

Таганрогский
Государственный
Радиотехнический
Университет

А.С.УКОЛОВ

**ЛЕКЦИИ
ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ**

Часть III

**СТАЦИОНАРНОЕ
ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ**



Министерство образования
Российской Федерации

ТАГАНРОГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.С. Уколов

ЛЕКЦИИ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ

Часть III

СТАЦИОНАРНОЕ
ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Учебное пособие

Таганрог 1999

УДК 53(075)8)+537.212(075.8)

Уколов А.С. Лекции по общему курсу физики. Ч. III Стационарное электрическое поле. Учебное пособие. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 1999, 137 с.

Учебное пособие содержит изложение основных вопросов описания электростатического поля в вакууме и в веществе и связанных с этим физических эффектов. Пособие соответствует рабочей программе курса общей физики для студентов технических специальностей ТРТУ, обучающихся по системе РИТМ.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Таганрогского государственного радиотехнического университета. Ил. 50.

Рецензенты: Кафедра прикладной электродинамики и компьютерного моделирования Ростовского-на-Дону государственного университета.

Ю.М. Вернигоров, д-р техн. наук., профессор кафедры физики Донского государственного технического университета.



© Таганрогский государственный радиотехнический университет, 1999

© Уколов А.С., 1999

Введение

В природе в соответствии с представлениями классической физики есть только две формы существования материи: вещество и силовые поля. Обе формы, несмотря на существенные различия, объединяются рядом общих свойств: они имеют массу, энергию; при относительном движении обладают импульсом и т.д.

Под силовым полем в классической физике понимается материальный объект, занимающий какую-либо область пространства, в каждой точке которой на помещенную туда материальную частицу действует определенная по величине и направлению сила.

Если сила зависит только от координат точки, то силовое поле называется *стационарным*. Если же сила зависит еще и от времени, то поле называется *нестационарным*.

Предметом исследования в данной части учебного пособия является описание свойств электростатического силового поля и его взаимодействия с электрически заряженными телами.

1. Электростатическое поле в вакууме

1.1. Электрический заряд и его свойства

В классической физике *электрическим зарядом называется особое свойство материального объекта, которое проявляется в наличии в окружающем пространстве, связанного с этим объектом электромагнитного поля.*

Величина заряда есть количественная мера этого свойства, ее еще называют количеством электричества. В природе существуют только два типа электрических зарядов, хотя их носителями могут быть самые различные тела. *Условно* эти типы зарядов названы *положительными* и *отрицательными* электрическими зарядами.

Ниже, для простоты, свойство тела, обладать электрическим зарядом, будем называть просто *зарядом*.

Заряд в системе единиц СИ измеряется в Кулонах (Кл). Это производная единица. Кулон - это заряд, проходящий через поперечное сечение проводника при силе тока 1 А за 1 с ($1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ с}$).

Кратко обсудим основные свойства зарядов.

1) Заряд обладает *дискретностью*.

Это означает, что существует *элементарная* порция заряда, равная в единицах системы СИ

$$e = 1,60211892 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Носителями элементарной порции заряда являются частицы, входящие в состав атома любого вещества: электрон ($q_e = -e$) и протон ($q_p = +e$).

Свойство дискретности заряда означает, что заряд любого тела есть *целое кратное* элементарного заряда, т.е.

$$q = \pm Ne, \quad (1.1)$$

где $N > 0$ целое число. Часто встречаются ситуации, когда N очень велико, в этом случае дискретностью заряда можно пренебречь, считая его непрерывной величиной.

Любое незаряженное тело содержит в себе равное количество положительных и отрицательных элементарных носителей заряда (атом, в целом, электрически нейтрален). Тот факт, что тело обладает зарядом, означает наличие у этого тела избыточного количества элементарных носителей заряда одного знака по сравнению с количеством носителей другого знака.

2) Заряды подчиняются одному из *фундаментальных законов* природы: *закону сохранения зарядов*.

В электрически изолированной системе, независимо от природы происходящих в ней процессов, алгебраическая сумма зарядов есть величина постоянная.

Электрическая изоляция системы означает, что ее границы не пересекаются зарядами.

3) Величина заряда не зависит от того, покоится этот заряд или движется, а значит имеет одно и то же значение в различных системах отсчета, т.е. является *релятивистски инвариантной величиной*.

4) *Заряженные тела взаимодействуют между собой*

Опытным путем закон взаимодействия точечных зарядов был установлен Ш. Кулоном в 1785 году и носит его имя.

Закон Кулона формулируется следующим образом.

Между двумя неподвижными точечными зарядами, находящимися в вакууме, существует сила взаимодействия F , пропорциональная произведению этих зарядов q_1 и q_2 и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними.

Векторная форма закона Кулона имеет вид:

$$\vec{F} = k \frac{q_1 q_2 \vec{r}}{r^2}, \quad (1.2)$$

где \vec{F} - сила, действующая на данный заряд со стороны другого, \vec{r} - радиус - вектор, указывающий положение данного заряда, относительно другого (рис. 1.1).

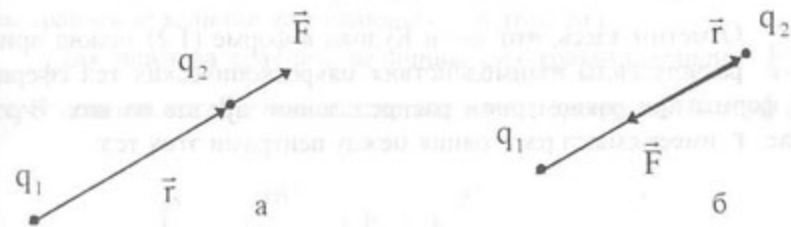


Рис. 1.1

На рис. 1.1а изображена сила, действующая на заряд q_2 со стороны q_1 для одноименных зарядов, на рис. 1.1 б - для разноименных зарядов.

Для неподвижных зарядов сила взаимодействия является *центральной*, так как направлена вдоль прямой, соединяющей взаимодействующие заряды, а модуль ее зависит только от расстояния r между зарядами:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (1.3)$$

Коэффициент пропорциональности в законе Кулона (1.2) и (1.3) зависит от выбора системы единиц. В системе СИ он записывается в форме

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (1.4)$$

и равен $k = 9 \cdot 10^9 \text{ м} / \Phi$ (Φ - Фарада).

Величина $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} / \text{м}$ - называется электрической постоянной и, как будет видно в дальнейшем, является фундаментальной физической постоянной.

Итак, закон Кулона в СИ имеет вид

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (1.5)$$

Отметим здесь, что закон Кулона в форме (1.2) можно применить к расчету силы взаимодействия макроскопических тел сферической формы при равномерном распределении зарядов на них. В этом случае r имеет смысл расстояния между центрами этих тел.

Выводы

В природе существуют два типа зарядов, обладающих свойствами дискретности, инвариантности, сохраняемости в электрически изолированной системе. Взаимодействие двух точечных неподвижных зарядов описывается законом Кулона.

Контрольные вопросы

- 1.1 В чем заключается свойство дискретности заряда?
- 1.2 Что означает инвариантность заряда?
- 1.3 Сформулируйте закон сохранения заряда. Почему этот закон универсален?
- 1.4 Запишите выражение закона Кулона в векторной форме. В каких случаях эту форму закона можно применять?

1.2. Электростатическое поле. Напряженность поля

Взаимодействие между двумя неподвижными точечными зарядами осуществляется не через пустое пространство, а через посредство силового поля, которое называется *электрическим* (электростатическим).

Наличие в пространстве электрического поля можно обнаружить с помощью любого заряженного тела, помещая его в это пространство. Если при этом на заряженное тело будет действовать сила, то говорят, что в данной области пространства существует электрическое поле.

Судить о том, что обнаруживаемое таким способом силовое поле имеет «электрическую» природу, а не какую-либо другую, можно путем сравнения величин возникающих при этом сил.

Для примера сравним величины сил гравитационного $F_{гр}$ и электростатического F_e взаимодействия двух электронов. В этом случае

$$F_{гр} = \gamma \frac{m^2}{r^2}, \text{ а } F_e = k \frac{e^2}{r^2}.$$

Откуда $F_e = \frac{ke^2}{\gamma m^2} F_{гр}$. Произведя вычисления ($k = 9 \cdot 10^9 \text{ м} / \Phi$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$, $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$, $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$), получим

$$F_e \approx 4 \cdot 10^{42} F_{гр},$$

т.е. сила электростатического взаимодействия между двумя электронами в $4 \cdot 10^{42}$ раза больше силы их гравитационного взаимодействия.

В качестве тела, обнаруживающего наличие электрического поля, удобнее всего использовать *точечный «пробный» заряд* («пробный» заряд - фактически это «прибор», которым мы «пробуем», есть электрическое поле или нет). В пользу этого есть, по крайней мере, две причины:

- а) можно судить о наличии поля в данной точке пространства;
- б) использование, вместо точечного пробного заряда, заряженного тела, при его помещении в электрическое поле приводит к пере-

распределению зарядов на теле и вследствие этого к искажению характера самого поля.

