 = 1$ мм и

такой же площади. Определить: 1) заряд и ёмкость получившегося конденсатора; 2) работу источника тока при введении пластины.

44. Плоский конденсатор, с расстоянием между пластинами $d = 5$ мм, имеет площадь обкладок $S = 50$ см². Заряд конденсатора $Q = 200$ нКл. Между пластинами отключенного от источника конденсатора ввели слюду так, чтобы она заполнила пространство между пластинами конденсатора наполовину (по объёму), прилегая при этом к обеим пластинам. Определить: 1) ёмкость нового конденсатора и напряжение на нём; 2) во сколько раз изменилась энергия системы.

45. Конденсаторы ёмкостью $C_1 = 5$ мкФ и $C_2 = 10$ мкФ заряжены до напряжений $U_1 = 60$ В и $U_2 = 100$ В соответственно. Их соединяют обкладками, имеющими одноименные заряды. Определить: 1) напряжение на обкладках конденсаторов после их соединения; 2) ёмкость системы; 3) во сколько раз изменилась энергия системы после соединения.

46. Два конденсатора емкостями $C_1 = 2$ мкФ и $C_2 = 5$ мкФ заряжены до напряжений $U_1 = 100$ В и $U_2 = 150$ В соответственно. Их соединяют обкладками, имеющими разноименные заряды. Определить: 1) напряжение на обкладках конденсаторов после их соединения; 2) ёмкость системы; 3) во сколько раз изменилась энергия системы после соединения.

47. Конденсатор ёмкостью $C_1 = 10$ мкФ заряжен до напряжения $U = 10$ В. Параллельно ему подключают другой, незаряженный, конденсатор ёмкостью $C_2 = 20$ мкФ. Определить: 1) заряд на обкладках конденсаторов; 2) ёмкость системы; 3) во сколько раз изменилась энергия системы после соединения конденсаторов.

48. Плоский конденсатор ёмкостью $C = 200$ пФ заряжен до напряжения 500 В. Затем пластины конденсатора раздвигают, удвоив расстояние между ними. Определить: 1) заряд на обкладках конденсаторов; 2) ёмкость нового конденсатора; 3) работу, необходимую для раздвижения пластин.

49. К конденсатору ёмкостью $C = 2$ мкФ, заряженному до напряжения $U = 3$ кВ, подключают параллельно незаряженный конденсатор ёмкостью $C/2$, далее к ним параллельно подключают конденсатор ёмкостью $C/3$. Определить: 1) заряд на обкладках системы конденсаторов; 2) ёмкость системы конденсаторов; 3) количество теплоты, выделившееся в соединительных проводах при подключении конденсаторов.

50. Плоский конденсатор, с расстоянием между пластинами $d = 5$ мм, имеет площадь обкладок $S = 50$ см². Конденсатор подсоединен к источнику напряжения $U = 1$ кВ. Между пластинами конденсатора ввели стекло так, чтобы оно заполнило пространство между пластинами конденсатора наполовину (по объёму), прилегая при этом к обеим пластинам. Определить: 1) ёмкость нового конденсатора и заряд на нём; 2) во сколько раз изменилась энергия системы.

51. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено двумя слоями диэлектрика: стекла толщиной $d_1 = 0,2$ см и парафина толщиной $d_2 = 0,3$ см. Разность потенциалов между обкладками $U = 300$ В. Определить напряженность поля и поверхностную плотность зарядов связанных зарядов σ' в каждом из слоёв.

52. Поверхностная плотность зарядов на толстой металлической пластине $\sigma = 5$ мкКл/м². К ней плотно прилегает однородная пластина из слюды. Какова поверхностная плотность связанных зарядов σ' на диэлектрике и напряженность поля в нём?

53. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено стеклом толщиной $d = 0,2$ см. Разность потенциалов между обкладками $U = 300$ В. Определить поверхностную плотность зарядов связанных зарядов σ' на стеклянной пластине и поверхностную плотность зарядов σ на пластинах конденсатора.

54. Поверхностная плотность зарядов на пластинах плоского конденсатора $\sigma = 3$ мкКл/м², а их площадь $S = 10$ см². Пространство между пластинами конденсатора полностью заполнено слоем масла толщиной $d = 0,4$ см. Определить индуцированный связанный заряд Q' на поверхности масла и напряженность поля E в нём.

55. Разность потенциалов между обкладками конденсатора $U = 600$ В, расстояние между пластинами $d = 3$ мм. Определить поверхностную плотность зарядов σ на пластинах конденсатора и поверхностную плотность зарядов на диэлектрике σ' , если диэлектрическая восприимчивость диэлектрика, заполняющего пространство между пластинами, $\chi = 2,5$.

56. Плоский конденсатор, расстояние между обкладками которого $d = 1$ см, полностью заполнен парафином. Какую разность потенциалов U следует подать на обкладки конденсатора, чтобы поверхностная плотность связанных зарядов на парафине составила $\sigma' = 0,5$ нКл/см². Чему равна поляризованность P парафина при этих условиях?

57. Разность потенциалов на обкладках плоского конденсатора $U = 800$ В, площадь его пластины $S = 10$ см², а заряд $Q = 10$ нКл. Пространство между пластинами конденсатора заполнено парафином. Определить расстояние между пластинами конденсатора d и поляризованность P парафина при этих условиях.

58. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено маслом. Площадь каждой пластины $S = 100$ см². Определить поверхностную плотность связанных зарядов σ' на масле, если его обкладки притягиваются друг к другу силой $F = 10$ мН.

59. Обкладки плоского конденсатора, полностью заполненного диэлектриком, притягиваются друг к другу силой $F = 10$ мН. Площадь каждой пластины $S = 100$ см². Поверхностная плотность связанных зарядов на диэлектрике $\sigma' = 2$ мкКл/м². Определить диэлектрическую проницаемость диэлектрика.

60. В однородное электрическое поле с напряженностью $E_0 = 100$ В/м помещена плоскопараллельная пластина из эбонита. Пластина расположена перпендикулярно к силовым линиям E_0 . Определить поверхностную плотность связанных зарядов σ' на эбоните, а также электрическое смещение D в нём.

61. Катушка и амперметр соединены последовательно и подключены к идеальному источнику тока. К клеммам катушки присоединен вольтметр с внутренним сопротивлением $r = 4$ кОм. Амперметр показывает силу тока $I = 0,3$ А, вольтметр – напряжение $U = 120$ В. Определить сопротивление R катушки. Определить относительную погрешность ξ , которая будет допущена при измерении сопротивления, если пренебречь силой тока, текущего через вольтметр.

62. Найти падение напряжения и суммарный импульс электронов в прямом проводе из железа, если его длина $l = 100$ м, а сечение $S = 10$ мм². По проводу течет ток $I = 50$ А.

63. В сеть с напряжением $U = 100$ В подключили катушку с сопротивлением $R_1 = 2$ кОм и вольтметр, соединенный последовательно. Показание вольтметра $U_1 = 80$ В. Когда катушку заменили другой, вольтметр показал $U_2 = 60$ В. Определить сопротивление R_2 второй катушки.

64. Амперметр и вольтметр подключили последовательно в сеть с напряжением $U = 220$ В. Если параллельно вольтметру подключить некоторое сопротивление, то показание вольтметра уменьшается в

$\eta = 2,0$ раза, а показание амперметра во столько же раз увеличивается. Найти показание вольтметра после подключения.

65. К идеальному источнику тока подключена цепь из двух одинаковых сопротивлений, соединённых последовательно. При измерении напряжения на одном сопротивлении и на двух вместе показания вольтметра оказались равными соответственно $U_1 = 49$ В и $U_2 = 100$ В. Определить, каким будет показание вольтметра, если его включить в цепь последовательно с сопротивлениями. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

66. Амперметр с внутренним сопротивлением $r_A = 10$ Ом и резистор соединены последовательно и подключены к идеальному источнику тока. К зажимам резистора присоединён вольтметр с внутренним сопротивлением $r_V = 20$ кОм. Амперметр показывает $I = 0,25$ А, вольтметр $U = 100$ В. Определить сопротивление резистора. Сколько процентов составит ошибка, если при определении сопротивления резистора не будет учтено, что вольтметр не идеальный (внутреннее сопротивление не бесконечно велико)?

67. К идеальному источнику тока подключена цепь из последовательно соединённых между собой амперметра и резистора сопротивлением $R = 2$ Ом. При этом амперметр показывает ток $I = 4$ А. Напряжение на клеммах источника $U = 12$ В. Определить, каким будет показание амперметра, если параллельно ему подключить проводник (зашунтировать) сопротивлением $R_{ш} = 0,5$ Ом.

68. К источнику подключен резистор. Кроме того, в цепь включены два амперметра, соединённых между собой параллельно. Амперметры показывают токи $I_1 = 2$ А и $I_2 = 3$ А. Если каждый из амперметров включить в цепь, то они показывают ток $I_0 = 4$ А. Определить, какая будет сила тока в цепи, если амперметры не включать.

69. Какое напряжение можно подать на катушку, имеющую $N = 1000$ витков нихромового провода со средним диаметром витков $d = 6$ см, если допустимая плотность тока $j = 2$ А/мм².

70. По прямому медному проводу длиной $l = 1000$ м и сечением $S = 1,0$ мм² течет ток $I = 4,5$ А. Считая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон, найти сумму электрических сил, действующих на все свободные электроны в данном проводе.

71. ЭДС батареи $\varepsilon = 80$ В, внутреннее сопротивление $r = 5$ Ом. Внешняя цепь потребляет мощность $P = 100$ Вт. Определить силу тока

I в цепи, напряжение на клеммах источника U и КПД источника при этих условиях.

72. При сопротивлении нагрузки $R_1 = 8$ Ом сила тока в цепи $I_1 = 0,8$ А, при сопротивлении $R_2 = 15$ Ом сила тока $I_2 = 0,5$ А. Определить ток короткого замыкания $I_{кз}$ и КПД источника в каждом случае.

73. При внешнем сопротивлении нагрузки $R_1 = 10$ Ом по цепи течет ток $I_1 = 3$ А. При увеличении этого сопротивления в $\alpha = 2$ раза ток в цепи равен $I_2 = 2$ А. Найдите ток короткого замыкания и КПД источника в каждом случае.

74. ЭДС батареи $\varepsilon = 24$ В. Наибольшая сила тока, которую может дать батарея, $I_{\max} = 10$ А. Определить КПД источника, когда мощность P , выделяемая во внешней цепи, максимальна.

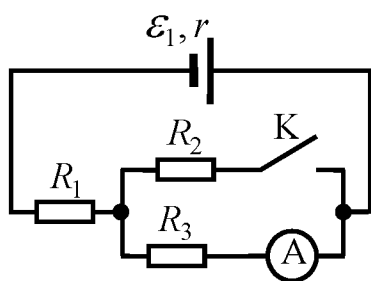


Рис. 10

75. При разомкнутом ключе K идеальный амперметр показывает ток $I = 1$ А. (рис. 10). ЭДС источника равна $\varepsilon = 12$ В, $r = 1$ Ом, $R_1 = 15$ Ом, $R_2 = 10$ Ом. Какой ток покажет амперметр при замкнутом ключе?

76. Амперметр с внутренним сопротивлением $R_A = 5$ Ом, подключенный к зажимам батареи, показывает ток $I = 5$ А. Вольтметр с внутренним сопротивлением $R_V = 300$ Ом, подключенный к зажимам той же батареи, показывает напряжение $U = 12$ В. Чему равен ток короткого замыкания $I_{кз}$ и КПД источника в каждом случае?

77. Когда к источнику тока с ЭДС $\varepsilon = 12$ В присоединили катушку индуктивности с сопротивлением $R = 15$ Ом, ток в цепи $I_1 = 0,5$ А. Когда к источнику тока подключили последовательно ещё один источник с такой же ЭДС, то сила тока в той же катушке оказалась равной $I_2 = 0,4$ А. Определить внутренние сопротивления r_1 и r_2 источников тока и их КПД.

78. При включении электромотора в сеть с напряжением $U = 220$ В он потребляет ток $I = 5$ А. Определить мощность, потребляемую мотором, и его КПД, если сопротивление обмотки мотора равно $R = 6$ Ом.

79. ЭДС батареи $\varepsilon = 12$ В. При силе тока $I = 4$ А КПД батареи $\eta = 0,6$. Определить внутреннее сопротивление r батареи и тепловую мощность, которая выделяется во внешней цепи.

80. При подключении к клеммам источника ЭДС нагрузки с сопротивлением $R_1 = 2$ Ом в нём выделяется мощность $P_1 = 32$ Вт, а при подключении нагрузки с сопротивлением $R_2 = 3$ Ом – мощность $P_2 = 27$ Вт. Найти ЭДС и внутреннее сопротивление источника.

81. Сила тока в цепи изменяется по закону $I = I_0 \cos(\omega t)$. Определить количество теплоты, которое выделится в проводнике сопротивлением $R = 10$ Ом за время, равное четверти периода (от $t_1 = 0$ до $t_2 = T/4$, где $T = 10$ с), $I_0 = 0,5$ А.

82. Сила тока в цепи изменяется по закону $I = I_0 e^{-\alpha t}$. Определить количество теплоты, которое выделится в проводнике сопротивлением $R = 20$ Ом за время, в течение которого ток уменьшится в e раз. Коэффициент α принять равным $2 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}$, а $I_0 = 1$ А.

83. Сила тока в проводнике изменяется со временем по закону $I = I_0 e^{-\alpha t}$, где $I_0 = 20$ А, $\alpha = 100 \text{ с}^{-1}$. Определить количество теплоты, выделившееся в проводнике за время $t = 10^{-2}$ с, если сопротивление проводника $R = 10$ Ом.

84. Сила тока в цепи изменяется по закону $I = I_0 \cos(2\omega t)$. Определить количество теплоты, которое выделится на резисторе сопротивлением $R = 10$ Ом за время t , равное периоду изменения тока $T = 1$ с. $I_0 = 0,5$ А.

85. Сила тока в проводнике изменяется со временем по закону $I = I_0 \sin(\omega t)$. Найти заряд Q , проходящий через поперечное сечение проводника за время t , равное половине периода T изменения силы тока, если $I_0 = 10$ А, а циклическая частота $\omega = 50\pi \text{ с}^{-1}$.

86. Определить количество теплоты Q , выделившееся за время $t = 5$ с в проводнике сопротивлением $R = 10$ Ом, если напряжение на его зажимах изменяется по закону $U = U_0(1 + \alpha t)$, где $\alpha = 2 \text{ с}^{-1}$; $U_0 = 12$ В.

87. Определить количество теплоты Q , выделившееся за время $t = 5$ с в проводнике сопротивлением $R = 10$ Ом, если сила тока со временем изменяется по закону $I = \alpha t^2$, где $\alpha = 200 \text{ А} \cdot \text{с}^2$.

88. В проводнике за время $t = 10$ с при равномерном возрастании силы тока от $I_1 = 1$ А до $I_2 = 2$ А выделилось количество теплоты $Q = 5$ кДж. Найти сопротивление R проводника.

89. Сила тока в проводнике изменяется со временем по закону $I = \alpha t^2$, где $\alpha = 2 \text{ А} \cdot \text{с}^2$. Определить количество теплоты, выделившееся в проводнике за время $t = 5$ с, если сопротивление проводника

$R = 10 \text{ Ом}$.

90. За время $t = 20 \text{ с}$ при равномерно возрастающей силе тока от нуля до некоторого значения в проводнике сопротивлением $R = 5 \text{ Ом}$ выделилось количество теплоты $Q = 4 \text{ кДж}$. Определить скорость нарастания силы тока $k = \frac{dI}{dt}$ в проводнике.

91. В схеме на рис. 11 $\varepsilon_1 = 2 \text{ В}$, $\varepsilon_2 = 1,5 \text{ В}$, $\varepsilon_3 = 0$, $R_1 = 0,5 \text{ Ом}$, $R_2 = 0,4 \text{ Ом}$, $R_3 = 2 \text{ Ом}$. Пренебрегая внутренним сопротивлением источников ЭДС, определить: 1) силу тока во всех участках цепи; 2) полную тепловую мощность, выделяющуюся в цепи.

92. В схеме на рис. 11 $\varepsilon_1 = 3 \text{ В}$, $\varepsilon_2 = -5 \text{ В}$ (источник включён в обратном направлении), $\varepsilon_3 = 0$, $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$, $R_3 = 2 \text{ Ом}$. Пренебрегая внутренним сопротивлением источников ЭДС, определить: 1) силу тока во всех участках цепи; 2) полную тепловую мощность, выделяющуюся в цепи.