Таким образом, при помещении точечного пробного заряда в электрическое поле на него со стороны этого поля действует сила. При этом оказывается, что отношение этой силы \vec{F} к величине пробного заряда $q_{пр}$ от свойств пробного заряда совершенно не зависит, а определяется только свойствами поля в данной точке. Поэтому этим отношением описывают силовую характеристику электрического поля и называют ее *напряженностью*.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр}} \quad (1.6)$$

Напряженностью электрического поля называется величина, численно равная силе, действующей со стороны поля на единичный, положительный, точечный пробный заряд, помещенный в данную точку поля.

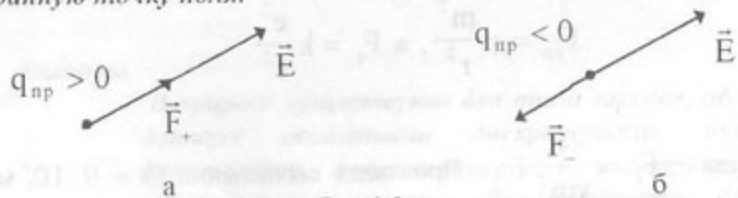


Рис.1.2

Слово «единичный» однозначно определяет величину напряженности (при $q_{пр} = 1$, $|\vec{E}|$ численно равен $|\vec{F}|$).

Слово «положительный» однозначно определяет направление вектора напряженности в данной точке поля (при $q_{пр} > 0$, $\vec{E} \uparrow \uparrow \vec{F}_+$; при $q_{пр} < 0$, $\vec{E} \uparrow \downarrow \vec{F}_-$), что ясно из рис. 1.2 а,б.

За единицу напряженности в СИ принимается напряженность такого электрического поля, в котором на пробный заряд в 1 Кл действует сила 1Н. Эта единица называется ньютон на кулон (или вольт на метр) и обозначается Н/Кл(В/м):

$$1 \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{1\text{Н}}{1\text{Кл}} = 1 \frac{\text{В}}{\text{м}}$$

Если электрическое поле создается точечным зарядом Q , то на пробный точечный заряд $q_{пр}$ заряд Q действует силой (1.2)

$$\vec{F} = k \frac{Qq_{пр}}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Поэтому напряженность поля точечного заряда, с учетом (1.6), описывается равенством

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр}} = k \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.7)$$

Из (1.7) видно, что вектор напряженности поля точечного заряда в каждой точке направлен вдоль радиальных прямых (от заряда при $Q > 0$ и к заряду при $Q < 0$).

Отметим, что поле, обладающее таким свойством, называется *центрально-симметричным*.

Модуль напряженности (1.7) $E = k \frac{Q}{r^2}$ зависит только от расстояния r от заряда до точки наблюдения. Поэтому во всех точках сферы радиуса r , центр которой совпадает с точечным зарядом, величина напряженности (1.7) одна и та же. В этом случае говорят, что поле обладает *сферической симметрией*.

Таким образом, поле неподвижного точечного заряда является *центрально-симметричным*.

Отмеченные соображения о структуре электростатического поля точечного заряда позволяют наглядно изображать такое поле геометрически с помощью так называемых *линий напряженности (силовых линий)*.

Линией напряженности называется такая линия, касательная в каждой точке которой совпадает по направлению с вектором напряженности \vec{E} в данной точке (рис.1.3).

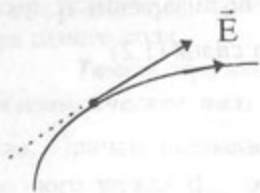


Рис.1.3

Линии напряженности - направленные линии и нигде не пересекающиеся друг с другом, так как пересечение линий в некоторой точке поля означало бы, что данная точка поля одновременно характеризуется двумя различными значениями напряженности. При графическом изображении поля с помощью линий напряженности для характеристики не только направления, но и величины напряженности.

принято, чтобы количество линий напряженности, пересекающих единичную площадку, расположенную перпендикулярно линиям в окрестности данной точки, было пропорционально (или равно) напряженности поля в данной точке.

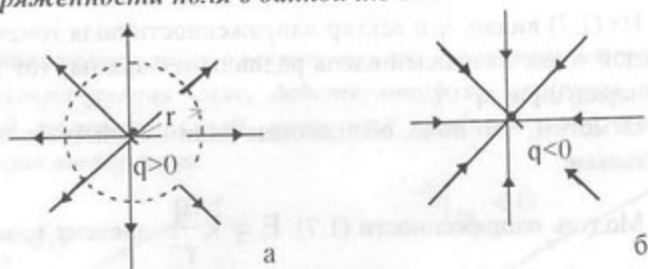


Рис.1.4

Для примера на рис. 1.4а,б дана картина линий напряженности точечного заряда. Число линий напряженности, пересекающих единичную площадку (густота линий), определяется отношением полного числа линий N к площади поверхности сферы радиуса r (рис.1.4а), т.е. $N / 4\pi r^2$, и убывает обратно пропорционально r^2 , как и напряженность поля (1.7) $E = k \frac{q}{r^2}$.

Важным случаем является поле, когда в каждой точке некоторой области пространства вектор напряженности \vec{E} имеет одно и то же направление и величину. Такое поле называется *однородным* и изображается системой параллельных линий напряженности одинаковой густоты (рис.1.5).

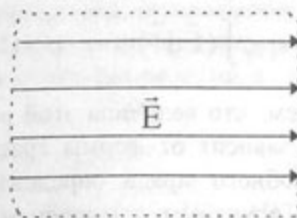


Рис.1.5

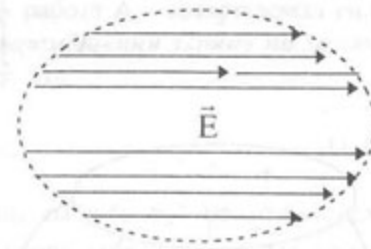


Рис.1.6

Выводы

Силовой характеристикой электрического поля является напряженность \vec{E} . Электрическое поле графически изображается линиями напряженности. Поле точечного заряда имеет центрально-симметричную структуру.

Контрольные вопросы

- 1.5. Что такое «пробный» заряд и каково его назначение?
- 1.6. Каков смысл напряженности электрического поля?
- 1.7. Какое поле называется центральным?
- 1.8. Что называется линией напряженности электрического поля? Каковы правила изображения электростатического поля с помощью линий напряженности?
- 1.9. Является ли поле, изображенное на рис.1.6, однородным?

1.3. Потенциал электростатического поля

Важную роль в описании свойств электрического поля играют понятия *потенциала* или *разности потенциалов*. (см. также часть I, п. 3.6.2) Существование такой характеристики можно обосновать на основе следующих рассуждений. Пусть электростатическое поле образовано какими-либо заряженными телами (рис.1.7). При перемещении пробного заряда из точки 1 в точку 2 силами этого поля будет совершаться работа

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F} d\vec{\ell}) = q_{\text{пр}} \int_1^2 (\vec{E} d\vec{\ell}). \quad (1.8)$$

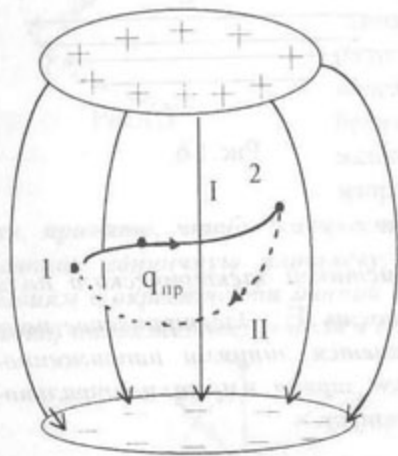


Рис.1.7

Покажем, что величина этой работы не зависит от формы траектории пробного заряда, определяется только исходным и конечным положениями $q_{\text{пр}}$ в электростатическом поле. Для этого рассмотрим перемещение $q_{\text{пр}}$ по некоторому замкнутому пути I2III1. Работу A_o на этом пути можно представить в виде двух слагаемых:

$$A_o = A_{112} + A_{211}, \quad (1.9)$$

где A_{112} — работа на пути I2.

A_{211} — на пути 2III1. Очевидно, что

$$A_{211} = -A_{112}. \quad (1.10)$$

Используя это равенство, выражению для работы (1.9) на замкнутом пути I2III1 можно придать вид

$$A_o = A_{112} - A_{112}. \quad (1.11)$$

Поскольку рассматривается электростатическое поле, это означает, что наличие и перемещение в нем пробного заряда не изменяют с течением времени характеристик поля, а значит и распределения зарядов на телах, создающих это поле. Следовательно, в результате перемещения пробного заряда по замкнутому пути никаких изменений в системе, включающих в себя заряженные тела, создающие поле, и

пробный заряд, не произошло. Поэтому работа A_o , совершаемая силой электростатического поля при перемещении заряда по замкнутому пути, равна нулю, а это означает, что

$$A_{112} = A_{112}. \quad (1.12)$$

Так как траектории I2 и III2 были выбраны произвольно, то равенство (1.12) означает, что работа по перемещению заряда $q_{\text{пр}}$ в электростатическом поле не зависит от формы пути, а определяется только положениями начальной и конечной точек перемещения.

Следовательно, электростатическое поле является потенциальным (см. ч.1 п.3.5 пособия). Теперь работу A_{12} (1.8) можно записать в виде убыли потенциальной энергии пробного заряда в исходной W_1 и конечной W_2 точках перемещения:

$$A_{12} = q_{\text{пр}} \int_1^2 (\vec{E} d\vec{\ell}) = W_1 - W_2. \quad (1.13)$$

Здесь и ниже для обозначения потенциальной энергии взаимодействия зарядов используется символ W .

Из равенства (1.13) видно, что величина

$$\int_1^2 (\vec{E} d\vec{\ell}) = \frac{W_1}{q_{\text{пр}}} - \frac{W_2}{q_{\text{пр}}}$$

от свойств пробного заряда не зависит, а определяется только свойствами электростатического поля в его точках 1 и 2. В связи с этим отношение

$\frac{W}{q_{\text{пр}}}$ принимают в качестве энергетической характеристики поля, которую называют потенциалом данной точки поля:

$$\phi = \frac{W}{q_{\text{пр}}}. \quad (1.14)$$

Согласно (1.14), потенциалом данной точки электростатического поля называется величина, численно равная потенциальной энергии единичного положительного заряда, помещенного в данную точку поля.

В системе единиц СИ за единицу потенциала принимается 1В(вольт) - потенциал такой точки, в которой заряд в 1Кл обладает потенциальной энергией в 1Дж, т.е.

$$1В = \frac{1Дж}{1Кл}.$$

Используя понятие потенциала, выражению (1.13) для работы сил электростатического поля по перемещению точечного заряда q из одной точки поля в другую можно придать вид

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (1.15)$$

Напомним здесь, что потенциальная энергия определена с точностью до произвольной постоянной. Это в равной мере относится и к потенциалу. Поэтому физический смысл имеет не само понятие потенциала, а понятие разности потенциалов. Потенциал для произвольной точки имеет смысл только при указании точки поля, в которой условно потенциал принят, равным нулю.

Использование понятия потенциала при описании свойств поля во многих случаях более удобно, чем понятие напряженности.

Напряженность поля - векторная величина, а поэтому для каждой точки поля необходимо знать три скалярные величины - проекции вектора \vec{E} на оси координат. Потенциал поля - скалярная величина, поэтому достаточно указать ее алгебраическое значение в данной точке поля. Ниже будет показано, что по значению потенциала в каждой точке можно определить вектор напряженности. Кроме того, на практике значительно проще измерять разность потенциалов, чем напряженность.

При графическом изображении электростатического поля часто используют понятие эквипотенциальной поверхности.

Эквипотенциальной поверхностью называется геометрическое место точек, потенциал которых одинаков. Условие, определяющее эквипотенциальную поверхность, имеет вид

$$\varphi = \text{const}.$$

Легко показать, что напряженность поля \vec{E} в данной точке и эквипотенциальная поверхность, проходящая через эту точку, взаимно перпендикулярны. Найдем работу сил поля δA при элементарно малом перемещении $d\vec{\ell}$ заряда вдоль эквипотенциальной поверхности $\varphi = \text{const}$

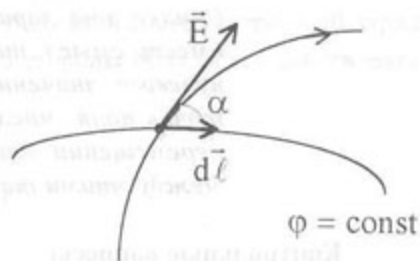


Рис.1.8

В этом случае, с одной стороны $\delta A = q(\vec{E}d\vec{\ell}) = qEd\ell \cos\alpha$, с другой - $\delta A = -qd\varphi = 0$. Здесь использовано (1.8) и (1.15), а также, что $d\varphi = 0$ при перемещении вдоль поверхности $\varphi = \text{const}$. Поэтому

$$\delta A = qEd\ell \cos\alpha = -qd\varphi = 0.$$

Так как $q, E, d\ell$ - не равные нулю величины, то $\cos\alpha = 0$, следовательно $\alpha = \pi/2$, что и доказывает взаимную перпендикулярность линий напряженности и эквипотенциальных поверхностей в любой точке электростатического поля.

В заключение этого пункта напомним формулу для потенциала электростатического поля, создаваемого точечным зарядом q (см. часть I, формула (3.31)), которая в системе единиц СИ имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (1.16)$$

Эквипотенциальные поверхности в этом случае являются сферическими, центры которых совпадают с положением точечного заряда, создающего поле.

Выводы

Энергетической характеристикой электростатического поля является понятие потенциала. Однако эта характеристика поля неоднозначна, имеет смысл только при определенном выборе нулевого значения. Разность потенциалов двух точек поля численно равна работе сил поля при перемещении единичного положительного заряда между этими точками.

Контрольные вопросы

- 1.10. Каким образом и на основании каких свойств электростатического поля вводится понятие потенциала, разности потенциалов?
- 1.11. С чем связана неоднозначность потенциала данной точки электростатического поля?
- 1.12. Почему электростатическое поле является потенциальным?
- 1.13. Какой вид имеют эквипотенциальные поверхности для однородного поля?

1.4. Принцип суперпозиции электрических полей

Электрические поля, образованные какой-либо системой точечных зарядов или системой протяженных заряженных тел, могут иметь очень сложную структуру, образованную в результате наложения полей, создаваемых в данной точке пространства, каждым из заряженных объектов. Правила, по которым производится вычисления напряженности \vec{E} и потенциала ϕ результирующего поля, называются

принципом суперпозиции для электрических полей.

Поскольку любой протяженный заряженный объект можно представить в виде системы точечных (физически малых) заряженных

частиц, то для установления принципа суперпозиции достаточно рассмотреть поле, создаваемое произвольной системой точечных зарядов (рис. 1.9).

Поместим в некоторую точку поля этой системы пробный заряд $q_{пр}$. Согласно (3.3), на заряд $q_{пр}$ со стороны поля будет действовать сила

$$\vec{F} = q_{пр} \vec{E}.$$

С другой стороны, сила взаимодействия \vec{F}_i пробного заряда с любым из зарядов системы q_i не зависит от присутствия и расположения других зарядов. Поэтому результирующая сила равна

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i,$$

где \vec{F}_i - сила, действующая на пробный заряд со стороны заряда q_i , входящего в систему; n - полное число точечных зарядов системы.

Сравнивая последние два равенства, получим

$$\vec{E} = \frac{1}{q_{пр}} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{\vec{F}_1}{q_{пр}} + \frac{\vec{F}_2}{q_{пр}} + \dots + \frac{\vec{F}_n}{q_{пр}}.$$

Используя определение (1.6): $\vec{F}_i / q_{пр} = \vec{E}_i$, окончательно имеем

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i. \quad (1.17)$$

Равенство (1.17) представляет собой математическую форму записи *принципа суперпозиции для напряженности электрического поля.*

Напряженность электрического поля, созданного системой точечных зарядов, в любой его точке равна векторной сумме

напряженностей полей, создаваемых в этой точке каждым из зарядов системы в отдельности.

Для получения принципа суперпозиции для потенциала результирующего поля рассмотрим перемещение пробного заряда из некоторой точки 1 этого поля в точку 2. Силы поля совершают при этом перемещении работу над пробным зарядом (1.8)

$$A_{12} = q_{\text{пр}} \int_1^2 (\vec{E} d\vec{\ell}) = q_{\text{пр}} \int_1^2 \left(\sum_{i=1}^n (\vec{E}_i d\vec{\ell}) \right) =$$

$$= q_{\text{пр}} \sum_{i=1}^n \left(\int_1^2 (\vec{E}_i d\vec{\ell}) \right). \quad (1.18)$$

Здесь использовано (1.17). Учитывая (1.15), левую часть равенства (1.18) запишем в виде

$$A_{12} = q_{\text{пр}} (\varphi_1 - \varphi_2), \quad (1.19)$$

где φ_1 и φ_2 - потенциалы результирующего поля в точках 1 и 2. Легко

видеть, что каждый из интегралов $\int_1^2 (\vec{E}_i d\vec{\ell})$ под знаком суммы в пра-

вой части равенства (1.18) с использованием (1.13) и (1.14) можно записать в виде разности потенциалов в точках 1 и 2 для поля, которое создает заряд системы q_i в отсутствие остальных зарядов, т.е.

$$\int_1^2 (\vec{E}_i d\vec{\ell}) = \varphi_{1i} - \varphi_{2i}. \quad (1.20)$$

Подставляя (1.19) и (1.20) в (1.18), получим

$$q_{\text{пр}} (\varphi_1 - \varphi_2) = q_{\text{пр}} \cdot \sum_{i=1}^n (\varphi_{1i} - \varphi_{2i})$$

или

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \sum_{i=1}^n \varphi_{1i} - \sum_{i=1}^n \varphi_{2i}.$$

Так как точки 1 и 2 в поле системы выбраны произвольно, то опуская индексы 1 и 2, для любой точки поля имеем

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i. \quad (1.21)$$

Таким образом, потенциал любой точки электростатического поля, созданного системой точечных зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, созданных в этой точке каждым из зарядов системы в отдельности.