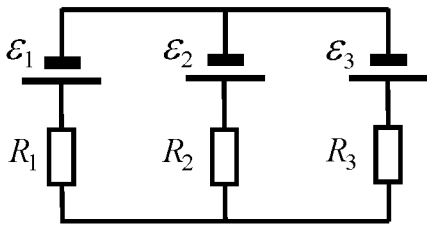


Рис. 11

93. В схеме на рис. 11 $\varepsilon_1 = 2 \text{ В}$, $\varepsilon_2 = 2 \text{ В}$, $\varepsilon_3 = 0$, $R_1 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 2 \text{ Ом}$. Сила тока I_1 , текущего через ε_1 , равна 1 А . Пренебрегая внутренним сопротивлением источников ЭДС, определить: 1) силу тока во всех участках цепи; 2) тепловую мощность, выделяющуюся в резисторе R_3 .

94. В схеме на рис. 11 $\varepsilon_1 = 11 \text{ В}$, $\varepsilon_2 = 0 \text{ В}$, $\varepsilon_3 = 6 \text{ В}$, $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = 10 \text{ Ом}$, $R_3 = 2 \text{ Ом}$. Пренебрегая внутренним сопротивлением источников ЭДС, определить: 1) силу тока во всех участках цепи; 2) тепловую мощность, выделяющуюся в резисторах R_2 и R_3 .

95. В схеме на рис. 11 $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 9 \text{ В}$, $\varepsilon_3 = 3 \text{ В}$, $R_1 = 5 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$, $R_3 = 2 \text{ Ом}$. Внутренние сопротивления источников ЭДС соответственно равны: $r_2 = 3 \text{ Ом}$, $r_3 = 1 \text{ Ом}$. Определить: 1) силу тока во всех участках цепи; 2) тепловую мощность, выделяющуюся в каждом источнике ЭДС.

96. В схеме на рис. 11 $\varepsilon_1 = 4 \text{ В}$, $\varepsilon_2 = 3 \text{ В}$, $\varepsilon_3 = 5 \text{ В}$, $R_1 = 20 \text{ Ом}$, $R_2 = 60 \text{ Ом}$, $R_3 = 10 \text{ Ом}$. Пренебрегая внутренним сопротивлением источников ЭДС, определить: 1) силу тока во всех участках цепи; 2) тепловую мощность, выделяющуюся в резисторах R_1 и R_2 .

97. В схеме на рис. 11 $\varepsilon_1 = -7 \text{ В}$ (источник включён в обратном направлении), $\varepsilon_2 = 10 \text{ В}$, $\varepsilon_3 = 8 \text{ В}$, $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 40 \text{ Ом}$, $R_3 = 20 \text{ Ом}$.

Пренебрегая внутренним сопротивлением источников ЭДС, определить: 1) силу тока во всех участках цепи; 2) полную тепловую мощность, выделяющуюся в цепи.

98. В схеме на рис. 11 $\varepsilon_1 = 5$ В, $\varepsilon_2 = 10$ В, $\varepsilon_3 = -15$ В (источник включён в обратном направлении), $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 40$ Ом, $R_3 = 30$ Ом. Внутренние сопротивления источников ЭДС соответственно равны: $r_1 = 1$ Ом, $r_2 = 3$ Ом, $r_3 = 4$ Ом. Определить: 1) силу тока во всех участках цепи; 2) КПД η всей цепи.

99. В схеме на рис. 11 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$, $R_1 = 48$ Ом, $R_2 = 24$ Ом, падение напряжения U_2 на сопротивлении R_2 равно 12 В. Пренебрегая внутренним сопротивлением источников ЭДС, определить: 1) силу тока во всех участках цепи; 2) тепловую мощность, выделяющуюся в резисторах R_1 и R_3 .

100. В схеме на рис. 11 $\varepsilon_1 = |\varepsilon_2| = \varepsilon_3$, $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 12$ Ом, падение напряжения U_2 на резисторе R_2 равно 6 В. Источник ЭДС ε_2 включён в обратном направлении. Пренебрегая внутренним сопротивлением источников ЭДС, определить: 1) силу тока во всех участках цепи; 2) полную тепловую мощность, выделяющуюся в цепи.

РАЗДЕЛ 4. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ. МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

4.1. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И СООТНОШЕНИЯ

Стационарное магнитное поле

1. Закон Био – Савара – Лапласа:

$$d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{[\vec{j}_0, \vec{r}]}{r^3} dV; \quad dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2},$$

где $d\vec{B}$ – магнитная индукция поля, создаваемого элементом проводника длиной dl с током I ; μ – магнитная проницаемость среды; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная; \vec{r} – радиус-вектор, направленный от элемента проводника dl к точке, в которой определяется магнитная индукция; \vec{j}_0 – вектор плотности макротоков; α – угол между радиус-вектором и направлением тока в элементе проводника; dV – элемент объёма с током (рис. 12).

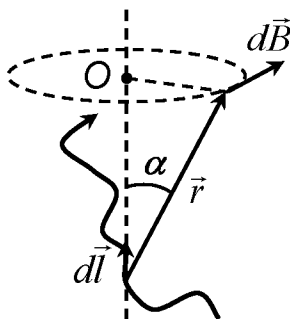


Рис. 12

2. Магнитное поле движущегося заряда q :

$$\vec{B}_q = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q [\vec{v}, \vec{r}]}{r^3},$$

где \vec{v} – скорость движения заряженной частицы; $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – радиус-вектор, проведённый от движущегося заряда к точке, в которой определяется магнитная индукция.

3. Принцип суперпозиции магнитных полей:

а) в случае дискретного распределения токов в пространстве:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^N \vec{B}_i;$$

б) в случае непрерывного распределения тока в пространстве:

$$\vec{B} = \int_{(L)} d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{(L)} \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{(V)} \frac{[\vec{j}_0, \vec{r}]}{r^3} dV.$$

4. Индукция магнитного поля прямого тока:

а) тонкого отрезка проводника с током I (рис. 13):

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi b} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2),$$

где α_1 и α_2 – углы, которые составляют первый и последний элементы $d\vec{l}$ отрезка проводника с током и радиус-векторами, проведенными из концов отрезка проводника в точку наблюдения; b – кратчайшее расстояние от оси проводника до точки наблюдения А;

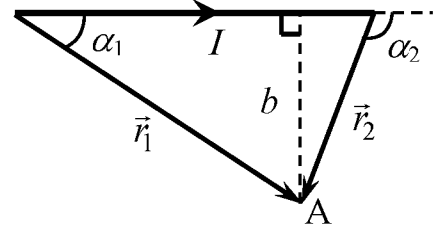


Рис. 13

б) бесконечно длинного тонкого проводника с током I ($\alpha_1 = 0^\circ$, $\alpha_2 = 180^\circ$, см. рис. 13):

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi b}.$$

5. Магнитная индукция на оси кругового витка с током:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(R^2 + h^2)^{3/2}},$$

где h – расстояние от центра витка до точки, в которой определяется магнитная индукция; R – радиус витка.

6. Сила Лоренца:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}; \quad F = qvB \sin \alpha,$$

где v – скорость заряженной частицы; α – угол между векторами \vec{v} и \vec{B} .

7. Сила, действующая на произвольный проводник с током в магнитном поле (закон Ампера):

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = I \int d\vec{l} \times \vec{B},$$

где I – ток в проводнике; $d\vec{l}$ – элемент проводника с током; B – индукция магнитного поля; α – угол между током в проводнике и линиями индукции магнитного поля;

8. Закон Ампера для прямого проводника с током в однородном магнитном поле:

$$\vec{F} = I \vec{l} \times \vec{B}; \quad \vec{F} = IBl \sin \alpha,$$

где l – длина проводника с током.

9. Сила взаимодействия (на единицу длины проводника) двух прямых бесконечных прямолинейных параллельных проводников с токами I_1 и I_2 :

$$f = \frac{F}{l} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{d},$$

где d – расстояние между проводниками; l – длина проводника.

10. Магнитный момент плоского контура с током:

$$\vec{p}_m = NIS\vec{n} = p_m\vec{n},$$

где \vec{n} – единичный вектор нормали к плоскости контура, направление которого образует с направлением тока в контуре правовинтовую систему; N – число витков в контуре; I – сила тока, протекающего по контуру; S – площадь контура.

11. Механический (вращательный) момент сил, действующий на плоский контур с током, помещенный в однородное магнитное поле:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}]; M = p_m B \sin \alpha,$$

где α – угол между векторами \vec{p}_m и \vec{B} .

12. Потенциальная энергия (механическая) плоского контура с током в однородном магнитном поле:

$$W = -[\vec{p}_m, \vec{B}] = -p_m B \cos \alpha,$$

где α – угол между векторами \vec{p}_m и \vec{B} .

13. Магнитный поток (поток индукции магнитного поля) через произвольную поверхность:

$$\Phi_B = \int d\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int B dS \cos \alpha,$$

где dS – элемент поверхности; α – угол между нормалью к элементу поверхности и вектором магнитной индукции.

14. Работа по перемещению замкнутого контура с постоянным током (или проводника с током) в магнитном поле:

$$A = I\Delta\Phi = I(\Phi_2 - \Phi_1),$$

где $\Delta\Phi$ – изменение магнитного потока через замкнутый контур с током; Φ – магнитный поток охваченного (пересекаемого) конечным проводником с током, при его перемещении в магнитном поле.

Основные теоремы для магнитоэстатического поля в вакууме

1. Теорема Гаусса для вектора индукции магнитного поля \vec{B} :

в интегральной форме: $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0;$

в дифференциальной форме: $\text{div } \vec{B} = 0.$

2. Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля \vec{B} в вакууме:

а) дискретное распределение макротоков:

$$\Gamma_B = \oint_{\vec{L}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{\vec{L}} B_l dl = \mu_0 \sum_k I_k,$$

где $d\vec{l}$ – вектор элемента замкнутого контура (с учетом выбранного направления обхода); $B_l = B \cos \alpha$ – составляющая вектора \vec{B} в направлении вектора $d\vec{l}$; α – угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{B} ; $\sum_k I_k$ – алгебраическая сумма токов, охватываемых замкнутым контуром L ;

б) непрерывное распределение тока в пространстве с плотностью j_0 :

$$\Gamma_B = \oint_{\vec{L}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_{\vec{S}} \vec{j}_0 \cdot d\vec{S},$$

где S – площадь поверхности, ограниченной замкнутым контуром L ;

в) в дифференциальной форме: $\text{rot } \vec{B} = \mu \vec{j}_0$.

3. Индукция магнитного поля идеального соленоида:

$$B = \mu \mu_0 n I = \mu \mu_0 \frac{N}{l} I,$$

где $n = N/l$ – число витков на единицу длины соленоида; N – число витков; l – длина соленоида.

4. Индукция магнитного поля тороида:

$$B = \mu \mu_0 \frac{NI}{2\pi r},$$

где $R_1 \leq r \leq R_2$; R_1 и R_2 – соответственно внутренний и внешний радиусы тороида.

Магнитное поле в веществе

5. Индукция макроскопического поля в веществе:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}',$$

где \vec{B}_0 – индукция внешнего магнитного поля (макроскопических токов); \vec{B}' – индукция магнитного поля, создаваемого усредненным распределением микротоков.

6. Вектор намагниченности:

$$\vec{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow A} \frac{\sum \vec{p}_{m_i}}{\Delta V},$$

где $\sum_{\Delta V} \vec{p}_{m_i}$ – сумма магнитных моментов частиц вещества (ато-мов или молекул); ΔV – физически малый объём магнетика, окружающий точку A , в которой определяется намагниченность.

7. Циркуляция вектора намагниченности:

$$\oint_{\vec{L}} \vec{J}, d\vec{l} \stackrel{?}{=} \oint_{\vec{L}} dI_{\text{мол}} = I_{\text{мол}},$$

где $I_{\text{мол}}$ – суммарный молекулярный ток, который охватывается замкнутым контуром L .

8. Напряжённость магнитного поля:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}.$$

9. Связь между векторами \vec{J} и \vec{H} , для изотропных и однородных магнетиков:

$$\vec{J} = \chi(H, T) \vec{H},$$

где $\chi = \chi(H, T)$ – магнитная восприимчивость магнетика, безразмерный коэффициент пропорциональности, зависящий от величины напряженности поля и температуры T (в слабых полях $\chi = \text{const}$).

10. Связь между индукцией магнитного поля в магнетике и напряжённостью поля:

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} = \mu \mu_0 \vec{H},$$

где $\mu = (1 + \chi)$ – относительная магнитная проницаемость магнетика.

11. Теорема о циркуляции вектора напряженности магнитного поля:

а) дискретное распределение макротоков:

$$\Gamma_H = \oint_{\vec{L}} \vec{H}, d\vec{l} \stackrel{?}{=} \oint_{\vec{L}} H_l dl = \sum_k I_k,$$

где $d\vec{l}$ – вектор элемента длины замкнутого контура (с учетом выбранного направления обхода); $H_l = H \cos \alpha$ – составляющая вектора \vec{H} в направлении вектора $d\vec{l}$; α – угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{H} ; $\sum_k I_k$ – алгебраическая сумма макротоков, охватываемых замкнутым контуром L ;

б) непрерывное распределение макротока в пространстве с плотностью j_0 :

$$\Gamma_H = \oint_{\langle C \rangle} \vec{H}, d\vec{l} \stackrel{?}{=} \int_{\langle S \rangle} \vec{j}_0, d\vec{S},$$

где S – площадь поверхности, ограниченной замкнутым контуром L ;

г) в дифференциальной форме: $\text{rot} \vec{H} = \vec{j}_0$.

Электромагнитная индукция. Индуктивность

1. ЭДС индукции (закон Фарадея) в замкнутом контуре, при изменении индукции магнитного поля:

$$\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}; \langle \varepsilon_i \rangle = -N \frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t},$$

где N – число витков в замкнутом контуре; $\Psi = N\Phi_B$ – потокосцепление (полный поток).

2. Разность потенциалов на концах проводника, движущегося со скоростью v в магнитном поле:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Blv \sin \alpha,$$

где l – длина проводника; α – угол между векторами \vec{v} и \vec{B} .

3. ЭДС, возникающая в замкнутом плоском контуре из N витков и площадью S , при его вращении с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле:

$$\varepsilon_i = NBS\omega \sin(\omega t) = \varepsilon_{i\max} \sin(\omega t),$$

где (ωt) – мгновенное значение угла между вектором \vec{B} и вектором нормали \vec{n} к плоскости контура.

4. Заряд, протекающий по замкнутому контуру при изменении магнитного потока, пронизывающего этот контур:

$$Q = -\frac{1}{R} (\Psi_2 - \Psi_1),$$

где R – сопротивление контура.

5. Индуктивность контура: $L = \Psi/I$.

6. ЭДС самоиндукции:

$$\varepsilon_{s_i} = -L \frac{dI}{dt}; \langle \varepsilon_{s_i} \rangle = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

7. Индуктивность соленоида:

$$L = \mu\mu_0 n^2 V,$$

где n – число витков соленоида на единицу его длины; V – объём соле-

ноида; μ – магнитная проницаемость сердечника соленоида.

8. Мгновенное значение силы тока в цепи, обладающей сопротивлением R и индуктивностью L :

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) = \frac{\varepsilon}{R} \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \text{ – при замыкании цепи;}$$

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \text{ – при размыкании цепи,}$$

где ε – ЭДС источника тока, t – время, прошедшее после замыкания (размыкания) цепи; I_0 – сила тока в цепи при $t = 0$.

9. Энергия магнитного поля:

$$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{I\Psi}{2} = \frac{\Psi^2}{2L}.$$

10. Объёмная плотность энергии магнитного поля:

$$\omega = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{HB}{2} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{\mathbf{B}, \vec{H}}{2},$$

где B и H – соответственно индукция и напряжённость магнитного поля; μ – магнитная проницаемость среды.

11. Энергия магнитного поля в объёме V пространства:

$$W = \int_V \omega dV = \int_V \frac{\mathbf{B}, \vec{H}}{2} dV.$$

12. Уравнения Максвелла для слабых полей и изотропных однородных сред, при отсутствии ферромагнетиков:

$$\oint_{\mathbf{C}} \mathbf{E}, d\vec{l} = - \int_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, d\vec{S} \right); \quad \oint_S \mathbf{B}, d\vec{S} = \int_V \rho dV;$$

$$\oint_{\mathbf{C}} \mathbf{H}, d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, d\vec{S} \right); \quad \oint_S \mathbf{B}, d\vec{S} = 0;$$

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}; \quad \vec{j}_0 = \sigma \mathbf{E}_0 + \vec{E}^*,$$

где \vec{E} и \vec{D} – соответственно векторы напряженности и электрического смещения электрического поля; ρ – объёмная плотность сторонних (свободных) зарядов; \vec{B} и \vec{H} – соответственно векторы индукции напряженности магнитного поля; j_0 – плотность макротоков; $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}_{cm}$ –

плотность тока смещения; ε, μ – соответственно относительная диэлектрическая и магнитная проницаемости среды; σ – удельная электропроводность среды; \vec{E}_0 – напряжённость поля электростатических сил; \vec{E}^* – напряжённость поля сторонних сил (неэлектромагнитного происхождения).