Выводы

Результирующее электростатическое поле, созданное некоторой системой неподвижных заряженных объектов, подчиняется принципу суперпозиции, включающему в себя два правила сложения напряженностей и потенциалов, составляющих полей.

Контрольные вопросы

- 1.14. Сформулируйте и дайте краткое обоснование принципа суперпозиции.
- 1.15. Как будет выглядеть математическая форма записи принципа суперпозиции при непрерывном распределении заряда в системе, создающей поле?

1.5. Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля

Поскольку каждая точка электростатического поля описывается двумя величинами: силовой характеристикой - напряженностью \vec{E} и энергетической - потенциалом φ , то между ними должна существовать определенная взаимосвязь.

Установить эту связь можно, используя уже известные результаты, полученные в разделе «Механика» (ч.1, п.3.5.) данного пособия, где для потенциального силового поля найдено соотношение между силой, действующей на частицу со стороны поля, и потенциальной энергией этой частицы в данной точке поля:

$$\vec{F} = -\nabla W. \quad (1.22)$$

Если заряженную частицу поместить в некоторую точку электростатического поля, то со стороны поля на нее будет действовать сила (1.6)

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Кроме того, частица в электростатическом поле обладает потенциальной энергией (1.14)

$$W = q\varphi.$$

Подставляя последние два равенства в (1.22), получим искомую взаимосвязь между \vec{E} и φ в виде

$$\vec{E} = -\nabla\varphi. \quad (1.23)$$

Вектор напряженности \vec{E} в данной точке электростатического поля равен градиенту потенциала в этой точке, взятому с противоположным знаком.

Напомним, что градиент некоторой скалярной функции, это вектор, который по величине и направлению равен максимальной скорости возрастания скалярной функции по направлению.

Из (1.23) и смысла градиента непосредственно следует, что вектор напряженности направлен в сторону наискорейшего убывания потенциала и по величине равен максимальной скорости убывания потенциала.

В декартовой системе координат равенство (1.23) имеет вид

$$\vec{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{e}_y - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{e}_z, \quad (1.24)$$

где

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x} = E_x; \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = E_y; \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = E_z. \quad (1.25)$$

Отметим, что связь между \vec{E} и φ можно получить, рассматривая непосредственно выражение работы силами поля при элементарном перемещении $d\vec{l}$ заряда q :

$$\delta A = (\vec{F}d\vec{l}) = q(\vec{E}d\vec{l}) = -qd\varphi, \quad (1.26)$$

где

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz - \text{приращение (полный дифференциал)}$$

потенциала при перемещении заряда на $d\vec{l}$. Запишем равенство (1.26) в развернутом виде:

$$(\vec{E}d\vec{l}) = E_x dx + E_y dy + E_z dz = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx - \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy - \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz.$$

Откуда сразу имеем (1.25), а следовательно и (1.24).

Равенство (1.23) дает связь между \vec{E} и φ в дифференциальной форме. Интегральная форма этой связи на основе (1.13) с учетом (1.15) дается выражением

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E} d\vec{\ell}), \quad (1.27)$$

интегрирование в правой части которого можно проводить по любой линии, проходящей через точки 1 и 2. В частности, если интегрирование производится по некоторому замкнутому контуру L (точки 1 и 2 совпадают), то $\varphi_1 = \varphi_2$, и поэтому

$$\oint_L (\vec{E} d\vec{\ell}) = 0. \quad (1.28)$$

Последние два выражения (1.27) и (1.28) справедливы только для электростатического поля, так как оно потенциально.

Выводы

Между напряженностью и потенциалом в каждой точке электростатического поля существует вполне определенная взаимосвязь, которая обусловлена потенциальным характером электростатического поля. Вектор напряженности равен градиенту потенциала в данной точке поля, взятому с противоположным знаком.

Контрольные вопросы

- 1.16. Укажите соображения, на основании которых можно установить связь между \vec{E} и φ .
- 1.17. Как выглядит математический вид связи между \vec{E} и φ , какой смысл эта связь имеет?
- 1.18. При каких условиях справедливы соотношения (1.23), (1.27) и (1.28)?

1.6. Поток вектора напряженности электростатического поля

В изложенных выше пунктах мы ознакомились с основными физическими величинами и их взаимосвязями, с помощью которых описывается электростатическое поле в вакууме.

В принципе, любую задачу об определении напряженности \vec{E} и потенциала φ электростатического поля в некоторой его точке, созданного произвольной системой заряженных тел, можно решить либо с помощью набора соотношений (1.7), (1.17) и (1.23), либо (1.16), (1.21) и (1.23). Для этого предварительно необходимо заряженные тела, поле которых исследуется, представить в виде системы точечных зарядов. Однако такой способ решения даже при простейших конфигурациях систем заряженных тел связан с огромными трудностями вычислительного характера. При этом, далеко не всегда результаты можно представить в аналитическом виде, что сильно усложняет анализ этих результатов. Кроме того, при применении этих способов остаются «скрытыми» общие свойства электростатического поля, не зависящие от структуры расположения зарядов, создающих это поле.

Для более углубленного изучения свойств электростатического (и любого другого векторного силового поля) применяют особый математический аппарат - векторный анализ. Мы не будем здесь подробно обсуждать все понятия и особенности векторного анализа, вводя его элементы и краткие пояснения по мере необходимости.

Большую роль в описании общих свойств векторного силового поля играет понятие *потока вектора*. Введем кратко это понятие. Для этого рассмотрим воображаемое пространство, каждой точке которого можно сопоставить некоторый вполне определенный вектор \vec{a} . Такое пространство называется *полем вектора \vec{a}* или *векторным полем*.

Потоком вектора \vec{a} через поверхность S называется интеграл вида

$$\Phi_a = \int_S (\vec{a} d\vec{S}), \quad (1.29)$$

где $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$ (рис.1.10) - *вектор элемента поверхности*, модуль которого равен площади элемента поверхности dS , а направление совпадает с единичным вектором нормали \vec{n} к площадке dS . Интегрирование в (1.29) ведется по всей поверхности S. В общем случае вектор \vec{a} является функцией положения

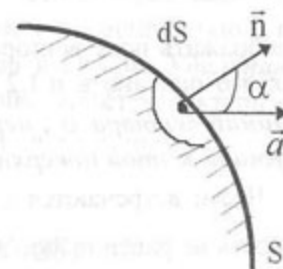


Рис. 1.10

точки на поверхности S . Определению (1.29) в соответствии со свойствами скалярного произведения можно придать другой вид. В частности,

$$\Phi_a = \int_S a dS \cos \alpha = \int_S a_n dS. \quad (1.30)$$

Выражения, стоящие под знаком интеграла в (1.29) и (1.30), дают значения элементарного потока вектора \vec{a} через площадку dS :

$$d\Phi_a = (\vec{a} d\vec{S}) = a_n dS \cos \alpha = a_n dS. \quad (1.31)$$

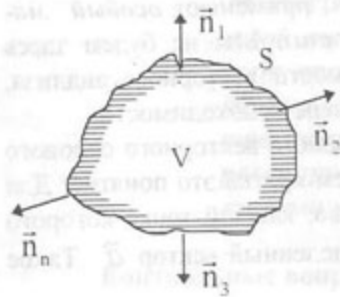


Рис. 1.11

Из определения следует, что поток вектора - величина *алгебраическая*, знак которой зависит от выбора направления нормали к площадке dS . В случае замкнутой поверхности S , ограничивающей некоторый объем пространства V , обычно выбирают внешнюю нормаль, т.е. нормаль, направленную вовне объема V (рис. 1.11).

Понятие потока вектора \vec{a} имеет простую геометрическую интерпретацию, если изображать поле вектора в виде направленных линий вектора \vec{a} так, как это описано в п.1.2. В этом случае поток вектора равен числу линий вектора \vec{a} , пересекающих поверхность S в направлении нормали к этой поверхности.

Часто встречаются случаи, когда поток Φ_a через замкнутую поверхность не равен нулю. Это означает, что число «втекающих» N_-

в объем V линий не равно числу «вытекающих» из него линий N_+ (рис. 1.12). Следовательно, при $N_- > N_+$ (рис. 1.12 а) внутри объема V имеются места, где линии вектора \vec{a} обрываются (заканчиваются). Поток вектора \vec{a} через замкнутую поверхность S в этом случае

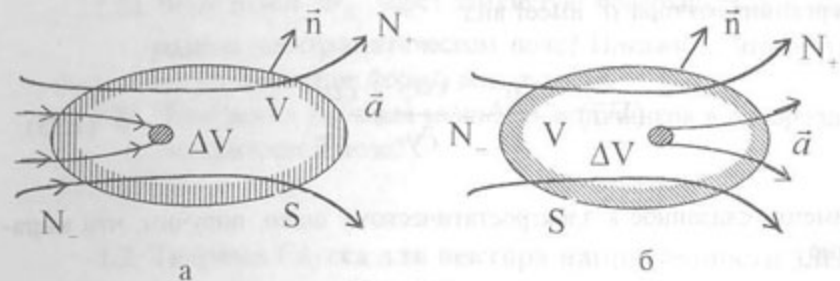


Рис. 1.12

$\Phi_a < 0$. Если же $N_+ > N_-$, то внутри объема V (рис. 1.12б) имеются места, где линии вектора \vec{a} образуются (начинаются). В этом случае $\Phi_a > 0$.

Области (места), в которых линии векторного поля начинаются или заканчиваются, называются соответственно *источниками* и *стоками* вектора \vec{a} .

Не трудно понять, что величина потока через замкнутую поверхность полностью определяется наличием и «мощностью», находящихся внутри поверхности S источников и стоков. Удельная мощность источников (стоков) в данной точке может характеризоваться отношением $\Phi_a / \Delta V$ при стягивании ΔV в эту точку, т.е.

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Phi_a}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S (\vec{a} d\vec{S}),$$

где S поверхность, ограничивающая объем ΔV . Из векторного анализа известно, что этот предел равен *дивергенции* вектора \vec{a} , т.е.

$$(\nabla \vec{a}) = \text{div} \vec{a} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S (\vec{a} d\vec{S}), \quad (1.32)$$

где ∇ - известный нам уже векторный оператор, действующий в данном случае скалярно на вектор \vec{a} . В декартовой системе координат дивергенция вектора \vec{a} имеет вид:

$$(\nabla \vec{a}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (1.33)$$

Применяя сказанное к электростатическому полю, получим, что выражение

$$\Phi_E = \int_S (\vec{E} d\vec{S}) \quad (1.34)$$

определяет поток вектора напряженности, а дивергенция вектора \vec{E} (набл \vec{E})

$$(\nabla \vec{E}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S (\vec{E} d\vec{S}) \quad (1.35)$$

определяет удельную мощность источников электростатического поля в данной точке.

Выводы

Поток вектора через поверхность вводится с помощью определения (1.29). Это скалярная алгебраическая величина. Поток вектора через замкнутую поверхность определяется мощностью источников, находящихся внутри этой поверхности. Локальная удельная мощность источников поля характеризуется дивергенцией вектора поля в данной точке.

Контрольные вопросы

- 1.19. Запишите выражение для потока Φ_E через плоскую поверхность с площадью S , ориентированную в однородном поле с напряженностью \vec{E} так, что $(\vec{n}, \vec{E}) = 2\pi/3$.
- 1.20. Чему равен Φ_E через замкнутую поверхность S в однородном электростатическом поле? Покажите, что результат не зависит от формы поверхности.
- 1.21. Чему равна удельная мощность источников в однородном электрическом поле?

1.7. Теорема Гаусса для вектора напряженности электростатического поля в вакууме

Исследование свойств силовых полей во многих случаях значительно упрощается при использовании одной из важнейших теорем классической теории поля. Для электрического поля эта теорема была сформулирована К.Гауссом и обобщена на случай произвольного векторного поля М.В. Остроградским. Поэтому ее часто называют теоремой Остроградского - Гаусса.

Сущность теоремы Остроградского - Гаусса заключается в том, что с помощью нее устанавливается одно из фундаментальнейших свойств любого векторного поля: наличие или отсутствие у этого поля источников.

Это свойство поля определяется с помощью введенного в предыдущем пункте понятия потока вектора.

Для напряженности электростатического поля теорема Гаусса формулируется следующим образом:

поток вектора напряженности электростатического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на электрическую постоянную ϵ_0 .

Поясним справедливость этой теоремы. Рассмотрим вначале точечный заряд q , находящийся в центре сферической поверхности радиуса R (рис.1.13).

В каждой точке поверхности выбранной сферы в этом случае (1.7)

$$E = E_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}.$$

Поэтому поток Φ_E равен

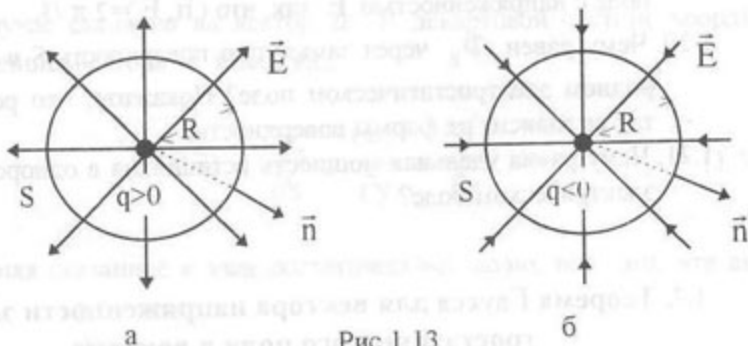


Рис.1.13

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (1.36)$$

Легко видеть, что полученный результат, справедлив при произвольном расположении точечного заряда внутри сферической поверхности. Более того, форма поверхности не играет никакой роли. Эти факты становятся особенно ясными, если использовать геометрическую интерпретацию

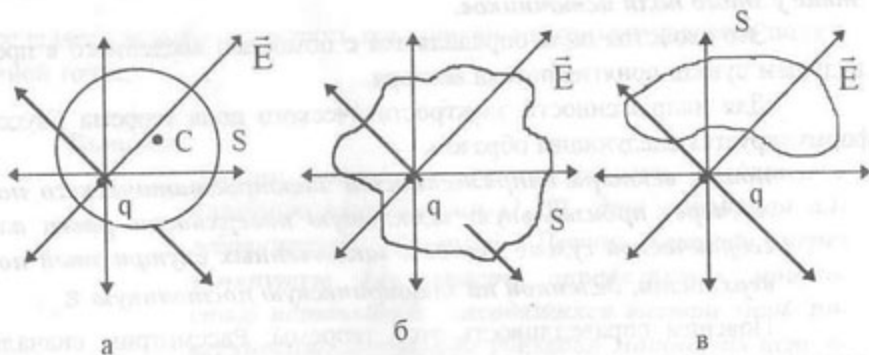


Рис.1.14

тацию понятия потока вектора, как алгебраическое число линий напряженности, пересекающих данную поверхность (рис.1.14 а,б)

Если заряд находится за пределами замкнутой поверхности S (рис.1.14 в), то поток Φ_E равен нулю, так как число «входящих» и «выходящих» линий одинаково. Таким образом, установлена справедливость теоремы Гаусса для случая поля, созданного одним точечным зарядом.

Используя принцип суперпозиции, можно обобщить эти результаты на случай произвольной системы N точечных зарядов:

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \oint_S \left(\sum_{i=1}^N \vec{E}_i \right) d\vec{S} = \sum_{i=1}^N \left(\oint_S (\vec{E}_i d\vec{S}) \right) = \sum_{i=1}^N \Phi_{E_i}. \quad (1.37)$$

Попутно отметим здесь, что равенство $\Phi_E = \sum_{i=1}^N \Phi_{E_i}$ представляет

собой *принцип суперпозиции для потока вектора \vec{E}* .

В правой части цепочки равенств (1.37) среди слагаемых Φ_{E_i} отличны от нуля только те, которые обусловлены зарядами, находящимися внутри поверхности S . Поэтому

$$\Phi_E = \sum_{k=1}^n \Phi_{E_k} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{k=1}^n q_k, \quad (1.38)$$

где индексом k - отмечены заряды, находящиеся внутри поверхности S . Очевидно, что $n \leq N$.

Если заряды внутри выбранной поверхности распределены непрерывно, то сумму в правой части равенства (1.38) следует заменить интегралом:

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV, \quad (1.39)$$

где $\rho = \frac{dq}{dV}$ - объемная плотность заряда внутри выбранной поверхности S , ограничивающей объем V .