Механические и электромагнитные колебания

1. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний и его решение:

$$\xi'' + \omega_0^2 \xi = 0; \xi = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где ξ – смещение колеблющейся величины, описывающей физический процесс ($\xi = x$ – координата, $\xi = \alpha$ – угол отклонения, $\xi = q$ – заряд), от положения равновесия; A – амплитуда колебаний; $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ – фаза колебаний в произвольный момент времени t ; $\omega_0 = 2\pi / T = 2\pi\nu$ – круговая (циклическая) частота колебаний; T – период колебаний; ν – частота колебаний; φ_0 – начальная фаза колебаний ($\varphi_0 = \varphi(t=0)$).

2. Циклическая частота и период гармонических колебаний:

а) пружинный маятник:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}},$$

где k – коэффициент упругости, m – масса тела, совершающего колебания;

б) физический и математический маятники:

$$\omega_0^2 = \frac{mgl}{I}, T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}}; \omega_0^2 = \frac{g}{l}, T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

где m – масса маятника; l – расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника; I – момент инерции маятника относительно оси колебаний; g – ускорение свободного падения;

в) электрический колебательный контур:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, T = 2\pi \sqrt{LC},$$

где L – индуктивность катушки; C – ёмкость конденсатора.

3. Момент инерции, различных тел массой m .

Материальная точка – mR^2 , где R – радиус окружности.

Диск (сплошного цилиндра) относительно оси, совпадающей с

осью симметрии: $mR^2/2$, где R – радиус диска (цилиндра).

Обруч (тонкостенный цилиндр) относительно оси, совпадающей с его осью симметрии: mR^2 , где R – радиус обруча (цилиндра).

Стержень относительно оси, проходящей через его центр масс: $(ml^2)/12$, где l – длина стержня.

Шар относительно оси, проходящей через его центр: $0,4mR^2$.

4. Момент инерции твёрдого тела относительно произвольной оси (теорема Штейнера):

$$I = I_0 + md^2,$$

где I_0 – момент инерции твёрдого тела (маятника) относительно оси, проходящей через центр масс, параллельно заданной оси; m – масса твёрдого тела (маятника); d – расстояние между осями.

5. Кинематические и динамические характеристики системы при гармонических колебаниях:

а) пружинный маятник (скорость, ускорение, импульс, сила):

$$v_x = x'; \quad a_x = x''; \quad p_x = mv_x = mx'; \quad F_x = ma_x = mx'';$$

б) физический маятник (угловая скорость и ускорение, моменты импульса и силы):

$$\omega = \alpha'; \quad \varepsilon = \alpha''; \quad L_z = I_z\omega = I_z\alpha'; \quad M_z = I_z\varepsilon = I_z\alpha''.$$

6. Кинетическая (T), потенциальная (Π) и полная энергия (E) гармонических колебаний (пружинный маятник):

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(4\omega_0^2)}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0);$$

$$\Pi = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0);$$

$$E = T + \Pi = T_{\max} = \frac{m(4\omega_0^2)}{2} = \Pi_{\max} = \frac{kA^2}{2} = \text{const}.$$

7. Электромагнитные колебания (ток в контуре и напряжение на конденсаторе):

$$i = q', \quad U = q/C.$$

8. Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы и его решение:

$$\xi'' + 2\beta\xi' + \omega_0^2\xi = 0; \quad \xi = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где ξ – колеблющаяся величина, описывающая физический процесс;

β – коэффициент затухания ($\beta = r/(2m)$ – в случае механических колебаний и $\beta = R/(2L)$ – в случае электромагнитных колебаний); r – коэффициент сопротивления среды; m – масса тела; R – сопротивление колебательного контура; L – индуктивность контура; ω_0 – циклическая частота свободных незатухающих колебаний той же колебательной системы; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухающих колебаний; $A_0 e^{-\beta t} = A(t)$ – амплитуда затухающих колебаний; A_0 – амплитуда затухающих колебаний в начальный момент времени.

9. Период затухающих колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

10. Декремент затухания:

$$\chi = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T},$$

где $A(t)$ и $A(t+T)$ – амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период.

11. Логарифмический декремент затухания:

$$\lambda = \ln \chi = \beta T.$$

12. Время релаксации τ , в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в e раз: $\tau = 1/\beta$.

13. Добротность колебательной системы:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e,$$

где N_e – число колебаний, совершаемых системой за время релаксации.

14. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение для установившихся колебаний:

$$\xi'' + 2\beta\xi' + \omega_0^2\xi = f_0 \cos \Omega t; \quad \xi = A \cos \Omega t - \alpha,$$

где ξ – колеблющаяся величина, описывающая физический процесс; β – коэффициент затухания колебательной системы; ω_0 – циклическая частота свободных незатухающих колебаний той же колебательной системы; $f_0 = F_0/m$ – в случае механических колебаний, $f_0 = U_0/L$ – в случае электромагнитных колебаний; F_0 – амплитуда внешней вынуждающей силы; U_0 – амплитуда внешнего вынуждающего напряжения; Ω – циклическая частота внешней вынуждающей «силы»;

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \Omega^2 + 4\beta^2\Omega^2}} - \text{амплитуда колебаний; } \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) -$$

фаза колебаний.

15. Амплитудная резонансная частота ($\Omega_{рез}$) и величина резонансной амплитуды ($A_{рез}$):

$$\Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

16. Амплитуда A и начальная фаза ($\operatorname{tg}\varphi_0$) результирующего колебания, получающегося при сложении двух гармонических колебаний одинакового направления и одинаковой частоты:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{20} - \varphi_{10}); \quad \operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{A_1 \sin\varphi_{10} + A_2 \sin\varphi_{20}}{A_1 \cos\varphi_{10} + A_2 \cos\varphi_{20}},$$

где A_1 и A_2 – амплитуда складываемых колебаний; φ_{10} и φ_{20} – их начальные фазы.

17. Уравнение траектории движения точки, участвующей в двух взаимно перпендикулярных колебаниях одинаковой частоты:

$$\frac{x^2}{A_1^2} - 2\frac{xy}{A_1A_2} \cos\Delta\varphi_0 + \frac{y^2}{A_2^2} = \sin^2 \Delta\varphi_0,$$

где A_1 и A_2 – амплитуды складываемых колебаний; $\Delta\varphi_0$ – разность начальных фаз складываемых колебаний.

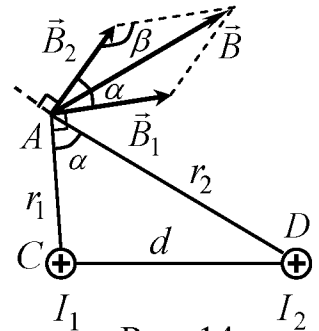
4.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1. Два параллельных бесконечно длинных проводника D и C (рис. 14), по которым текут в одном направлении электрические токи силой $I = 60$ А, расположены на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого проводниками с током в точке А, отстоящей от оси одного проводника на расстояние $r_1 = 5$ см, от другого на расстояние $r_2 = 12$ см.

Дано: $I_1 = I_2 = I = 60$ А, $d = 0,10$ м, $r_1 = 0,05$ м, $r_2 = 0,12$ м.

Найти: B .

Решение. Для нахождения магнитной индукции \vec{B} в точке А воспользуемся принципом суперпозиции магнитных полей. На рис. 14 указаны направления векторов магнитных индукций \vec{B}_1 и \vec{B}_2 , создаваемых каждым проводником с током в отдельности, и их сумма:



$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Модуль вектора \vec{B} может быть найден по теореме косинусов:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2 \cos \beta}, \quad (1)$$

где $\beta = (180^\circ - \alpha)$; α – угол между векторами \vec{B}_1 и \vec{B}_2 .

Магнитные индукции B_1 и B_2 выражаются соответственно через силу тока I и расстояния r_1 и r_2 от проводов до точки А:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}; \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}.$$

Подставляя выражения B_1 и B_2 в формулу (1) и учитывая, что $\beta = (180^\circ - \alpha)$, получаем:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2} \cos \alpha}. \quad (2)$$

Найдём $\cos \alpha$ из треугольника АСD. Угол $\alpha = \angle DAC$ (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами). Тогда по теореме косинусов имеем:

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \alpha, \quad (3)$$

где d – расстояние между проводниками.

Выражая из (3) $\cos \alpha$ и подставляя в (2), окончательно получим:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \left(\frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2 r_1 r_2} \right)^2}. \quad (4)$$

Вычисление. Подставим в формулу (4) числовые значения физических величин и произведём вычисления:

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 60}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{0,05^2} + \frac{1}{0,12^2} + \left(\frac{0,05^2 + 0,12^2 - 0,1^2}{2 \cdot 0,05 \cdot 0,12} \right)^2} = 0,308 \text{ мТл.}$$

Задача 2. По тонкому проводящему кольцу радиусом $R = 10$ см течет ток $I = 80$ А (рис. 15). Найти магнитную индукцию B в точке А, равноудаленной от всех точек кольца на расстояние $r = 20$ см.

Дано: $I = 80$ А, $R = 0,10$ м, $r = 0,20$ м.

Найти: B .

Решение. Согласно принципу суперпозиции магнитных полей, магнитная индукция \vec{B} в точке А определяется соотношением

$$\vec{B} = \int_{(L)} d\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \int_{(L)} \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3},$$

где $d\vec{B}$ – магнитная индукция поля, создаваемая элементом тока $d\vec{l}$ в точке, определяемой радиус-вектором \vec{r} .

Выделим на кольце элемент $d\vec{l}$ и от него в точку А проведем радиус-вектор \vec{r} (рис. 15). Вектор $d\vec{B}$ направим в соответствии с правилом буравчика и разложим его на две составляющие: $d\vec{B}_\perp$, перпендикулярную плоскости кольца, и $d\vec{B}_\parallel$, параллельную плоскости кольца. Тогда

$$\vec{B} = \int_{(L)} d\vec{B}_\parallel + \int_{(L)} d\vec{B}_\perp. \quad (1)$$

Из соображений симметрии $\int_{(L)} d\vec{B}_\parallel = 0$, а векторы $d\vec{B}_\perp$ от различных элементов $d\vec{l}$ сонаправлены. Таким образом, в соотношении (1) векторное суммирование (интегрирование) можно заменим скалярным:

$$B = \int_{(L)} dB_\perp, \quad (2)$$

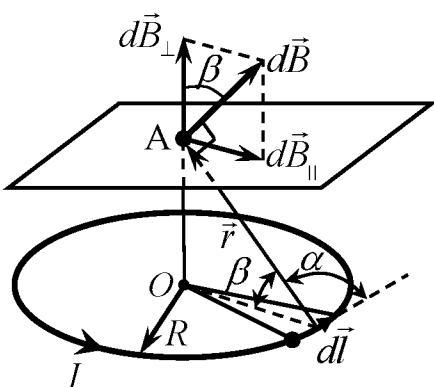


Рис. 15

где $dB_{\perp} = dB \cos \beta$, а

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}. \quad (3)$$

Вектор $d\vec{l}$ перпендикулярен \vec{r} и, следовательно, $\sin \alpha = 1$. С учётом этого и уравнения (3) выражение (2) принимает вид

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^2} \cos \beta \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 I \cos \beta}{4\pi r^2} 2\pi R. \quad (4)$$

Из рис. 12 следует, что $\cos \beta = R/r$. Подставляя это выражение в (4), окончательно получим:

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2r^2}.$$

Вычисление. Подставляя числовые значения в последнее уравнение, найдём:

$$B = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 80 \cdot 0,1^2}{2 \cdot 0,2^2} = 62,8 \cdot 10^{-6} \text{ Тл} = 62,8 \text{ мкТл}.$$

Задача 3. По двум параллельным прямым проводникам длиной $l = 2,5$ м каждый, находящимся на расстоянии $d = 20$ см друг от друга, текут одинаковые токи $I = 1$ кА. Вычислить силу взаимодействия токов.

Дано: $l = 2,5$ м, $d = 0,20$ м, $I = 1 \cdot 10^3$ А.

Найти: F .

Решение. Взаимодействие двух проводников, по которым текут токи, осуществляется через магнитное поле. Каждый ток создаёт магнитное поле, которое действует на другой проводник.

Предположим, что оба тока (обозначим их для удобства I_1 и I_2) текут в одном направлении. Тогда ток I_1 создаёт в месте расположения второго провода с током I_2 магнитное поле (рис. 16).

Проведём силовую линию магнитной индукции (пунктир на рис. 16) через второй провод и по касательной к ней – вектор магнитной индукции \vec{B}_1 . Модуль магнитной индукции B_1 определяется соотношением

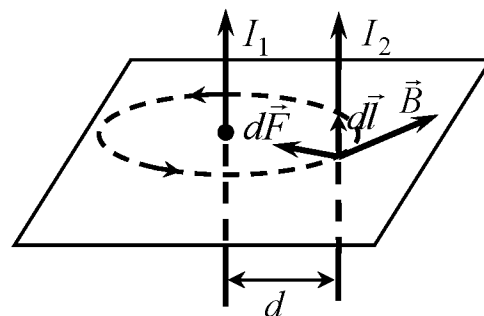


Рис. 16

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}. \quad (1)$$

Согласно закону Ампера, на каждый элемент второго проводника с током I_2 длиной dl действует в магнитном поле сила:

$$dF = I_2 B_1 dl \cdot \sin \alpha,$$

где α – угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{B} .

Так как по условию задачи $\alpha = 90^\circ$, то выражение для силы dF принимает вид

$$dF = I_2 B_1 dl. \quad (2)$$

Подставив в это уравнение выражение для B_1 из (1), получим:

$$dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} dl.$$

Силу F взаимодействия проводников с токами найдём интегрированием:

$$F = \int_0^l dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \int_0^l dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} l.$$

Заметив, что по условию задачи $I_1 = I_2 = I$, окончательно получим:

$$F = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi d}.$$

Вычисление. Подставляя в последнее выражение числовые значения, получим:

$$F = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^6 \cdot 2,5}{2\pi \cdot 0,2} = 2,5 \text{ Н.}$$

Задача 4. Протон влетает со скоростью $v = 10^6$ м/с в однородное магнитное поле под углом $\alpha = 30^\circ$ к направлению силовых линий индукции. Определить радиус кривизны R спиральной линии, по которой будет двигаться протон, и её шаг h , если индукция магнитного поля $B = 1$ Тл.

Дано: $v = 10^6$ м/с, $\alpha = 30^\circ$, $B = 1$ Тл, $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг, $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Найти: R, h .

Решение. Разложим скорость протона \vec{v} на две составляющие: $\vec{v}_\perp = \vec{v} \sin(\alpha)$, перпендикулярную линиям индукции, и $\vec{v}_\parallel = \vec{v} \cos(\alpha)$, параллельную им (рис. 17).

Сила Лоренца $\vec{F}_{Л}$ будет непрерывно изменять направление скорости \vec{v}_{\perp} , сообщая протону в плоскости, перпендикулярной полю, нормальное ускорение \vec{a}_n . В результате протон будет описывать в этой плоскости окружность радиусом R . Тогда, согласно второму закону Ньютона $\vec{F}_{Л} = m\vec{a}_n$ в скалярной форме имеем:

$$qv_{\perp}B = mv_{\perp}^2/R.$$

Отсюда находим радиус R кривизны спиральной линии:

$$R = mv_{\perp}/qB = mv\sin(\alpha)/(qB). \quad (1)$$

Вдоль поля протон будет двигаться с постоянной скоростью $v_{\parallel} = v\cos(\alpha)$. В результате наложения поступательного движения и кругового, протон будет описывать в пространстве винтовую линию.

Шагом винтовой линии h называется расстояние, на которое переместится протон вдоль силовых линий поля за время одного оборота по окружности (период). Очевидно, что

$$h = v_{\parallel}T = v\cos(\alpha)T, \quad (2)$$

где T – период обращения протона по окружности радиусом R .

Из кинематики вращательного движения период T равен

$$T = 2\pi R/v_{\perp} = 2\pi R/(v\sin\alpha).$$

Подставляя в это выражение соотношение (1), а результат в выражение (2), окончательно получим выражение для шага винтовой линии:

$$h = 2\pi mv\cos(\alpha)/(qB).$$

Вычисления.

$$R = 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 10^6 \cdot \sin(30^\circ) / (1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1) = 5,2 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$h = 2 \cdot 3,14 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \cdot 10^6 \cdot \cos(30^\circ) / (1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1) = 0,55 \text{ м}.$$

Задача 5. В одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводом, по которому течет ток $I = 50$ А, расположена прямоугольная рамка так, что две большие стороны её длиной $l = 65$ см параллельны проводу, а расстояние от провода до ближайшей из этих сторон равно её ширине (рис. 18). Чему равен магнитный поток Φ , пронизывающий рамку?