Таким образом, теорема Гаусса для вектора напряженности имеет вид:

а) в случае системы точечных зарядов

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{k=1}^n q_k, \quad (1.40)$$

б) в случае непрерывного распределения зарядов

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (1.41)$$

Формулы (1.40) и (1.41) являются *интегральной формой записи* теоремы Гаусса для напряженности электростатического поля. из которых следует, что *источниками электростатического поля являются точки пространства, где имеются заряды.*

При графическом изображении поля это означает, что линии напряженности начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах, либо уходят в бесконечность.

Используя известную в векторном анализе интегральную теорему Остроградского-Гаусса

$$\Phi_a = \oint_S (\vec{a} d\vec{S}) = \int_V (\nabla \vec{a}) dV, \quad (1.42)$$

заменяя в (1.41) интеграл по поверхности объемным, согласно (1.42), получим

$$\int_V (\nabla \vec{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV.$$

Поскольку теорема Гаусса справедлива для произвольной замкнутой поверхности S , поэтому объем V , заключенный внутри этой поверхности, по которому производится интегрирование в последнем равенстве, тоже произволен. Следовательно, это равенство может выполняться

только, если подынтегральные функции в каждой точке пространства равны между собой:

$$(\nabla \vec{E}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.43)$$

Формула (1.43) представляет собой *дифференциальную форму записи теоремы Гаусса* для напряженности электростатического поля.

Выводы

Источниками электростатического поля являются неподвижные заряды. Удельная «мощность» источников пропорциональна объемной плотности зарядов в данной точке поля. Это одно из двух основных свойств электростатического поля устанавливается на основании теоремы Гаусса в интегральной или дифференциальной формах.

Контрольные вопросы

- 1.22 Сформулируйте теорему Гаусса для электростатического поля. В чем заключается физический смысл этой теоремы?
- 1.23 Как выглядит математическая запись теоремы Гаусса в интегральной и дифференциальной формах? Каковы особенности величин, входящих в эти соотношения?

1.8. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля

В п.1.5 получена связь между напряженностью электростатического поля и разностью потенциалов двух точек такого поля (1.27). Было показано (1.28), что интеграл по произвольному замкнутому контуру L от вектора напряженности \vec{E} электростатического поля равен нулю

$$\oint_L (\vec{E} d\vec{\ell}) = 0. \quad (1.44)$$

Этот результат является следствием того факта, что в электростатическом поле работа, совершаемая силами поля, на любом замкнутом пути

равна нулю, и является необходимым признаком *потенциальности* силового поля.

В векторном анализе интеграл вида

$$\Gamma_a = \oint_L (\vec{a} d\vec{\ell}) = \oint_L a_\ell d\ell = \oint_L a d\ell \cos(\vec{a}, d\vec{\ell}), \quad (1.45)$$

где $(d\vec{\ell})$ - векторный элемент контура L) называется *циркуляцией вектора \vec{a}* . Из определения (1.45) видно, что циркуляция Γ_a - величина алгебраическая. Ее знак определяется направлением обхода контура при интегрировании: при изменении направления обхода контура L на противоположное знак циркуляции также изменяется на противоположный.

Если для векторного поля \vec{a} циркуляция вектора \vec{a} по произвольному замкнутому контуру равна нулю, то такое поле называется *потенциальным*. В противном случае, поле называется *вихревым или соленоидальным*.

Утверждение, которое устанавливает важнейшее свойство векторного поля: потенциальное это поле или вихревое, называется *теоремой о циркуляции*.

На основе изложенного, равенство (1.44) представляет собой математическую запись теоремы о циркуляции вектора напряженности электростатического поля в интегральной форме, которая формулируется следующим образом.

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля по произвольному замкнутому контуру равна нулю.

Из определения (1.45) видно, что для вычисления циркуляции векторного поля по произвольному контуру необходимо знать поведение вектора \vec{a} , как функции точки, во всей области существования поля, что не всегда легко удается сделать. В таких случаях может помочь *дифференциальная форма* теоремы о циркуляции. Кратко поясним соображения, на основании которых устанавливается эта форма. Для этого введем некоторые новые необходимые понятия векторного анализа.

Рассмотрим какую-либо точку C векторного поля, лежащую в плоскости контура L (рис.1.15). Можно показать, что если существует предел отношения

$$\lim_{S \rightarrow C} \left(\frac{1}{S} \oint_L (\vec{a} d\vec{\ell}) \right) = \lim_{S \rightarrow C} \frac{\Gamma_a}{S}, \quad (1.46)$$

не зависящий от способа стягивания контура L к точке C , то этот предел определяет проекцию некоторого вектора на направление положительной нормали к плоскости контура L . Направление положительной нормали \vec{n} к плоскости контура связано с направлением обхода контура при вычислении циркуляции Γ_a правилом правого винта. Значение предела (1.46) зависит не только от положения точки C в поле вектора \vec{a} , но и от ориентации контура L в пространстве. Если изменить эту ориентацию, сохраняя положение точки C в плоскости контура, то при *некотором направлении \vec{n}_m* величина предела (1.46) достигнет *максимального значения*, которое определяет *модуль этого вектора*, направленного вдоль этой положительной нормали \vec{n}_m .

Описанный подобным образом вектор называется *ротором (или вихрем)* вектора \vec{a} . Таким образом,

$$(\text{rot } \vec{a})_n = \lim_{S \rightarrow C} \left(\frac{1}{S} \oint_L (\vec{a} d\vec{\ell}) \right). \quad (1.47)$$

В декартовой системе координат определение (1.47) имеет следующий вид:

$$\text{rot } \vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z, \quad (1.48)$$

которое можно записать формально с помощью определителя:

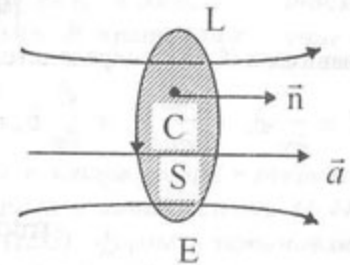


Рис.1.15

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \quad (1.49)$$

Сравнивая (1.48) с определителем векторного произведения оператора

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \text{ и вектора } \vec{a}, \text{ (1.49) имеем, что}$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} \equiv [\nabla \times \vec{a}]. \quad (1.50)$$

В дальнейшем мы будем использовать операторную форму записи (1.50) ротора вектора.

В векторном анализе доказывается равенство

$$\oint_L (\vec{a} d\vec{\ell}) = \int_S ([\nabla \times \vec{a}] d\vec{S}), \quad (1.51)$$

которое называется *интегральной теоремой Стокса*, где в правой его части интегрирование проводится по поверхности S любой формы, которая ограничена контуром L («опирается» на контур L).

Теорема Стокса формируется следующим образом.

Циркуляция вектора по некоторому контуру равна потоку ротора этого вектора через поверхность, ограниченную контуром.

Теперь, применяя теорему Стокса и понятие ротора, для циркуляции вектора напряженности (1.44) электростатического поля получим

$$\oint_L (\vec{E} d\vec{\ell}) = \int_S ([\nabla \times \vec{E}] d\vec{S}) = 0. \quad (1.52)$$

Так как контур L и поверхность S , ограниченная этим контуром, выбирается произвольно, то из (1.52) непосредственно следует, что для электростатического поля

$$[\nabla \times \vec{E}] = 0. \quad (1.53)$$

Равенство (1.53) является *дифференциальной формой* записи теоремы о циркуляции вектора \vec{E} электростатического поля.

Обобщая результат (1.53), можно говорить о том, что *если ротор вектора, характеризующего силовое поле, в любой его точке равен нулю, то такое поле потенциально. В противном случае - поле вихревое.*

Выводы

Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля в интегральной (1.44) и дифференциальной (1.53) формах устанавливает второе основное свойство этого поля: потенциально это поле или нет.

Контрольные вопросы

- 1.24. Сформулируйте теорему о циркуляции для электростатического поля в вакууме. Поясните физический смысл.
- 1.25. Из каких соображений вытекает справедливость теоремы о циркуляции вектора \vec{E} ?
- 1.26. Запишите теорему о циркуляции вектора \vec{E} в интегральной и дифференциальной формах. Каковы особенности этих форм записи?

2. Расчет электростатических полей

2.1. Прямая задача электростатики.

Уравнение Пуассона

Прямой задачей электростатики называется такая, когда по известному распределению зарядов $\rho = \rho(\vec{r})$ в некоторой области пространства необходимо определить напряженность $\vec{E}(\vec{r})$ и потенциал $\varphi(\vec{r})$ как функции положения точки поля. Покажем, что в общем случае подобную задачу можно решать двумя способами. Первый способ заключается в определении по известному распределению зарядов $\rho = \rho(x, y, z)$ проекций вектора \vec{E} : E_x, E_y, E_z на вы-

бранные оси координат путем решения уравнений (1.43) с учетом (1.33):

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

и (1.53) с учетом (1.48)

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (2.2)$$

Эта система четырех смешанных уравнений (2.1), (2.2) первого порядка в частных производных для E_x, E_y, E_z может быть сведена к системе трех уравнений, в каждое из которых входит только одна из неизвестных величин E_x, E_y или E_z .