Дано: $I = 50$ А, $l = 65$ см.

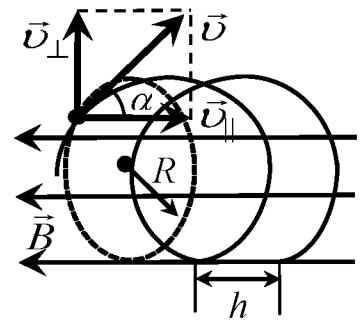


Рис. 17

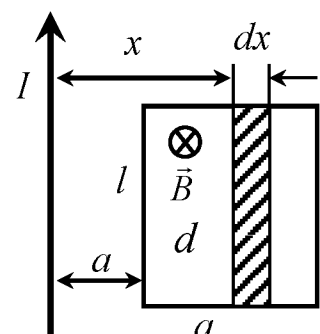


Рис. 18

Найти: Φ .

Решение. Магнитный поток Φ через произвольную поверхность площадью S определяется выражением

$$\Phi_B = \int_{(S)} d\Phi_B = \int_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{(S)} B dS \cos \alpha, \quad (1)$$

где $d\Phi_B$ – элементарный поток через элементарную площадку dS поверхности, в пределах которого вектор магнитной индукции \vec{B} можно считать постоянным; α – угол между нормалью \vec{n} к поверхности и вектором \vec{B} .

Магнитная индукция B , создаваемая бесконечно длинным прямым проводником с током I , определяется соотношением

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}, \quad (2)$$

где x – кратчайшее расстояние от провода до точки, в которой определяется B .

Из этого соотношения следует, что магнитное поле вокруг бесконечно длинного прямого проводника неоднородно, а также обладает цилиндрической симметрией.

Поэтому разобьем площадь рамки на узкие элементарные площадки длиной l , шириной dx и площадью $dS = ldx$ (рис. 18). Тогда элементарный поток $d\Phi_B$ через площадку dS равен

$$d\Phi_B = B(x)dS = B(x)ldx. \quad (3)$$

В этом соотношении мы учли, что угол α между нормалью \vec{n} к поверхности dS и вектором \vec{B} равен нулю ($\cos \alpha = 1$).

Подставляя в выражение (3) уравнение (2), а результат в (1), получаем:

$$B = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_a^{a+a} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \left(\ln \frac{2a}{a} \right) = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln 2.$$

Вычисление.

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 0,65 \cdot 50}{2\pi} \ln 2 = 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ Вб} = 4,5 \text{ мкВб}.$$

Задача 6. Плоский квадратный контур со стороной $a = 10$ см, по которому течет ток $I = 100$ А, свободно установился в однородном магнитном поле индукцией $B = 1$ Тл (рис. 19). Определить работу A , совершаемую внешними силами при повороте контура относительно

оси, проходящей через середину его противоположных сторон, на угол $\varphi = 90^\circ$. При повороте контура сила тока в нем поддерживается неизменной.

Дано: $a = 0,10$ м, $I = 100$ А, $B = 1$ Тл, $\varphi = 90^\circ$.

Найти: A .

Решение. На контур с током в магнитном поле действует вращающий момент сил поля (рис. 19):

$$M = p_m B \sin \varphi, \quad (1)$$

где $p_m = IS = Ia^2$ – магнитный момент контура с током; B – индукция магнитного поля; φ – угол между векторами \vec{p}_m и \vec{B} .

По условию задачи в начальном положении контур свободно установился в магнитное поле, т.е. $\varphi = 0$. При этом момент сил поля также равен нулю ($M = 0$), а векторы \vec{p}_m и \vec{B} сонаправлены.

Если внешние силы выведут контур из положения равновесия, то возникший момент сил будет стремиться вернуть контур в исходное положение. Против этого момента сил и будет совершаться работа внешними силами.

Элементарная работа внешних сил при повороте контура на угол $d\varphi$ равна

$$\delta A = \overleftarrow{M^{(вн)}} d\varphi = M^{(вн)} d\varphi, \quad (2)$$

где $M^{(вн)}$ – момент внешних сил; $d\varphi$ – угол поворота рамки.

Так как по условию задачи контур просто поворачивают (скорость её равна нулю), то момент внешних сил численно равен моменту сил поля: $M^{(вн)} = M$. Тогда полная работа внешних сил при повороте контура на угол φ с учётом соотношений (1) и (2) будет равна

$$A = \int_0^\varphi \delta A = IBa^2 \int_0^\varphi \sin \varphi d\varphi = IBa^2 \left(-\cos \varphi \Big|_0^\varphi \right) = -IBa^2 (\cos \varphi - 1).$$

Вычисление.

$$A = -100 \cdot 1 \cdot 0,1^2 (\cos 90^\circ - 1) = 1 \text{ Дж.}$$

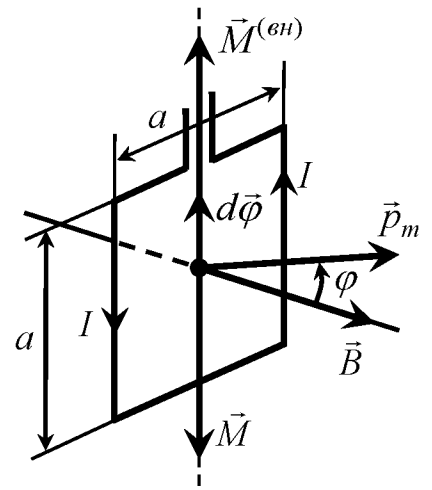


Рис. 19

Задача 7. Кольцо из медного провода массой $m = 20$ г помещено в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0,3$ Тл так, что плоскость кольца составляет угол $\alpha = 45^\circ$ с линиями магнитной индукции. Опре-

делить заряд Q , который пройдет по кольцу, если индукция магнитного поля станет равной нулю.

Дано: $m = 20 \cdot 10^{-3}$ кг, $\rho = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м³, $B_1 = 0,3$ Тл, $B_2 = 0$, $\alpha = 45^\circ$, $\rho_0 = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом/м.

Найти: Q .

Решение. Заряд, который пройдет по кольцу при изменении магнитного поля, будет равен (рис. 20)

$$dQ = Idt. \quad (1)$$

По закону Ома ток I , возникающий в кольце, равен

$$I = \frac{|\mathcal{E}_i|}{R}, \quad (2)$$

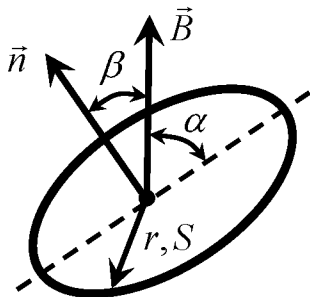


Рис. 20

где $|\mathcal{E}_i|$ – ЭДС индукции, возникающая в рамке при изменении индукции магнитного поля; R – сопротивление кольца.

По закону Фарадея имеем:

$$|\mathcal{E}_i| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right|, \quad (3)$$

где $d\Phi$ – элементарный поток индукции магнитного поля.

С учётом соотношений (2) и (3) уравнение (1) примет вид

$$dQ = \frac{|d\Phi|}{R}.$$

Если полагать, что сопротивление кольца при протекании тока в проводнике не меняется, то полный заряд, который пройдет по кольцу, равен

$$Q = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \frac{|d\Phi|}{R} = \frac{1}{R} \left| \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\Phi \right| = \frac{1}{R} |\Phi_2 - \Phi_1|. \quad (4)$$

Поток вектора \vec{B} по определению равен $\Phi = BS \cos(\beta)$, где S – площадь, охватываемая данным кольцом; $S = \pi r^2$; r – радиус кольца; $\beta = (90 - \alpha)$, угол между вектором \vec{B} и нормалью \vec{n} к поверхности. С учётом этого выражение (4) можно представить в виде

$$Q = \frac{1}{R} \pi r^2 \sin \alpha |B_2 - B_1|. \quad (5)$$

Сопротивление медного кольца:

$$R = \rho_0 \frac{l}{S_0} = \rho_0 \frac{2\pi r}{S_0}, \quad (6)$$

где ρ_0 – удельное сопротивление меди; l – длина кольца ($l = 2\pi r$); S_0 – площадь сечения медного кольца.

Площадь сечения медного кольца выразим через массу кольца: $m = \rho V = \rho S_0 2\pi r$, где ρ – плотность меди; V – его объём. Отсюда имеем:

$$S_0 = \frac{m}{2\pi r \rho}. \quad (7)$$

Подставляя выражения (6) и (7) в формулу для заряда (5), получим:

$$Q = \frac{m \sin \alpha}{4\pi \rho_0 \rho} |B_2 - B_1|.$$

Вычисление.

$$Q = \frac{20 \cdot 10^{-3} \sin 45}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,9 \cdot 10^3 \cdot 1,7 \cdot 10^{-8}} |0 - 0,3| = 2,2 \text{ Кл.}$$

Задача 8. Соленоид с сердечником из немагнитного материала содержит $N = 1200$ витков провода, плотно прилегающих друг к другу. При силе тока $I = 4$ А магнитный поток $\Phi = 6$ мкВб. Определить индуктивность L соленоида и энергию W магнитного поля соленоида.

Дано: $N = 1200$, $I = 4$ А, $\Phi = 6 \cdot 10^{-6}$ Вб.

Найти: L , W .

Решение. Индуктивность L связана с потокоцеплением Ψ и силой тока I соотношением

$$\Psi = LI. \quad (1)$$

Потокоцепление, в свою очередь, может быть определено через поток Φ и число витков N (при условии, что витки плотно прилегают друг к другу):

$$\Psi = N\Phi. \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) находим соотношение для индуктивности соленоида:

$$L = N\Phi/I. \quad (3)$$

Энергия магнитного поля соленоида:

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

Подставляя в это выражение соотношение для индуктивности (3), получим:

$$W = \frac{N\Phi I}{2} \quad (4)$$

Вычисления. Подставляя числовые значения в соотношения (3) и (4), получаем:

$$L = 1200 \cdot 6 \cdot 10^{-6} / 4 = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} = 1,8 \text{ мГн}$$

$$W = \frac{1200 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 4}{2} = 1,44 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}, 14,4 \text{ кДж}.$$

Задача 9. В одной плоскости с бесконечно длинным прямым током $I = 20 \text{ А}$ на расстоянии $x_0 = 1 \text{ см}$ находятся две шины, параллельные току I (рис. 21). По шинам с постоянной скоростью $v = 3 \text{ м/с}$ перемещается проводник длиной $l = 0,5 \text{ м}$. Вектор скорости проводника направлен вдоль шин. Найти разность потенциалов, возникающую на концах проводника при его движении.

Дано: $I = 20 \text{ А}$, $x_0 = 1 \text{ см} = 10^{-2} \text{ м}$, $l = 0,5 \text{ м}$, $v = 3 \text{ м/с}$.

Найти: $\varphi_1 - \varphi_2$.

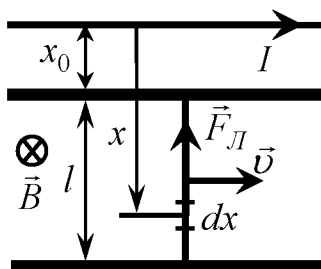


Рис. 21

Решение. Магнитное поле тока I ниже самого проводника будет направлено «от нас», причём оно будет неоднородным. Индукция поля \vec{B} меняется вдоль движущегося проводника по закону:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}, \quad (1)$$

где x – расстояние до произвольной точки проводника.

Рассмотрим физический бесконечно малый участок dx проводника l . В его пределах индукцию магнитного поля B можно считать постоянной. Тогда на носители тока в элементе dx проводника, которые также перемещаются относительно поля со скоростью v , действует вдоль проводника магнитная сила:

$$\vec{F}_L = q_0 \mathbf{j}, \vec{B},$$

где q_0 – заряд носителей тока.

Под действием этих сил на ближайшем к току I конце проводника l будут накапливаться положительные заряды, а на дальнем – отрицательные.

Согласно определению, напряженность поля этих сил равна

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_L}{q_0} = \left[\vec{v}, \vec{B} \right]; |\vec{E}| = vB \sin \alpha.$$

Это поле неэлектростатического происхождения, поэтому величина ЭДС, индуцируемого в элементе dx , равна

$$d\varepsilon_i = E dx = vB dx. \quad (2)$$

Здесь мы учли, что α (угол между векторами \vec{v} и \vec{B}) равен 90° .

Суммарная ЭДС, возникающая при движении проводника, будет равна $\varepsilon_i = \int_{x_0}^{x_0+l} d\varepsilon_i$. Подставляя в это выражение соотношения (2) и учитывая уравнение (1), получим:

$$\varepsilon_i = \int_{x_0}^{x_0+l} B v dx = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \int_{x_0}^{x_0+l} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \left(\frac{x_0 + l}{x_0} \right).$$

Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, возникающая на концах проводника, будет численно равна ε_i . Таким образом,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \left(\frac{x_0 + l}{x_0} \right).$$

Вычисление.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 20 \cdot 3}{2\pi} \ln \left(\frac{1+0,5}{1} \right) = 4,7 \cdot 10^{-5} \text{ В} = 47 \text{ мкВ}.$$

Задача 10. Материальная точка совершает синусоидальные гармонические колебания с частотой $\nu = 500$ Гц и амплитудой $A = 0,02$ см. Определить средние значения скорости $\langle v \rangle$ и ускорения $\langle a \rangle$ точки на пути от её крайнего положения до положения равновесия, а также найти максимальное значение этих величин: v_{max} и a_{max} .

Дано: $x = A \sin(2\pi\nu t + \varphi_0)$, $\nu = 500$ Гц, $A = 2 \cdot 10^{-4}$ м.

Найти: $\langle v \rangle$, $\langle a \rangle$, v_{max} , a_{max} .

Решение. По определению средней скорости имеем: $\langle v \rangle = \frac{l}{\Delta t}$, где

l – путь, пройденный материальной точкой за время Δt . По условию задачи, $l = A$, а $\Delta t = T/4$, поскольку за время, равное периоду T колебаний, материальная точка проходит путь, равный $4A$. Отсюда получим:

$$\langle v \rangle = \frac{4A}{T} = 4A\nu. \quad (1)$$

Материальная точка совершает гармонические колебания по закону $x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$, где $\omega = 2\pi\nu$ – круговая частота колебаний. Мгновенная скорость точки v_x и его ускорение a_x , по определению, определяются соотношениями:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0) \stackrel{?}{=} v_{\max} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (2)$$

$$a_x = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) \stackrel{?}{=} a_{\max} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

где

$$v_{\max} = A\omega = 2\pi\nu A; \quad (3)$$

$$a_{\max} = A\omega^2 = 4\pi^2\nu^2 A$$

соответственно максимальные значения (амплитуды) скорости и ускорения материальной точкой.

Согласно определению среднего ускорения, имеем: $\langle a \rangle = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t}$,

где v_2 и v_1 – изменения скорости материальной точкой за время Δt . По условию задачи и соотношения (3) имеем: $\Delta t = T/4$, $v_2 = v_{\max} = 2\pi\nu A$, $v_1 = 0$.

Тогда,

$$\langle a \rangle = \frac{2\pi\nu A}{T/4} = 8\pi\nu^2 A. \quad (4)$$

Вычисления. Подставляя числовые данные физических величин в соотношения (1), (2) и (4), получим:

$$\langle v \rangle = 4 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 500 = 0,4 \text{ м/с}; \quad v_{\max} = 2 \cdot 3,14 \cdot 500 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 0,63 \text{ м/с};$$

$$\langle a \rangle = 8 \cdot 3,14 \cdot 500^2 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 1,2 \cdot 10^3 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{\max} = (2 \cdot 3,14 \cdot 500)^2 \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 2 \cdot 10^3 \text{ м/с}^2.$$

Задача 11. Тонкий однородный стержень длиной $L = 1$ м может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, отстоящей на расстоянии $l = 20$ см от его середины (рис. 22). Определить период колебаний стержня, если максимальный угол отклонения от положения равновесия равен $\varphi_{\max} = 8^\circ$.

Дано: $L = 1$ м, $l = 0,2$ м, $\varphi_{\max} = 8^\circ$.

Найти: T .

Решение. Стержень представляет собой физический маятник. При отклонении маятника от положения равновесия на угол φ возникает вращательный момент сил (момент силы тяжести), стремящийся вернуть маятник в положение равновесия. Этот момент, по определению, относительно точки O равен $\vec{M} = \vec{M}_g = \int m\vec{g}$, а численно – $mgl\sin(\alpha)$, где m – масса маятника, l – расстояние между точкой подвеса O и центром масс C маятника.

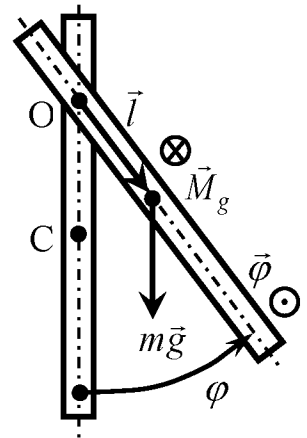


Рис. 22

Основной закон динамики вращательного движения маятника относительно неподвижной оси O имеет вид $M_{gz} = I_z \varepsilon_z$, где I_z – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса маятника (точка O); $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение. Учитывая, что векторы \vec{M}_g и $\vec{\varphi}$ направлены в противоположные стороны (рис. 22), основной закон динамики вращательного движения маятника примет вид

$$I_z \varepsilon = -mgl \sin \varphi.$$

Учитывая, что угловое ускорение по определению $\varepsilon = \ddot{\varphi}$, последнее уравнение можно привести к виду

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I_z} \sin \varphi = 0. \quad (1)$$

Из условия задачи имеем: $\sin(\varphi) = \sin(8^\circ) \approx 0,1392$, а $8^\circ \approx 0,1395$ рад. Следовательно, $\sin(\varphi) \approx \varphi$. С учётом этого уравнение (1) примет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{I_z} \varphi = \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0. \quad (2)$$

Из уравнения (2) следует, что маятник будет совершать гармонические колебания с циклической частотой ω_0 . Период колебаний такого маятника определяется выражением

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{mgl}}. \quad (3)$$

По теореме Штейнера $I_z = I_{0z} + ml^2$, где $I_{0z} = \frac{1}{12}mL^2$ – момент инерции маятника относительно оси, проходящий через его центр масс. С учётом этого уравнение (3) примет вид

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L^2 + 12l^2}{12gl}}. \quad (4)$$

Вычисление. Подставляя в выражение (4) числовые данные, получаем:

$$T = 2 \cdot 3,14 \cdot \sqrt{\frac{1 + 12 \cdot 0,2^2}{12 \cdot 0,2 \cdot 10}} = 1,58 \text{ с.}$$

Задача 12. Складываются 2 гармонических колебания одного направления, выражаемые уравнениями $x_1 = A_1 \sin(\omega(t + \tau_1))$, $x_2 = A_2 \sin(\omega(t + \tau_2))$, где $A_1 = 1$ см, $A_2 = 2$ см, $\tau_1 = 1/6$ с, $\tau_2 = 1/2$ с, $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$. Определить: 1) начальные фазы φ_{01} и φ_{02} составляющих колебаний; 2) амплитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания; 3) уравнение результирующего колебания.

Дано: $x_1 = A_1 \sin(\omega(t + \tau_1))$, $x_2 = A_2 \sin(\omega(t + \tau_2))$, $A_1 = 0,01$ м, $A_2 = 0,02$ см, $\tau_1 = 1/6$ с, $\tau_2 = 1/2$ с, $\omega = \pi \text{ с}^{-1}$.

Найти: 1) φ_{01} , φ_{02} . 2) A , φ . 3) $x = x_1 + x_2$.

Решение.

1. Уравнение гармонического колебания имеет вид $\xi = A \sin(\omega t + \varphi_0)$. Для нахождения начальных фаз складываемых колебаний φ_{01} и φ_{02} преобразуем уравнения, заданные в условии задачи, к такому же виду: $x_1 = A_1 \sin(\omega t + \omega\tau_1)$, $x_2 = A_2 \sin(\omega t + \omega\tau_2)$. Отсюда находим, что

$$\varphi_{01} = \omega\tau_1, \quad \varphi_{02} = \omega\tau_2. \quad (1)$$

2. Для определения амплитуды A результирующего колебания воспользуемся методом векторных диаграмм (рис. 23). Согласно данному методу, векторы \vec{A}_1 и \vec{A}_2 вращаются против часовой стрелки, а из условия задачи – и с одинаковой угловой скоростью ω ($\omega = \omega_1 = \omega_2$). Следовательно, разность фаз колебаний $\Delta\varphi = (\varphi_{01} - \varphi_{02})$, и величина результирующей амплитуды A сохраняется постоянной.

По теореме косинуса имеем:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos \beta,$$

где $\beta = (180 - \Delta\varphi)$.

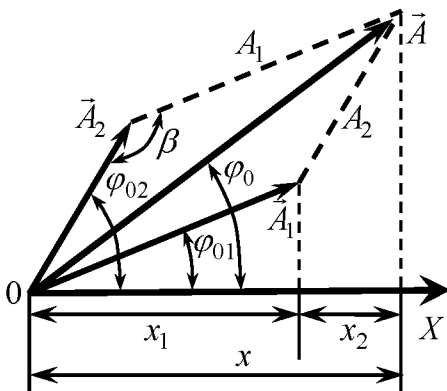


Рис. 23

Таким образом, амплитуда результирующих колебаний равна

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \varphi_0}. \quad (2)$$

Тангенс начальной фазы φ_0 результирующего колебания найдём из соотношения $\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}}$, откуда начальная фаза

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \left(\frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}} \right). \quad (3)$$

3. Согласно условию задачи, складываемые колебания имеют одинаковые циклические частоты ($\omega_1 = \omega_2$). Следовательно, и результирующие колебания будут иметь такую же циклическую частоту ($\omega = \omega_1 = \omega_2$). Таким образом, уравнение результирующего колебания будет иметь вид

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (4)$$

где A и φ_0 определяются выражениями (2) и (3).

Вычисления. Подставляя в выражения (1), (2) и (3) числовые данные, получаем:

$$A = \sqrt{0,01^2 + 0,02^2 + 2 \cdot 0,01 \cdot 0,02 \cdot \cos \pi/3} = 0,0265 \text{ м} = 2,65 \text{ см};$$

$$\varphi_0 = \operatorname{arctg} \left(\frac{0,01 \sin \pi/6 + 0,02 \sin \pi/2}{0,01 \cos \pi/6 + 0,02 \cos \pi/2} \right) = 0,394\pi;$$

$$x = 2,65 \sin(\pi(t + 0,394)) \text{ см}.$$

Задача 13. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C = 5 \text{ мкФ}$ и катушки индуктивностью $L = 0,2 \text{ Гн}$. Определить максимальную силу тока I_0 в контуре, если максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора $U_0 = 90 \text{ В}$. Сопротивлением контура R пренебречь.

Дано: $C = 5 \text{ мкФ}$, $L = 0,2 \text{ Гн}$, $U_0 = 90 \text{ В}$, $R = 0$.

Найти: I_0 .

Решение. Рассмотрим 2 способа решения задачи.

1-й способ. По условию сопротивление R контура пренебрежимо мало. Следовательно, заряд на конденсаторе со временем меняется по гармоническому закону: $q = q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$, где

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1)$$

– циклическая частота колебаний в контуре.

В этом случае напряжение на конденсаторе будет меняться по закону: $U = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = U_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$,

где

$$U_0 = q_0/C \quad (2)$$

– максимальная разность потенциалов на обкладках конденсатора.

Ток i в цепи по определению: $i = \frac{dq}{dt} = q_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$,

где

$$I_0 = q_0 \omega_0 \quad (3)$$

– максимальный ток в цепи.

Подставляя в выражение (3) соотношение (1) и выражение для заряда q_0 из (2), получим искомую формулу для определения I_0 :

$$I_0 = CU_0 \frac{1}{\sqrt{LC}} = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (4)$$

2-й способ. В процессе незатухающих электромагнитных колебаний полная электромагнитная энергия контура W , равная сумме энергий электрического поля конденсатора $CU^2/2$ и магнитного поля катушки $LI^2/2$, остается постоянной. В те моменты, когда конденсатор максимально заряжен ($U = U_0$), сила тока в цепи равна 0. При этом полная энергия контура сосредоточена в конденсаторе: $W = CU_0^2/2$. В момент времени, когда конденсатор разряжен ($U = 0$), сила тока достигает максимального значения I_0 . В эти моменты времени полная энергия контура сосредоточена в катушке индуктивности: $W = LI_0^2/2$.

Из сказанного следует, что $CU_0^2/2 = LI_0^2/2$, откуда получаем уравнение для I_0 , аналогичное уравнению (4).

Вычисление.

$$I_0 = 90 \cdot \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-6}}{0,2}} = 0,45 \text{ А.}$$

Задача 14. Точка M движется согласно уравнениям: $x = a \cos(kt)$, $y = a \sin(kt)$, $z = b \cdot t$, где a , k , b – известные постоянные. Определить: 1) уравнение траектории точки; 2) скорость и ускорение точки в произвольный момент времени; 3) закон движения точки по траектории, рассчитывая расстояние l от начального положения точки.

Дано: $x = a \cos(kt)$, $y = a \sin(kt)$, $z = bt$, a , k , b , $l(t=0) = 0$.

Найти: $f(x,y,z)$, $v(t)$, $a(t)$, $l(t)$.

Решение. По условию задачи имеем:

$$x = a \cos(kt); \quad (1)$$

$$y = a \sin(kt); \quad (2)$$

$$z = b \cdot t. \quad (3)$$

1. Для определения уравнений траектории точки выразим из уравнения (3) время t и подставим это значение в (1) и (2):

$$x = a \cos\left(\frac{k}{b}z\right), \quad y = a \sin\left(\frac{k}{b}z\right).$$

Это уравнение винтовой линии, навитой на поверхность цилиндра радиусом a (рис. 24).

В самом деле, из уравнений (1) и (2) следует, что за время $t = 2\pi/k$ проекция точки на плоскость XOY описывает окружность радиусом a ($x^2 + y^2 = a^2$). За это же время точка переместится вдоль оси OZ (уравнение (3)) на величину

$$h = \frac{2\pi}{k}b,$$

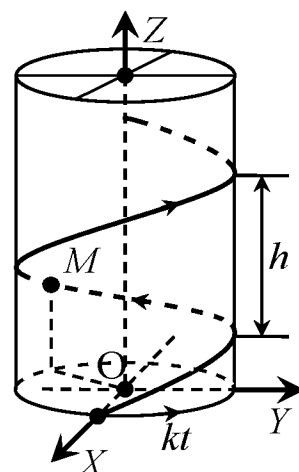


Рис. 24

называемую шагом винтовой линии.

2. Вычислим скорость точки. Проекции скорости на неподвижные оси координат равны

$$v_x = x'_t = -ak \sin(kt); \quad v_y = y'_t = ak \cos(kt); \quad v_z = z'_t = b.$$

Модуль скорости точки определяется соотношением

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{a^2 k^2 + b^2}. \quad (4)$$

3. Для определения ускорения точки найдём её проекции на оси координат, вычисляя первые производные по времени от проекций скорости:

$$a_x = v'_x = x''_t = -ak^2 \cos(kt);$$

$$a_y = v'_y = y''_t = -ak^2 \sin(kt);$$

$$a_z = v'_z = z''_t = 0.$$

Модуль ускорения точки определим по формуле

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a^2 k^4 (\cos^2(kt) + \sin^2(kt))} = ak^2.$$

4. Для определения закона движения точки по траектории определим элемент дуги траектории: $dl = v dt$. Подставляя в это выражение уравнение (4) для скорости точки, получим:

$$dl = v dt = \sqrt{a^2 k^2 + b^2} dt.$$

Интегрируя это равенство, учитывая, что отсчёт длины дуги начинается одновременно с отсчетом времени (при $t = 0, l = 0$), получим:

$$l = \int_0^t \sqrt{a^2 k^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 k^2 + b^2} t.$$

Таким образом, закон движения точки по винтовой линии имеет вид

$$l = \sqrt{a^2 k^2 + b^2} t.$$

Пример 15. Груз массой m , подвешенный к концу пружины, движется в жидкости. Коэффициент жесткости пружины k . Сила сопротивления движению пропорциональна скорости груза: $\vec{F} = -b\vec{v}$, где $b > 0$ – постоянный коэффициент пропорциональности. Найти уравнение движения груза, если в начальный момент времени груз был смещен из положения равновесия на x_0 и ему была сообщена вниз начальная скорость v_0 . Силой Архимеда пренебречь.

Дано: $m, k, \vec{F} = -b\vec{v}, b > 0, x(t=0) = x_0, v(t=0) = v_0$.

Найти: $x(t)$.

Решение. Направим ось OX вдоль пружины по вертикали вниз (рис 25). Начало отсчета по оси расположим в положении устойчивого равновесия груза (точка O'). В этом положении к грузу приложены две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости пружины $F_{\text{упр}} = kx_0$, направ-

ленная по вертикали вверх. Так как в этом положении груз находится в равновесии, то $mg - F_{\text{упр}} = 0$. Следовательно,

$$kx_0 = mg. \quad (1)$$

На рис. 25 изображен груз в промежуточном положении с координатой $x > 0$. При этом пружина получит удлинение $x_0 + x$, а проекция на ось OX силы упругости пружины направлена по вертикали вверх и равна

$$F_x = -k(x_0 + x). \quad (2)$$

Предположим, что груз движется в сторону возрастания абсциссы OX . В этом случае сила сопротив-

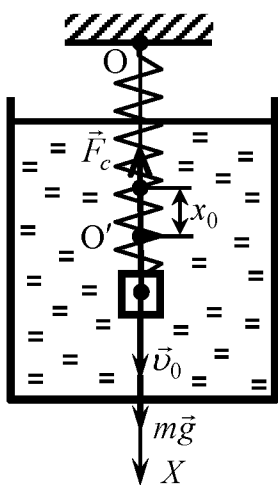


Рис. 25

ления движению груза направлена противоположно скорости, т.е. по вертикали вверх:

$$F_{cx} = -b v_x. \quad (3)$$

В этом случае дифференциальное уравнение движения груза с учётом (2) и (3) имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - kx_0 - kx - b v_x. \quad (4)$$

Первые два слагаемых в правой части этого уравнения, на основании (1), сокращаются. Далее, заменяя в (4) слагаемое v_x на $\frac{dx}{dt}$, a_x на $\frac{d^2 x}{dt^2}$ и деля все уравнение на m , получим:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (5)$$

где $\beta = \frac{b}{2m}$; $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Уравнение (5) представляет собой обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Для его решения применим метод характеристических уравнений. Это уравнение для (5) имеет вид

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0,$$

а его решение

$$\lambda_{1,2} = -\beta \mp \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \quad (6)$$

Таким образом, общее решение уравнения (5) имеет вид

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (7),$$

где C_1 и C_2 – произвольные (в общем случае комплексные) постоянные.

Для того чтобы из общего решения выделить те, которые описывают поведение конкретной системы, необходимо воспользоваться начальными условиями. В данной задаче они имеют следующий вид: при $t = 0$, $x = x_0$, $v_x = v_{0x}$.

Анализ уравнений (6) показывает, что существуют две области значений параметров β и ω_0 , при которых поведение решения (7) качественно различно. Это области, соответствующие условиям: 1) $\beta < \omega_0$, 2) $\beta > \omega_0$.

Рассмотрим в отдельности эти случаи.

1. $\beta < \omega_0$.

Для простоты введем следующее обозначение: $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

Тогда решения характеристического уравнения имеют вид

$$\lambda_{1,2} = -\beta \mp \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta \mp i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta \mp i\omega.$$

Так как $\lambda_{1,2}$ являются комплексными, то решение (7) принимает вид

$$\hat{x} = e^{-\beta t} \left(\hat{C}_1 e^{i\omega t} + \hat{C}_2 e^{-i\omega t} \right), \quad (7)^*$$

где \hat{C}_1 и \hat{C}_2 – произвольные комплексные постоянные, а \hat{x} – комплексная переменная.

Физический смысл имеет только действительная часть уравнения (7)*:

$x = \operatorname{Re}(\hat{x})$. Воспользовавшись уравнением Эйлера, находим общее

уравнение движения груза:

$$x = e^{-\beta t} [C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)]. \quad (8)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 определим выражение для скорости груза:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = e^{-\beta t} [-C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t] - \beta e^{-\beta t} [C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t]. \quad (9)$$

Подставив в уравнение (8) $t = 0$ и $x = x_0$, а в уравнение (9) $t = 0$ и $v_x = v_{0x}$, получим:

$$C_1 = x_0; \quad C_2 = \frac{v_{x0} + \beta x_0}{\omega}.$$

Внося выражения для C_1 и C_2 в уравнение (8), найдём

$$x = e^{-\beta t} \left[x_0 \cos \omega t + \frac{v_{x0} + \beta x_0}{\omega} \sin \omega t \right]. \quad (10)$$

Преобразуем полученное уравнение (10). Для этого положим

$$x_0 = A \sin \varphi, \quad \text{а} \quad \frac{v_{x0} + \beta x_0}{\omega} = A \cos \varphi, \quad (11)$$

где A и φ – постоянные константы.