Действительно, если продифференцировать равенство (2.1) по x , после чего изменить порядок дифференцирования во втором и третьем слагаемых левой части и использовать условия (2.2), то получим уравнение для проекции E_x :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (2.3)$$

Последовательное дифференцирование (2.1) по y и по z с использованием (2.2) дает, соответственно, уравнения для E_y и E_z :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial y}, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial z} \quad (2.5)$$

Отметим, что дифференциальные уравнения в частных производных вида

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \varphi(x, y, z) \quad (2.6)$$

или в символической форме

$$\Delta f = \varphi(\vec{r}) \quad (2.7)$$

в математике называются *уравнениями Пуассона*, где знаком Δ обозначен дифференциальный оператор Лапласа, который в декартовой системе координат имеет вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.8)$$

Решив уравнения (2.3) - (2.5), т.е. определив функции

$E_x = E_x(x, y, z); \quad E_y = E_y(x, y, z), \quad E_z = E_z(x, y, z)$, удовле-

творяющие этим уравнениям и соответствующим граничным условиям, можно найти с помощью равенства (1.27) разность потенциалов любых двух точек в области существования электростатического поля:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E} d\vec{l}).$$

Легко понять, что описанный путь решения электростатических задач, весьма громоздок и связан с большими вычислительными трудностями.

Более эффективен обратный подход к решению прямой задачи электростатики, когда по известному распределению зарядов определяют потенциал электростатического поля, как функцию точки $\varphi = \varphi(\vec{r})$. Затем путем прямого дифференцирования этой функции по координатам с помощью равенств (3.22) можно легко найти проекции вектора \vec{E} на выбранные направления осей координат.

Вид уравнения, связывающего функцию $\varphi = \varphi(\vec{r})$ и $\rho = \rho(\vec{r})$, устанавливается весьма просто. Для этого равенство (1.23) умножим скалярно слева на оператор ∇ :

$$(\nabla \vec{E}) = -(\nabla(\nabla\varphi)). \quad (2.9)$$

Левая часть этого равенства на основании (1.43) равна ρ / ϵ_0 . Правая часть с учетом свойств скалярного произведения двух векторов может быть записана в символической форме

$$(\nabla(\nabla\varphi)) = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi, \quad (2.10)$$

где Δ - оператор Лапласа.

Теперь на основании равенства (2.9) с учетом (2.10) или (2.8) запишем искомое уравнение, связывающее φ и ρ в символической форме:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (2.11)$$

или в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho(x, y, z)}{\epsilon_0}. \quad (2.12)$$

Выражения (2.11) или (2.12) называются *уравнениями Пуассона* для потенциала электростатического поля.

Таким образом, второй способ решения прямой задачи электростатики основан на решении только одного уравнения Пуассона для потенциала φ с соответствующими граничными условиями. Напряженность поля \vec{E} в этом случае определяется с помощью (1.24) и (1.25).

Выводы

Прямая задача электростатики допускает поиск решения двумя способами:

-на основе решения трех уравнений Пуассона для проекций вектора \vec{E} , по которым затем определяется потенциал,

- решения только одного уравнения Пуассона для потенциала, на основе которого путем простого дифференцирования находятся проекции вектора \vec{E} .

При этом второй способ значительно проще первого.

Контрольные вопросы

- 2.1. В чем заключается сущность прямой задачи электростатики?
- 2.2. Какими способами можно решать прямую задачу? Охарактеризуйте эти способы. Запишите соответствующие этим способам уравнения.
- 2.3. Запишите уравнение Пуассона для потенциала в сферической системе координат.

2.2. Примеры расчета электростатических полей простейших симметрий

В этом пункте обсудим еще один способ расчета параметров электростатического поля, в основе которого лежит непосредственное применение теоремы Гаусса в интегральной форме (1.41), принципа суперпозиции (1.17) и интегральной связи между φ и \vec{E} (1.27). Этот способ расчета особенно эффективен, когда распределение зарядов, создающих поле, обладает достаточно высокой симметрией. К этим случаям относятся распределения зарядов с плоской, сферической или цилиндрической симметрией.

2.2.1. Поля с плоской симметрией

а) Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости

Рассмотрим бесконечную плоскость, на которой равномерно распределены заряд с постоянной поверхностной плотностью

$\sigma = \frac{dq}{dS} = \text{const}$. На рис. 2.1 эта плоскость показана в виде сплошной линии, изображающей ее след при пересечении с плоскостью чертежа.

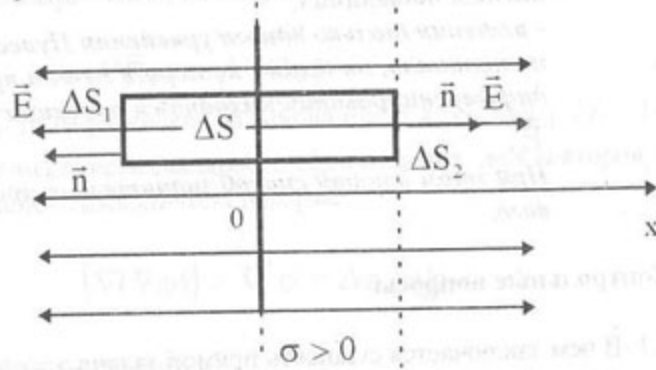


Рис.2.1

Из-за бесконечной протяженности и равномерного распределения заряда на рассматриваемой плоскости все точки поля, расположенные на некотором фиксированном расстоянии от этой плоскости по своим свойствам совершенно равноправны. Следовательно, напряженность \vec{E} везде перпендикулярна заряженной плоскости. Используем это при выборе формы воображаемой поверхности для вычисления потока Φ_E . Выделим на заряженной плоскости какой-либо участок площадью ΔS и построим на нем прямой цилиндр с основаниями, симметричными относительно заряженной плоскости (рис.2.1). Вычислим поток Φ_E через поверхность выбранного цилиндра

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \Phi_{E1} + \Phi_{\text{бок}} + \Phi_{E2}.$$

Легко заметить, что потоки через левое и правое основания цилиндра равны между собой

$$\Phi_{E1} = \Phi_{E2} = E\Delta S,$$

а поток через боковую поверхность равен нулю $\Phi_{\text{бок}} = 0$, так как $\vec{E} \perp \vec{n}$ во всех ее точках. В результате имеем

$$\Phi_E = 2E\Delta S.$$

С другой стороны, на основании теоремы Гаусса этот поток равен

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \Delta S,$$

где $\sigma \Delta S$ - суммарный заряд, заключенный внутри цилиндрической поверхности. Приравнивая правые части последних равенств, получим

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (2.13)$$

Из формулы (2.13) следует, что модуль вектора напряженности в рассматриваемом случае во всех точках пространства имеет одно и то же значение. Выбирая ось Ox системы координат так, как показано на рис. 2.1, формулу (2.13) можно записать в векторном виде:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x, \quad \text{при } x > 0, \quad (2.14)$$

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x, \quad \text{при } x < 0.$$

Легко заметить, что формулы (2.13) и (2.14) справедливы как для положительно ($\sigma > 0$), так и отрицательно ($\sigma < 0$) заряженной плоскости. Кроме того, из этих формул видно, что *электростатическое поле бесконечной равномерно заряженной плоскости во всем пространстве однородно, но напряженность его при переходе через эту плоскость терпит разрыв.*

Теперь найдем потенциал поля заряженной плоскости. Поскольку поле однородно и направлено параллельно оси Ox (2.14), то потенциал поля зависит только от одной координаты, а связь между \vec{E} и φ (1.24), (1.25) примет вид

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{dx} \vec{e}_x; \quad E = E_x = -\frac{d\varphi}{dx}. \quad (2.15)$$

Положим потенциал самой плоскости ($x = 0$), равным φ_0 (можно принять $\varphi_0 = 0$), тогда для произвольной точки поля, интегрируя последнее равенство, получим

$$\varphi - \varphi_0 = -E_x \cdot x, \quad \text{или} \quad \varphi = \varphi_0 - E_x x.$$

Учтя, что при $x > 0$ $E_x = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, а при $x < 0$ $E_x = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, для потенциала окончательно имеем

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x \text{ при } x > 0, \\ \varphi = \varphi_0 + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} x \text{ при } x < 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Зависимости (2.14) и (2.16) для случая $\sigma > 0$ изображены на рис. 2.2 а, б, соответственно.