С учётом этих обозначений, уравнение (10) принимает вид

$$x = A e^{-\beta t} [\sin \varphi \cos \omega t + \cos \varphi \sin \omega t] = A e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi).$$

Таким образом, окончательное уравнение движения груза примет вид

$$x = Ae^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi), \quad (12)$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$; $A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_{x0} + \beta x_0}{\omega}\right)^2}$, $\alpha = \arctg \frac{x_0 \omega}{v_{x0} + \beta x_0}$.

Выражения для постоянных A и φ определены из уравнений (11).

Анализ уравнения (12) показывает, что груз в данном случае совершает гармонические колебания по закону $x = A_0 \sin(\omega t + \varphi)$, причём амплитуда этих колебаний $A_0 = Ae^{-\beta t}$ уменьшается со временем: груз совершает затухающие колебания. График $x(t)$ при затухающих колебаниях приведён на рис.26.

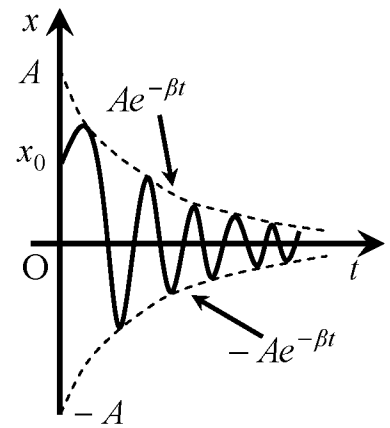


Рис. 26

2. $\beta > \omega_0$.

Так как $\beta > \omega_0$, то корни характеристического уравнения (6) λ_1 и λ_2 являются действительными и отрицательными. Следовательно, уравнение груза имеет вид

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (13)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 определим выражение для скорости груза:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = C_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (14)$$

Подставляя в уравнение (13) $t = 0$, $x = x_0$, а в уравнение (14) $t = 0$, $v_x = v_{x0}$, получим систему уравнений:

$$x_0 = C_1 + C_2; \quad v_{x0} = C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2.$$

Откуда

$$C_1 = -\frac{\lambda_2 x_0 - v_{x0}}{\lambda_1 - \lambda_2}; \quad C_2 = -\frac{\lambda_1 x_0 - v_{x0}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Заменяя в уравнении (13) C_1 и C_2 выведенными выражениями, окончательно находим уравнение движения груза в данном случае:

$$x = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left[(\lambda_2 x_0 - v_{x0}) e^{\lambda_1 t} - (\lambda_1 x_0 - v_{x0}) e^{\lambda_2 t} \right]. \quad (15)$$

Запишем уравнение (15), воспользовавшись выражениями для λ_1 и λ_2 из (6) и гиперболическими функциями:

$$x = \frac{e^{-\beta t}}{\omega} \left[(x_0 + \beta x_0) \operatorname{sh} \omega t + x_0 \omega \operatorname{ch} \omega t \right] \quad (16)$$

где $\omega = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$.

Таким образом, движение груза является аperiodическим и затухающим. В этой части задачи актуален следующий вопрос: переходит ли груз через положение устойчивого равновесия (точка O' на рис. 25). Для ответа на данный вопрос необходимо приравнять x в уравнении (16) нулю. Один корень полученного уравнения, несомненно, будет $t = \infty$, что соответствует затуханию движения. Число решений, удовлетворяющих условию $t > 0$, соответствует числу перехода груза через положение равновесия. В случае, если $t < 0$, это указывает на отсутствие перехода груза через положение устойчивого равновесия груза. На рис. 27 приведены частные случаи зависимости $x(t)$ в случае аperiodического возвращения системы в состояние устойчивого равновесия.

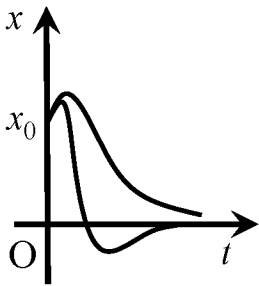


Рис. 27

4.3. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 4

Таблица 2

Варианты	Номера задач									
0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
1	1	11	21	31	41	51	61	71	81	91
2	2	12	22	32	42	52	62	72	82	92
3	3	13	23	33	43	53	63	73	83	93
4	4	14	24	34	44	54	64	74	84	94
5	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95
6	6	16	26	36	46	56	66	76	86	96
7	7	17	27	37	47	57	67	77	87	97
8	8	18	28	38	48	58	68	78	88	98
9	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99

1. Бесконечно длинный проводник с током $I = 100$ А изогнут так, как это показано на рис. 28. Определить магнитную индукцию \vec{B} в точке О. Радиус дуги $R = 10$ см.

2. По двум бесконечно длинным проводникам, скрещенным под прямым углом, текут токи I и $2I$ ($I = 100$ А). Определить магнитную индукцию \vec{B} в точке А (рис. 29). Расстояние $d = 10$ см.

3. По двум бесконечно длинным проводникам, скрещенным под прямым углом, текут токи I и $2I$ ($I = 100$ А). Определить магнитную индукцию \vec{B} в точке С, равноудаленной от проводников на расстояние $d = 10$ см. (рис. 29).

4. По бесконечно длинному проводнику, изогнутому так, как это показано на рис. 30, течёт ток $I = 200$ А. Определить магнитную индукцию \vec{B} в точке О. Радиус дуги $R = 10$ см, $\alpha = 2\pi/3$.

5. По тонкому кольцу радиусом $R = 20$ см течёт ток $I = 100$ А (рис. 31). Определить магнитную индукцию \vec{B} на оси кольца в точке А. $h = 0,5R$.

6. По тонкому кольцу радиусом $R = 5$ см течёт ток $I = 80$ А. Определить магнитную индукцию \vec{B} в точке А, равноудаленной от точек кольца на расстояние $r = 10$ см (рис. 31).

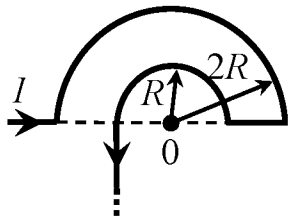


Рис. 28

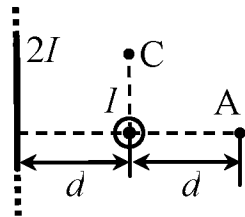


Рис. 29

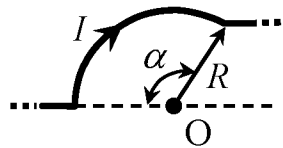


Рис. 30

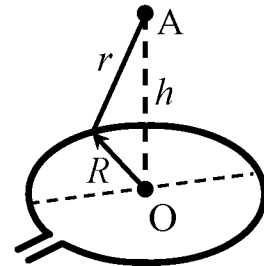


Рис. 31

7. По бесконечно длинному проводнику, изогнутому так, как это показано на рис. 32, течёт ток $I = 200$ А. Определить магнитную индукцию \vec{B} в точке O. Радиус дуги $R = 10$ см, $\alpha = 2\pi/3$.

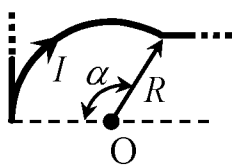


Рис. 32

8. По бесконечно длинному проводнику, изогнутому так, как это показано на рис. 32, течёт ток $I = 100$ А. Определить магнитную индукцию \vec{B} в точке O. Радиус дуги $R = 20$ см, $\alpha = \pi/3$.

9. По двум бесконечно длинным, прямым параллельным проводникам текут одинаковые токи $I = 60$ А. Определить магнитную индукцию \vec{B} в точке A, равноудаленной от проводников на расстояние $r = 10$ см. Расстояние между проводниками $a = 5$ см.

10. Бесконечно длинный проводник с током $I = 50$ А изогнут под прямым углом. Определить магнитную индукцию \vec{B} в точке A, лежащей на биссектрисе прямого угла на расстоянии $d = 10$ см от его вершины.

11. По трем параллельным прямым проводникам, находящимся на одинаковом расстоянии $d = 20$ см друг от друга, текут одинаковые токи $I = 400$ А. В двух проводниках направления токов совпадают. Определить силу F , действующую на отрезок проводника длиной $l = 1$ м каждого проводника.

12. Квадратная проволочная рамка расположена в одной плоскости с длинным прямым проводником так, что две её стороны параллельны проводнику. По рамке и проводнику текут одинаковые токи $I = 200$ А. Определить силу F , действующую на рамку, если ближайшая к проводнику сторона рамки находится от него на расстоянии, равном её длине.

13. По прямому, бесконечно длинному горизонтальному проводнику пропускают ток $I_1 = 20$ А. Под ним на расстоянии $R = 2$ см находится параллельный ему незакрепленный алюминиевый проводник, по которому пропускают ток $I_2 = 3$ А. Определить, какова

должна быть площадь поперечного сечения алюминиевого проводника, чтобы он находился в равновесии.

14. Шины генератора длиной $l = 4$ м находятся на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Найти силу взаимного отталкивания шин при коротком замыкании, если ток короткого замыкания $I_{кз} = 5$ кА.

15. Тонкое проводящее кольцо с током $I = 40$ А помещено в однородное магнитное поле ($B = 80$ мТл). Плоскость кольца перпендикулярна линиям магнитной индукции. Радиус R кольца равен 20 см. Найти силу F , растягивающую кольцо.

16. Горизонтальные рельсы, расположенные на расстоянии $l = 1$ м друг от друга, находятся в однородном магнитном поле, индукция которого направлена вертикально. На рельсах, перпендикулярно к ним, лежит железный стержень массой $m = 2$ кг. Какой ток нужно пропустить по стержню, чтобы он начал двигаться? Индукция поля $B = 0,5$ Тл, коэффициент трения $\mu = 0,3$.

17. Проводник массой $m = 0,3$ кг и длиной $l = 0,5$ м лежит на горизонтальных рельсах, расположенных в горизонтальном параллельном рельсам магнитном поле с индукцией $B = 0,5$ Тл. При пропускании по проводнику тока $I = 20$ А для того, чтобы сдвинуть проводник, требуется приложить горизонтальную силу $F_1 = 0,5$ Н. При изменении направления тока в проводнике величина требуемой силы F_2 возрастет. Определить новое значение этой силы.

18. Горизонтальные рельсы находятся на расстоянии $l = 0,3$ м друг от друга. На них лежит стержень. Стержень перпендикулярен рельсам. Какой должна быть индукция магнитного поля B , чтобы стержень начал двигаться, если по нему пропускают ток $I = 50$ А? Коэффициент трения стержня о рельсы $\mu = 0,2$, масса стержня $m = 0,5$ кг. Вектор магнитной индукции лежит в вертикальной плоскости, перпендикулярной рельсам, и направлен под углом $\alpha = 30^\circ$ к стержню.

19. Между полюсами магнита на двух тонких вертикальных проволочках подвешен горизонтальный линейный проводник массой $m = 20$ г и длиной $l = 20$ см. Индукция однородного магнитного поля направлена вертикально и равна $B = 0,4$ Тл. Весь проводник находится в магнитном поле. На какой угол α от вертикали отклонятся проволочки, если по проводнику пропустить ток силой $I = 2$ А? Массами проволочек пренебречь.

20. Тонкий провод в виде дуги, составляющей треть кольца радиу-

са $R = 15$ см, находится в однородном магнитном поле ($B = 0,2$ Тл). По проводу течёт ток $I = 20$ А. Силовые линии магнитного поля перпендикулярны плоскости дуги из провода. Определить силу F , действующую на провод.

21. По тонкому кольцу радиусом $R = 10$ см равномерно распределен заряд с линейной плотностью $\tau = 50$ нКл/м. Кольцо вращается относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр, с частотой $n = 10$ с⁻¹. Определить магнитный момент \vec{p}_m , обусловленный вращением кольца.

22. Диск радиусом $R = 8$ см несет равномерно распределенный по поверхности заряд ($\sigma = 100$ нКл/м²). Определить магнитный момент \vec{p}_m , обусловленный вращением диска относительно оси, проходящей через его центр и перпендикулярной плоскости диска. Угловая скорость вращения $\omega = 60$ рад/с.

23. Стержень длиной $l = 20$ см заряжен равномерно распределенным зарядом с линейной плотностью $\tau = 0,2$ мкКл/м. Стержень вращается с частотой $n = 10$ с⁻¹ относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец. Определить магнитный момент \vec{p}_m , обусловленный вращением стержня.

24. Тонкое кольцо радиусом $R = 10$ см несет равномерно распределенный заряд $Q = 80$ нКл. Кольцо вращается с угловой скоростью $\omega = 50$ рад/с относительно оси, совпадающей с одним из диаметров кольца. Найти магнитный момент p_m , обусловленный вращением кольца.

25. Заряд $Q = 0,1$ мкКл равномерно распределен по стержню длиной $l = 50$ см. Стержень вращается с угловой скоростью $\omega = 20$ рад/с относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Найти магнитный момент p_m , обусловленный вращением стержня.

26. По поверхности диска радиусом $R = 15$ см равномерно распределен заряд $Q = 0,2$ мкКл. Диск вращается с угловой скоростью $\omega = 30$ рад/с относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Определить магнитный момент p_m , обусловленный вращением диска.

27. Тонкое кольцо массой $m = 10$ г и радиусом $R = 8$ см несет заряд, равномерно распределенный с линейной плотностью $\tau = 10$ нКл/м. Кольцо равномерно вращается с частотой $n = 15$ с⁻¹

относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр. Определить: 1) магнитный момент кругового тока, создаваемого кольцом; 2) отношение магнитного момента к моменту импульса кольца.

28. Ион с кинетической энергией $T = 1$ кэВ попал в однородное магнитное поле ($B = 21$ мТл) и стал двигаться по окружности. Определить магнитный момент \vec{p}_m эквивалентного кругового тока.

29. Ион, попав в однородное магнитное поле (индукция $B = 0,01$ Тл), стал двигаться по окружности. Определить кинетическую энергию T (в эВ) иона, если магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока равен $1,6 \cdot 10^{-14}$ А·м².

30. Электрон в атоме водорода движется вокруг ядра (протона) по окружности радиусом $R = 53$ пм. Определить магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока.

31. Два иона разных масс с одинаковыми зарядами влетели в однородное магнитное поле и стали двигаться по окружностям радиусами $R_1 = 3$ см и $R_2 = 1,73$ см. Определить отношение масс ионов, если они прошли одинаковую ускоряющую разность потенциалов.

32. Однозарядный ион натрия прошел ускоряющую разность потенциалов $U = 1$ кВ и влетел перпендикулярно линиям магнитной индукции в однородное поле индукцией $B = 0,5$ Тл. Определить атомную массу A иона, если он описал окружность радиусом $R = 4,37$ см.

33. Электрон прошел ускоряющую разность потенциалов $U = 800$ В и, влетев в однородное магнитное поле индукцией $B = 4,7$ мТл, стал двигаться по винтовой линии с шагом $h = 6$ см. Определить радиус R винтовой линии.

34. Заряженная частица прошла ускоряющую разность потенциалов $U = 100$ В и, влетев в однородное магнитное поле индукцией $B = 0,1$ Тл, стала двигаться по винтовой линии с шагом $h = 6,5$ см и радиусом $R = 1$ см. Определить отношение заряда частицы к её массе.

35. Электрон влетел в однородное магнитное поле индукцией $B = 200$ мТл перпендикулярно линиям магнитной индукции. Определить силу эквивалентного кругового тока $I_{\text{экв}}$, создаваемого движением электрона в магнитном поле.

36. Протон прошел ускоряющую разность потенциалов $U = 300$ В и влетел в однородное магнитное поле индукцией $B = 20$ мТл под уг-

лом $\alpha = 30^\circ$ к линиям магнитной индукции. Определить шаг h и радиус R винтовой линии, по которой будет двигаться протон в магнитном поле.

37. Альфа-частица, пройдя ускоряющую разность потенциалов U , стала двигаться в однородном магнитном поле индукцией $B = 50$ мТл по винтовой линии с шагом $h = 5$ см и радиусом $R = 1$ см. Определить ускоряющую разность потенциалов, которую прошла альфа-частица.

38. Тело с зарядом $q = 1$ мкКл и массой $m = 1$ г начинает соскальзывать по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 60^\circ$ во внешнем однородном магнитном поле индукцией $B = 0,1$ Тл. Вектор направлен так, что сила нормальной реакции опоры N , B и скорость тела v перпендикулярны друг другу и образуют правую тройку. Определить установившуюся скорость соскальзывания, если коэффициент трения равен $\mu = 0,01$.

39. Однородное магнитное поле индукцией $B = 1,2$ Тл заполняет полупространство $Y > 0$. Вектор \vec{B} направлен вдоль оси OZ . Электрон, обладающий в области $Y < 0$ скоростью с компонентами ($v_x = 100$ км/с; $v_y = 200$ км/с; $v_z = 0$), влетает в магнитное поле и через некоторое время вылетает из него. Найти расстояние между точками входа и выхода.

40. Однородное магнитное поле индукцией $B = 1$ Тл заполняет область пространства, которая является пересечением двух областей: $Y > 0$ и $Y < kX$, где $k = 0,8$ – постоянная величина. Вектор \vec{B} направлен вдоль оси OZ . Электрон, движущийся в плоскости XOY вдоль прямой $X_0 = 0,1$ мм из области $Y < 0$, влетает в магнитное поле и, коснувшись второй границы области, возвращается обратно. Определить скорость электрона.

41. Протон влетел со скоростью $|\vec{v}| = 4 \cdot 10^5$ м/с в скрещенные под углом $\alpha = 120^\circ$ однородные магнитное (индукция $B = 50$ мТл) и электрическое (напряжённость $E = 20$ кВ/м) поля. Определить ускорение \vec{a} протона в момент вхождения в скрещенные поля, если векторы $(\vec{E}; \vec{B}; \vec{v})$ образуют правую тройку векторов.

42. Альфа-частица влетела со скоростью $|\vec{v}| = 2 \cdot 10^6$ м/с в скрещенные под углом $\alpha = 30^\circ$ однородные магнитное (индукция $B = 5$ мТл) и электрическое (напряжённость $E = 30$ кВ/м) поля. Определить ускорение \vec{a} в момент вхождения заряженной частицы в

область пространства, где локализованы поля. Векторы $(\vec{B}; \vec{E}; \vec{v})$ образуют правую тройку векторов.

43. Положительный ион, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 645$ В, влетел в скрещенные под прямым углом однородные магнитное (индукция $B = 1,5$ мТл) и электрическое (напряжённость $E = 200$ В/м) поля. Определить отношение заряда иона к его массе, если ион в этих полях движется прямолинейно.

44. Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = -1,2$ кВ, попал в скрещенные под прямым углом однородные магнитное (индукция $B = 6$ мТл) и электрическое поля. Определить напряжённость \vec{E} электрического поля, если электрон в скрещенных полях движется прямолинейно.

45. Силовые линии однородного магнитного (индукция $B = 2,5$ мТл) и электрического (напряжённость $E = 10$ кВ/м) полей скрещены под прямым углом. Определить ускорение \vec{a} электрона в момент вхождения в область пространства, где локализованы поля, если его скорость $v = 4 \cdot 10^6$ м/с, а векторы $(\vec{v}; \vec{B}; \vec{E})$ образуют правую тройку векторов.

46. Однозарядный ион лития массой $m = 7$ а.е.м. прошел ускоряющую разность потенциалов $U = 300$ В и влетел в скрещенные под прямым углом однородные магнитное и электрическое (напряжённость $E = 2$ кВ/м) поля. Определить магнитную индукцию \vec{B} поля, если траектория иона в скрещенных полях прямолинейная.

47. Альфа-частица, имеющая скорость $v = 2$ Мм/с, влетает под углом $\alpha = 30^\circ$ к силовым линиям однородного магнитного (индукция $B = 1$ мТл) и электрического (напряжённость $E = 1$ кВ/м) полей. Силовые линии полей сонаправлены. Определить ускорение \vec{a} альфа-частица в момент вхождения в область пространства, где локализованы поля.

48. Протон прошел некоторую ускоряющую разность потенциалов U и влетел в однородные поля: магнитное (индукция $B = 5$ мТл) и электрическое (напряжённость $E = 20$ кВ/м). Силовые линии полей взаимно перпендикулярны. Определить разность потенциалов U , если протон в скрещенных полях движется прямолинейно.

49. Силовые линии однородного магнитного и электрического полей сонаправлены. Индукция магнитного поля $B = 2$ мТл, напряжённость электрического поля $E = 1,6$ кВ/м. Перпендикулярно векто-

рам \vec{B} и \vec{E} влетает электрон со скоростью $v = 0,8$ Мм/с. Определить ускорение \vec{a} электрона.

50. В скрещенные под прямым углом однородные магнитное (напряженность $H = 1$ МА/м) и электрическое (напряженность $E = 50$ кВ/м) поля влетел отрицательный ион, скорость которого перпендикулярна векторам \vec{H} и \vec{E} . При какой скорости \vec{v} иона он будет двигаться в скрещенных полях прямолинейно?

51. Магнитный поток Φ сквозь сечение соленоида равен 50 мкВб. Длина соленоида $l = 50$ см. Найти магнитный момент \vec{p}_m соленоида, если его витки плотно прилегают друг к другу.

52. В средней части соленоида, содержащего $n = 8$ вит./см, помещен круговой виток диаметром $d = 4$ см. Плоскость витка расположена под углом $\varphi = 60^\circ$ к оси соленоида. Определить магнитный поток Φ , пронизывающий виток, если по обмотке соленоида течёт ток $I = 1$ А.

53. На длинный картонный каркас диаметром $d = 5$ см уложена однослойная плотная обмотка (виток к витку) из проволоки диаметром $d_0 = 0,2$ мм. Определить магнитный поток Φ , создаваемый таким соленоидом при силе тока $I = 0,5$ А.

54. Квадратный контур со стороной $a = 10$ см, в котором течёт ток $I = 6$ А, находится в магнитном поле ($B = 0,8$ Тл), плоскость которого составляет угол $\alpha = 50^\circ$ к линиям индукции. Какую работу A нужно совершить, чтобы при неизменной силе тока в контуре изменить его форму на окружность?

55. Плоский контур с током $I = 5$ А свободно установился в однородном магнитном поле ($B = 0,4$ Тл). Площадь, контура $S = 200$ см². Поддерживая ток в контуре неизменным, его повернули относительно оси, лежащей в плоскости контура, на угол $\alpha = 40^\circ$. Определить совершенную при этом работу A .

56. Виток, в котором поддерживается постоянная сила тока $I = 60$ А, свободно установился в однородном магнитном поле (индукция $B = 20$ мТл). Диаметр витка $d = 10$ см. Какую работу A нужно совершить для того, чтобы повернуть виток относительно оси, совпадающей с диаметром, на угол $\varphi = \pi/3$?

57. В однородном магнитном поле перпендикулярно линиям индукции расположен плоский контур площадью $S = 100$ см². Поддерживая в контуре постоянную силу тока $I = 50$ А, его переместили в об-

ласть пространства, где поле отсутствует. Определить магнитную индукцию \vec{B} поля, если при перемещении контура была совершена работа $A = 0,4$ Дж.

58. Плоский контур с током $I = 50$ А расположен в однородном магнитном поле (индукция $B = 0,6$ Тл) так, что нормаль к контуру перпендикулярна линиям магнитной индукции. Определить работу, совершаемую силами поля при медленном повороте контура вокруг оси, лежащей в плоскости контура, на угол $\alpha = 30^\circ$. Площадь контура $S = 200$ см².

59. По круговому витку радиусом $R = 5$ см течёт ток $I = 20$ А. Виток расположен в однородном магнитном поле ($B = 40$ мТл) так, что нормаль к плоскости контура составляет угол $\alpha = \pi/6$ с вектором \vec{B} . Определить изменение $\Delta\Pi$ потенциальной энергии контура при его повороте на угол $\varphi = \pi/2$ в направлении увеличения угла α .

60. Квадратная рамка со стороной $a = 10$ см и током $I_1 = 10$ А находится в одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводом. По проводу течёт ток $I_2 = 30$ А в том же направлении, что и ток, протекающий по ближайшей к нему стороне рамки. Расстояние от провода до ближайшей к нему стороны рамки $r_1 = 5$ см. Рамку (оставляя в плоскости провода) медленно перемещают до расстояния $r_2 = 10$ см. Найти работу внешних сил при перемещении рамки.

61. В однородном магнитном поле (индукция $B = 0,1$ Тл) равномерно с частотой $\omega = 31,4$ рад/с вращается стержень длиной $l = 50$ см так, что плоскость его вращения перпендикулярна линиям индукции, а ось вращения проходит через один из его концов. Определить индуцируемую на концах стержня разность потенциалов U .

62. В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,5$ Тл вращается с частотой $n = 10$ с⁻¹ стержень длиной $l = 20$ см. Ось вращения параллельна линиям индукции и проходит через середину стержня перпендикулярно его оси. Определить разность потенциалов U на концах стержня.

63. Тонкий медный проводник массой $m = 5$ г согнут в виде квадрата, и концы его замкнуты. Квадрат помещен в однородное магнитное поле (индукция $B = 0,2$ Тл) так, что его плоскость перпендикулярна линиям поля. Определить заряд Q , который потечёт по проводнику, если квадрат, потянув за противоположные вершины, вытянуть в линию.

64. Плоская рамка из проводника сопротивлением $R = 0,04$ Ом равномерно вращается в однородном магнитном поле (индукция $B = 0,6$ Тл). Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Площадь рамки $S = 200$ см². Определить заряд Q , который потечёт по рамке при изменении угла между нормалью к рамке и линиями индукции: 1) от 0 до 45°; 2) от 45 до 90°.

65. Плоский проволочный виток диаметром $D = 5$ см и сопротивлением $R = 0,02$ Ом находится в однородном магнитном поле ($B = 0,3$ Тл). Плоскость витка составляет угол $\varphi = 40^\circ$ с линиями индукции. Какой заряд Q протечёт по витку при выключении магнитного поля?

66. Плоская рамка, содержащая $N = 200$ витков тонкого проводника, может свободно вращаться относительно оси, лежащей в плоскости рамки. Площадь рамки $S = 50$ см². Ось рамки перпендикулярна линиям индукции однородного магнитного поля ($B = 0,05$ Тл). Определить максимальную ЭДС ε_{\max} , которая индуцируется в рамке при её вращении с частотой $n = 40$ с⁻¹.

67. Прямой проводящий стержень длиной $l = 40$ см находится в однородном магнитном поле ($B = 0,1$ Тл). Концы стержня замкнуты гибким проводником, находящимся вне поля. Сопротивление всей цепи $R = 0,5$ Ом. Какая мощность P потребуется для равномерного перемещения стержня перпендикулярно линиям магнитной индукции со скоростью $v = 10$ м/с?

68. Плоское медное кольцо диаметром $d = 15$ см и массой $m = 10$ г помещено в однородное магнитное поле так, что плоскость кольца составляет угол $\beta = 60^\circ$ с линиями магнитной индукции. Определить индукционный ток в кольце, если индукция магнитного поля меняется по закону $B = B_0 \sin(\omega t)$, где $B_0 = 0,5$ Тл, $\omega = 100$ с⁻¹.

69. На длинный прямой соленоид, имеющий диаметр сечения $d = 3$ см и содержащий $n = 20$ витков на один сантиметр длины, плотно надет круговой виток из медного провода сечением $S = 1,0$ мм². Найти ток в витке, если ток в обмотке соленоида увеличивается с постоянной скоростью $k = \frac{dI}{dt} = 100$ А/с.

70. Магнитный поток через неподвижный контур с сопротивлением $R = 10$ Ом изменяется в течение времени $t = 10$ с по закону $\Phi = at(\tau + t)$, где $\tau = 2$ с, $a = 2$ Вб/с². Найти количество теплоты, выде-

ленное в контуре за это время.

71. Соленоид содержит $N = 800$ витков. Сечение сердечника (из немагнитного материала) $S = 10 \text{ см}^2$. По обмотке течёт ток, создающий поле с индукцией $B = 8 \text{ мТл}$. Определить среднее значение ЭДС самоиндукции, которая возникает на зажимах соленоида, если сила тока уменьшается практически до нуля за время $\Delta t = 0,8 \text{ мс}$.

72. По катушке индуктивностью $L = 8 \text{ мкГн}$ течёт ток $I_1 = 6 \text{ А}$. Определить среднее значение ЭДС $\langle \varepsilon_{\text{си}} \rangle$ самоиндукции, возникающей в контуре, если сила тока изменится практически до нуля за время $\Delta t = 5 \text{ мс}$.

73. Соленоид сечением $S = 10 \text{ см}^2$ содержит $N = 10^3$ витков. При силе тока $I = 5 \text{ А}$ магнитная индукция B поля внутри соленоида равна $0,05 \text{ Тл}$. Определить индуктивность соленоида.

74. На картонный каркас длиной $l = 0,8 \text{ м}$ и диаметром $d = 4 \text{ см}$ намотан в один слой проводник диаметром $d_0 = 0,25 \text{ мм}$ так, что витки плотно прилегают друг к другу. Вычислить индуктивность L получившегося соленоида.

75. Катушка, намотанная на немагнитный цилиндрический каркас, имеет $N = 250$ витков и индуктивность $L_1 = 36 \text{ мГн}$. Чтобы увеличить индуктивность катушки до $L_2 = 100 \text{ мГн}$, обмотку катушки сняли и заменили обмоткой из более тонкой проволоки с таким расчетом, чтобы длина катушки осталась прежней. Сколько витков оказалось в катушке после перемотки?

76. Индуктивность L соленоида, намотанного в один слой на немагнитный каркас, равна $0,5 \text{ мГн}$. Длина l соленоида равна $0,6 \text{ м}$, а диаметр – $d = 2 \text{ см}$. Определить отношение числа витков соленоида N к его длине l .

77. В электрической цепи, содержащей резистор сопротивлением $R = 20 \text{ Ом}$ и катушку индуктивностью $L = 0,06 \text{ Гн}$, течёт ток $I = 20 \text{ А}$. Определить силу тока I в цепи через $\Delta t = 0,2 \text{ мс}$ после её размыкания.

78. Цепь состоит из катушки индуктивностью $L = 0,1 \text{ Гн}$ и источника тока. Источник тока отключили, не разрывая цепи. Время, через которое сила тока уменьшится до $\alpha = 0,001$ первоначального значения, равно $t = 0,07 \text{ с}$. Определить сопротивление катушки.

79. Источник тока замкнули на катушку сопротивлением $R = 10 \text{ Ом}$ и индуктивностью $L = 0,2 \text{ Гн}$. Через какое время сила тока в цепи достигнет 50% от его максимального значения?

80. Источник тока замкнули на катушку сопротивлением $R = 20$ Ом. Через время $t = 0,1$ с сила тока I в катушке достигла $\alpha = 0,95$ предельного значения. Определить индуктивность L катушки.

81. Тело массой $m = 100$ г совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 15$ см. Максимальная скорость точки $v_{max} = 30$ м/с, а начальная фаза колебаний $\varphi_0 = 45^\circ$. Определить в момент времени $t = 0,4T$, где T – период колебаний, возвращающую силу F и импульс тела p . Построить графики зависимости (в пределах одного периода с числовыми значениями) $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$.

82. Тело массой $m = 150$ г совершает гармонические колебания по закону $x = 0,3\cos[(\pi/2)t + \pi/6]$ м. Определить в момент времени $t = 0,8T$, где T – период колебаний, кинетическую энергию тела W_k и её импульс p_x . Построить графики зависимости (в пределах одного периода с числовыми значениями) $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$.

83. Тело массой $m = 20$ г, совершающее гармонические колебания с частотой $\nu = 1$ Гц, в момент времени $t = 0$ проходит положение, определяемое координатой $x_0 = 5$ см, со скоростью $v_0 = 15$ см/с. Определить в момент времени $t = 0,8T$, где T – период колебаний, кинетическую энергию тела W_k и её импульс p . Построить графики зависимости (в пределах одного периода с числовыми значениями) $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$.

84. Тело массой $m = 10$ г совершает гармонические колебания по закону $x = 0,1\cos(4\pi t + \pi/4)$ м. Определить в момент времени $t = 0,2T$, где T – период колебаний, значение возвращающей силы F и потенциальную энергию тела W_p . Построить графики зависимости (в пределах одного периода с числовыми значениями) $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$.

85. Сила тока в колебательном контуре, содержащем катушку индуктивностью $L = 0,1$ Гн и конденсатор, со временем изменяется согласно уравнению $i = -0,1\sin(200\pi t)$ А. Определить энергии электрического $W_{\mathcal{E}}$ и магнитного W_M полей в момент времени $t = T/3$, где T – период колебаний. Построить графики (в пределах одного периода и числовыми коэффициентами) зависимости заряда $q(t)$ с напряжения на обкладках конденсатора $u(t)$.

86. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 0,1$ Гн и конденсатора ёмкостью $C = 39,5$ мкФ. В начальный момент времени заряд конденсатора максимален и равен $Q_m = 3$ мкКл. Пренебрегая сопротивлением контура, определить в момент времени

$t = T/6$, где T – период колебаний, энергию электрического $W_{\text{Э}}$ и магнитного $W_{\text{М}}$ полей. Построить графики (в пределах одного периода с числовыми значениями) зависимости заряда $q(t)$, напряжения $u(t)$ на обкладках конденсатора и силы тока $i(t)$ в цепи.

87. Колебательный контур содержит соленоид (длина $l = 5$ см, площадь поперечного сечения $S_1 = 1,5$ см², число витков $N = 500$) и плоский конденсатор (расстояние между пластинами $d = 1,5$ мм, площадь пластин $S_2 = 100$ см²). В начальный момент времени ток в цепи максимален и равен $I_m = 3$ мкА. Пренебрегая сопротивлением контура, определить в момент времени $t = T/3$, где T – период колебаний, энергию электрического $W_{\text{Э}}$ и магнитного $W_{\text{М}}$ полей. Построить графики (в пределах одного периода и числовыми значениями) зависимости заряда $q(t)$, напряжения $u(t)$ на обкладках конденсатора и силы тока $i(t)$ в цепи.

88. Маятник состоит из стержня ($l = 30$ см, $m = 50$ г), на верхнем конце которого укреплен маленький шарик (материальная точка массой $m' = 40$ г), на нижнем – шарик ($R = 5$ см, $M = 100$ г). Маятник отклонили на угол $\alpha_0 = 0,01$ рад и в момент времени $t_0 = 0$ отпустили. Пренебрегая сопротивлением среды, определить в момент времени $t = T/4$, где T – период колебаний, кинетическую энергию маятника. Построить графики (в пределах одного периода с числовыми значениями) зависимости угла поворота $\alpha(t)$ и угловой скорости маятника $\omega(t)$.

89. Однородный диск массой $m = 2$ кг и радиусом $R = 20$ см подвешен на горизонтальной оси, проходящей на расстоянии $l = 15$ см от центра диска. Диск отклонили на угол $\alpha_0 = 0,1$ рад и в момент времени $t_0 = 0$ отпустили. Пренебрегая сопротивлением среды, определить в момент времени $t = T/4$, где T – период колебаний, результирующий момент внешних сил, действующих на диск. Построить графики (в пределах одного периода с числовыми коэффициентами) зависимости угла поворота $\alpha(t)$ и угловой скорости маятника $\omega(t)$.

90. Тонкий однородный стержень массой $m = 4$ кг и длиной $l = 60$ см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, отстоящей на расстояние $x = 15$ см от его середины. Стержень отклонили на угол $\alpha_0 = 0,08$ рад и в момент времени $t_0 = 0$ отпустили. Пренебрегая сопротивлением среды, определить в момент времени

$t = 0,6T$, где T – период колебаний, момент импульса диска. Построить графики (в пределах одного периода с числовыми коэффициентами) зависимости угла поворота $\alpha(t)$ и угловой скорости маятника $\omega(t)$.

91. Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки длиной $l = 20$ см, на которую намотана медная проволока диаметром $d = 0,5$ мм. Определить ёмкость конденсатора C , если, вычисляя период колебаний по формуле для идеального колебательного контура, мы допускаем ошибку $\varepsilon = 1\%$.

92. Колебательный контур содержит катушку индуктивностью $L = 5$ мГн и конденсатор ёмкостью $C = 0,2$ мкФ. Определить сопротивление контура R и логарифмический декремент затухания, если разность потенциалов u на обкладках конденсатора за $0,1$ мс уменьшился с 90 до 30 В. Написать уравнение зависимости заряда $q(t)$ конденсатора от времени.

93. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 0,2$ мГн и конденсатора площадью пластин $S = 155$ см², расстояние между которыми $d = 1,5$ мм. Сопротивление контура $R = 10$ Ом. В начальный момент времени конденсатор заряжен количеством электричества 100 мКл. Найти логарифмический декремент затухания и написать уравнение зависимости напряжения $u(t)$ на конденсаторе.

94. Колебательный контур содержит соленоид (длина $l = 0,1$ м, площадь поперечного сечения $S_1 = 0,5$ см², число медных витков $N = 500$) и плоский конденсатор (расстояние между пластинами $d = 1,5$ мм, площадь пластин $S_2 = 100$ см²). В начальный момент времени конденсатор заряжен до напряжения $U_0 = 50$ В. Определить логарифмический декремент затухания колебаний и написать уравнение зависимости заряда $q(t)$ на конденсаторе и тока $i(t)$ в цепи.

95. Гиря массой $m = 1$ кг, подвешенная к пружине жёсткостью $k = 50$ Н/м, совершает колебания в среде с коэффициентом сопротивления $r = 0,05$ кг/с. Гирию сместили от положения равновесия на расстояние 5 см и отпустили. Определить логарифмический декремент затухания колебаний, число полных колебаний N , которые должна совершить гиря, чтобы амплитуда его колебаний уменьшилась в 3 раза. За какое время t произойдёт это уменьшение. Написать уравнение колебаний гири $x(t)$.

96. Груз массой $m = 300$ г, подвешенный к пружине жёсткостью $k = 10$ Н/м, совершает колебания в некоторой среде. Логарифмический декремент колебаний $\lambda = 0,004$. Определить число полных колебаний

N , которые должен совершить груз, чтобы амплитуда его колебаний уменьшилась в 3 раза. За какое время t произойдет это уменьшение. Написать уравнение колебаний груза $x(t)$.

97. Материальная точка участвует в двух гармонических колебаниях одного направления: $x_1 = A_1 \cos(\omega t)$ и $x_2 = A_2 \sin(\omega t)$, где $A_1 = 5$ см, $A_2 = 2$ см, $\omega = 2$ с⁻¹. Записать уравнение результирующего колебания груза $x(t)$ и зависимость его скорости $v(t)$.

98. Материальная точка участвует в двух синусоидальных колебаниях одного направления с одинаковыми периодами $T = 2$ с и амплитудами $A_1 = 5$ см, $A_2 = 2$ см. Начальные фаза колебаний соответственно $\varphi_{01} = \pi/3$ и $\varphi_{02} = \pi/6$. Записать уравнение результирующих колебаний материальной точки $x(t)$ и зависимость его скорости $v(t)$.

99. Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями $x = A_1 \cos(\omega t)$ и $y = A_2 \sin(0,5\omega t)$, где $A_1 = 5$ см, $A_2 = 2$ см. Записать уравнение траектории движения материальной точки и построить ее, указав направление движения точки.

100. Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выражаемых уравнениями $x = A_1 \sin(\omega t)$ и $y = A_2 \cos(\omega t)$, где $A_1 = 2$ см, $A_2 = 4$ см. Записать уравнение траектории материальной точки и построить ее, указав направление движения точки.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Электрический заряд. Свойства электрического заряда. Закон сохранения электрического заряда.

2. Взаимодействие электрических зарядов. Точечный заряд. Закон Кулона. Принцип суперпозиции.

3. Электростатическое поле. Напряженность электростатического поля. Силовые линии поля. Принцип суперпозиции электростатических полей.

4. Теорема Гаусса для вектора напряженности электростатического поля в вакууме. Электростатическое поле симметрично распределённых зарядов (бесконечной плоскости, нити, цилиндра, шара, сферы).

5. Работа по перемещению заряда в электростатическом поле. Потенциальная энергия взаимодействия зарядов.

6. Потенциал электростатического поля. Разность потенциалов. Принцип суперпозиции для потенциала электростатического поля. Циркуляция вектора напряженности.

7. Проводники в электростатическом поле.

8. Емкость. Емкость уединённого проводника. Конденсатор. Емкости конденсаторов простейших симметрий (плоской, цилиндрической, сферической).

9. Энергия заряженного уединенного проводника и системы точечных зарядов.

10. Электростатический диполь. Поле диполя. Электрический момент диполя. Диполь в однородном электрическом поле.

11. Диэлектрики в электростатическом поле. Типы диэлектриков и их поляризация. Связанные заряды.

12. Диэлектрическая восприимчивость. Вектор поляризации.

13. Теорема Гаусса для вектора поляризации диэлектрика. Поверхностная плотность связанных зарядов.

14. Вектор электрического смещения. Диэлектрическая проницаемость. Теорема Гаусса и циркуляции для вектора электрического смещения.

15. Граничные условия для векторов \vec{E} и \vec{D} на границе раздела двух диэлектриков.

14. Энергия электрического поля. Объёмная плотность энергии электрического поля.

15. Постоянный ток, условия его возникновения. Плотность тока. Уравнение непрерывности.

16. Электродвижущая сила. Работа сторонних сил по замкнутому контуру.

17. Закон Ома для однородного и неоднородного участка цепи, для замкнутой цепи. Сопротивление проводника.

18. Работа и мощность тока. Закон Джоуля – Ленца. Закон Ома и Джоуля – Ленца в интегральной и дифференциальной формах.

19. Классическая теория электропроводности металлов. Границы применимости законов Ома.

20. Магнитное взаимодействие токов. Магнитное поле. Магнитная индукция. Силовые линии магнитного поля.

21. Закон Био – Савара – Лапласа для элемента тока. Принцип суперпозиции магнитных полей. Магнитное поле прямого и кругового тока.

22. Сила Лоренца и Ампера. Магнитный момент контура с током. Механический момент контура с током в магнитном поле.

23. Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле. Потенциальная энергия контура с током в магнитном поле.

24. Теорема Гаусса и циркуляции для вектора индукции магнитного поля. Магнитное поле соленоида и тороида.

25. Магнитное поле в веществе. Вектор намагничивания. Магнитная восприимчивость и проницаемость. Напряженность магнитного поля.

26. Диа-, пара- и ферромагнетизм. Основная кривая намагничивания ферромагнетика.

27. Магнитомеханические и механомагнитные явления. Атом во внешнем магнитном поле. Орбитальные и спиновые магнитные моменты электрона.

28. Теорема Гаусса и циркуляции для вектора напряженности магнитного поля.

29. Преломление векторов \vec{B} и \vec{H} на границе двух магнетиков.

30. Явление электромагнитной индукции. Закон Фарадея для ЭДС индукции.

31. Явление самоиндукции. Индуктивность. Индуктивность соленоида.

32. Энергия магнитного поля. Плотность энергии магнитного поля.

33. Ток смещения. Уравнения Максвелла. Материальные уравнения.

34. Гармонические колебания. Уравнение гармонических колебаний. Пружинный, физический и математический маятники. Период свободных колебаний.

35. Идеальный колебательный контур. Период свободных колебаний.

36. Затухающие колебания. Уравнение затухающих колебаний. Коэффициент затухания. Время релаксации. Логарифмический декремент затухания.

37. Сложение колебаний одного направления. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Фигуры Лиссажу.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Основные физические константы

Ускорение свободного падения $g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

Гравитационная постоянная $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$.

Число Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$.

Универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$.

Постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$.

Заряд электрона $e = -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$.

Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$.

Заряд протона $q = -1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$.

Масса протона $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$.

Скорость света в вакууме $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

Постоянная закона Стефана – Больцмана $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$.

Постоянная закона смещения Вина $b = 2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$.

Постоянная Планка $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$.

Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$.

Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$.

Таблица П1

Свойства некоторых твёрдых тел

Вещество	Плотность, $\times 10^3 \text{ кг/м}^3$	Температура плавления, $^{\circ}\text{C}$	Удельная теплоёмкость, $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$	Удельная теплота плавления, $\times 10^5 \text{ Дж}$
Алюминий	2,70	659	896	3,22
Медь	8,93	1100	395	1,76
Свинец	11,3	327	126	0,226
Серебро	10,5	960	234	0,88
Сталь	7,7	1400	460	0,8
Чугун	7,88	1150	503	1,2
Лёд	0,9	0	2100	3,35

Таблица П2

Свойства некоторых жидкостей

Жидкость	Плотность, $\times 10^3$ кг/м ³	Удельная теплоёмкость при 20°C, Дж/(кг·К)	Удельная теп- лота парообра- зования, МДж/кг
Вода	1,00	4190	2,26
Керосин	0,80	2140	0,22
Бензин	0,79	2040	0,250
Ртуть	13,6	138	0,285
Спирт	0,80	2510	0,924

Таблица П3

Плотность газов (при нормальных условиях)

Газ	Плотность, кг/м ³	Газ	Плотность, кг/м ³
Водород	0,09	Гелий	0,18
Воздух	1,29	Кислород	1,43

Таблица П4

Относительные атомные массы (атомные веса) A
и порядковые номера Z некоторых элементов.

Элемент	Символ	A	Z	Элемент	Символ	A	Z
Водород	H	1	1	Кальций	Ca	40	20
Гелий	He	4	2	Марганец	Mn	55	25
Углерод	C	12	6	Железо	Fe	56	26
Азот	N	14	7	Никель	Ni	59	28
Кислород	O	16	8	Медь	Cu	64	29
Неон	Ne	20	10	Серебро	Ag	108	47
Натрий	Na	23	11	Олово	Sn	119	50
Алюминий	Al	27	13	Вольфрам	W	184	74
Сера	S	32	16	Платина	Pt	195	78
Хлор	Cl	35	17	Золото	Au	197	79
Аргон	Ar	40	18	Ртуть	Hg	201	80

Таблица П5

Эффективный диаметр молекулы

Газ	Диаметр, м	Газ	Диаметр, м
Азот	$3,0 \cdot 10^{-10}$	Гелий	$1,9 \cdot 10^{-10}$
Водород	$2,3 \cdot 10^{-10}$	Кислород	$2,7 \cdot 10^{-10}$

Таблица П6

Диэлектрическая проницаемость

Вещество	Проницаемость	Вещество	Проницаемость
Парафин	2,0	Эбонит	3,0
Стекло	7,0	Масло	2,2
Фарфор	5,0	Слюда	7,0

Таблица П7

Удельное сопротивление металлов

Металл	Удельное сопротивление, Ом·м	Металл	Удельное сопротивление, Ом·м
Железо	$9,8 \cdot 10^{-8}$	Мель	$1,72 \cdot 10^{-8}$
Нихром	$1,1 \cdot 10^{-8}$	Серебро	$1,6 \cdot 10^{-8}$

Таблица П8

Энергия ионизации

Вещество	E_i , Дж	E_i , эВ
Водород	$2,18 \cdot 10^{-18}$	13,6
Гелий	$3,94 \cdot 10^{-18}$	24,6
Ртуть	$1,66 \cdot 10^{-18}$	10,4
Литий	$1,21 \cdot 10^{-17}$	75,6

Таблица П9

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования

Приставка		Множитель	Приставка		Множитель
Наименование	Обозначение		Наименование	Обозначение	
экса	Э	10^{18}	деци	д	10^{-1}
пэта	П	10^{15}	санتي	с	10^{-2}
тера	Т	10^{12}	милли	м	10^{-3}
гига	Г	10^9	микро	мк	10^{-6}
мега	М	10^6	нано	н	10^{-9}
кило	к	10^3	пико	п	10^{-12}
гекто	г	10^2	фемто	ф	10^{-15}
дека	де	10^1	атто	а	10^{-18}

Таблица П10

Некоторые математические формулы

$\frac{d}{dx} (x^n) = nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx} (e^x) = e^x$	$\frac{d}{dx} (1/x) = -\frac{1}{x^2}$
$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$	$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\frac{d}{dx} (e^{ax}) = ae^{ax}$
$\frac{d}{dx} (a^x) = a^x \ln a $	$(uv)' = u'v + v'u$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x + const$	$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + const$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + const$
$\int_a^b x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big _a^b = \frac{1}{2} (b^2 - a^2)$	$\ln a + \ln b = \ln(ab)$	$\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	3
Общие методические указания	4
Рабочая программа дисциплины на третий семестр.....	8
Библиографический список	11
РАЗДЕЛ 3. ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК	12
3.1. Основные законы и соотношения.....	12
3.2. Примеры решения задач.....	22
3.3. Контрольная работа № 3.....	34
РАЗДЕЛ 4. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ. МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ	48
4.1. Основные законы и соотношения	48
4.2. Примеры решения задач	59
4.3. Контрольная работа № 4.	81
Вопросы для самоконтроля	96
ПРИЛОЖЕНИЕ	99

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Арзумянн Грайр Вагаршакович
Гатько Людмила Евстафьевна
Третьякова Алина Васильевна
Фатеева Валентина Афанасьевна
Чилингарова Нарина Сароевна

Учебно-методическое пособие и
контрольные задания по физике
Часть 2

Для студентов всех инженерных специальностей
факультета безотрывных форм обучения

Ответственный за выпуск Арзумянн Г.В.
Редактор Проценко И.А.
Корректор Селезнёва Н.И.

ЛР № 020565 от 23.06.1997 г. Подписано к печати 12.05.2010г.

Формат 60×84 $\frac{1}{16}$. Бумага офсетная. Офсетная печать.

Усл. п.л. – 6,6. Уч.-изд. л. – 6,3.

Заказ № Тираж 200 экз.

Издательство Технологического института
Южного федерального университета
ГСП 17А, Таганрог, 28, Некрасовский, 44
Типография Технологического института
Южного федерального университета
ГСП 17А, Таганрог, 28, Энгельса, 1