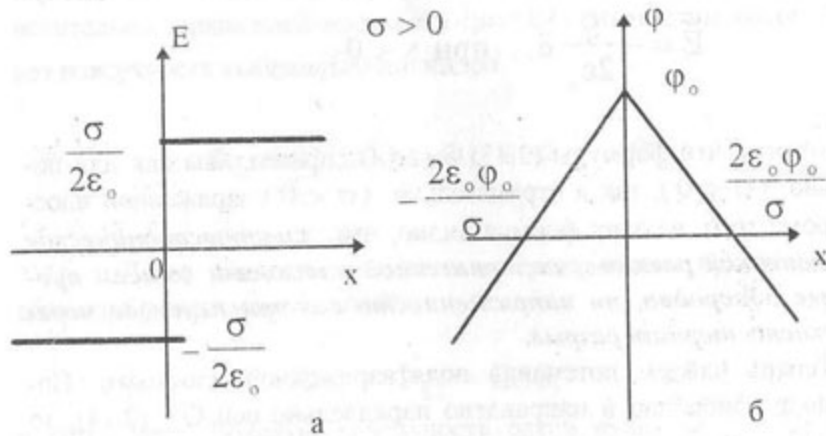


Рис.2.2

б) Поле двух бесконечных параллельных равномерно заряженных плоскостей

Используя результаты (2.14) и (2.16) для поля одной плоскости, легко их обобщить на случай системы параллельных плоскостей.

Для примера рассмотрим две бесконечные параллельные равномерно заряженные плоскости с поверхностными плотностями σ_1 и

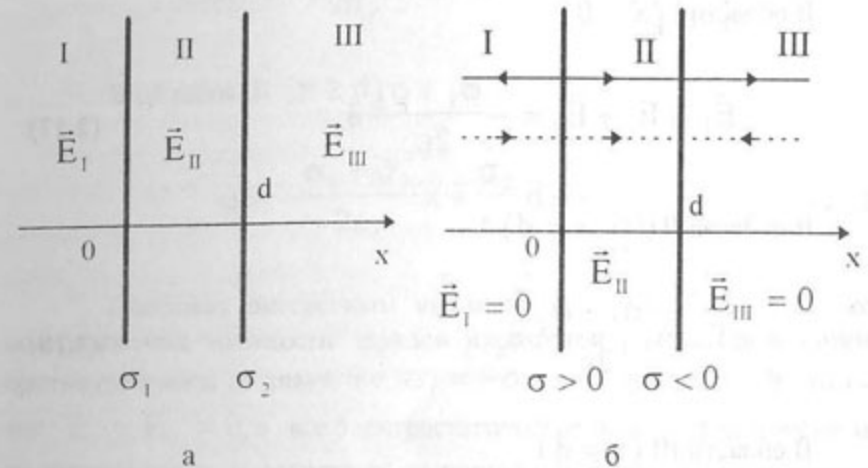


Рис.2.3

σ_2 (рис.2.3.), расположенные на расстоянии d друг от друга. Эти плоскости делят все пространство на три области I, II, III (рис.2.3., а), в каждой из которых, согласно принципу суперпозиции, результирующая напряженность поля определяется суммой $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, где \vec{E}_1 и \vec{E}_2 - напряженности, создаваемые в данной точке поля заряженными плоскостями 1 и 2. Используя (2.14), запишем равенства для \vec{E}_1 и \vec{E}_2

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = \frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \vec{e}_x, & \text{при } x > 0, \\ \vec{E}_1 = -\frac{\sigma_1}{2\epsilon_0} \vec{e}_x, & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{E}_2 = \frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \vec{e}_x, & x > d, \\ \vec{E}_2 = -\frac{\sigma_2}{2\epsilon_0} \vec{e}_x, & x < d, \end{cases}$$

с помощью которых найдем поле этой системы плоскостей.

В области I ($x < 0$)

$$\vec{E}_I = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} \vec{e}_x. \quad (2.17)$$

В области II ($0 < x < d$)

$$\vec{E}_{II} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} \vec{e}_x. \quad (2.18)$$

В области III ($x > d$)

$$\vec{E}_{III} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} \vec{e}_x. \quad (2.19)$$

Формулы (2.17) - (2.19) определяют как величину, так и направление напряженности поля при любых значениях σ_1 и σ_2 .

Конкретные значения и направления вектора \vec{E} в каждой из области зависят от соотношения величин и знаков σ_1 и σ_2 .

Однако из (2.17) - (2.19) следует, что в каждой из областей I - III электрическое поле остается однородным, как и в случае одной плоскости.

Для случая, когда потенциал плоскости I выбран равным φ_0 , в произвольной точке с координатой x потенциал может быть вычислен по одной из следующих формул.

В области I ($x \leq 0$)

$$\varphi = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} x + \varphi_0. \quad (2.20)$$

В области II ($0 \leq x \leq d$)

$$\varphi = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} x + \varphi_0. \quad (2.21)$$

В области III ($x \geq d$)

$$\varphi = -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} x + \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} d + \varphi_0. \quad (2.22)$$

Особенно интересным выглядит поле такой системы, когда поверхностные плотности зарядов плоскостей равны по величине и противоположны по знаку, т.е. $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$ (рис.2.3.б). В этом случае $E_I = E_{III} = 0$, и все электростатическое поле сосредоточено между заряженными плоскостями, величина напряженности которого равна

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (2.23)$$

а разность потенциалов между плоскостями

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d. \quad (2.24)$$

Выводы

Электростатическое поле бесконечной равномерно заряженной плоскости или системы параллельных плоскостей в каждой из областей однородно ($\vec{E} = \text{const}$). Потенциал поля в каждой области линейно зависит от координаты.

Контрольные вопросы

2.4. Докажите справедливость равенств (2.20) - (2.22).

2.5. Изобразите качественные зависимости $E(x)$ и $\phi(x)$ на графиках, используя (2.17) - (2.19), (2.20) - (2.22) и считая, что $\sigma_1 = \sigma$, $\sigma_2 = -2\sigma$, $\phi_0 = 0$ при $x = 0$.

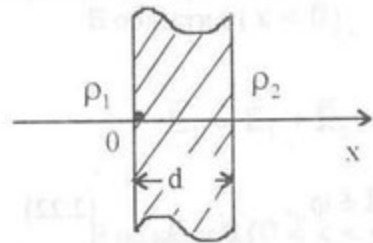


Рис.2.4

2.6. Используя результаты этого пункта, определите зависимость $E(x)$ для бесконечной плоской пластины толщиной d , которая заряжена по объему таким образом, что объемная плотность заряда $\rho > 0$ зависит только от x и линейно изменяется от значения ρ_1 у левой поверхности пластины (рис.2.4) до значения ρ_2 у правой поверхности.

2.2.2. Поля со сферической симметрией

а) Поле равномерно заряженной сферической поверхности

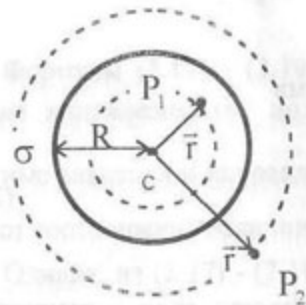


Рис.2.5

Рассмотрим вначале сферическую поверхность радиуса R , равномерно заряженную с поверхностной плотностью заряда

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2},$$

где Q - общий заряд сферы (рис.2.5). Поверхность сферы разделяет все пространство на

две части: внутреннюю ($0 \leq r < R$) и внешнюю ($r \geq R$).

Из-за сферической симметрии распределения заряда, если поле внутри сферы существует, то его напряженность в любой точке P_1 может иметь только радиальное направление и во всех точках, располо-

женных на расстоянии r от центра сферы S , должна иметь одну и ту же величину, т.е.

$$\vec{E} = \pm E(r)\vec{e}_r,$$

где \vec{e}_r - орт радиус-вектора \vec{r} точки P_1 . Выберем внутри заряженной сферы concentricкую с ней воображаемую сферическую поверхность радиуса r .

С учетом сказанного выше поток вектора \vec{E} через эту воображаемую поверхность равен

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint E_r dS = E 4\pi r^2. \quad (2.25)$$

Поскольку внутри воображаемой поверхности никаких зарядов нет, то на основании теоремы Гаусса $\Phi_E = 0$. Поэтому напряженность электростатического поля внутри равномерно заряженной по поверхности сферы равна нулю.

Проводя подобные рассуждения для внешней области $r \geq R$, имеем, поток Φ_E через воображаемую сферическую поверхность, проходящую через точку P_2 (рис.2.5.), может быть определен таким же равенством, что и (2.25). Однако в этом случае внутри воображаемой поверхности заключен весь заряд сферы Q . Поэтому

$$\Phi_E = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma 4\pi R^2}{\epsilon_0}.$$

Откуда при $r \geq R$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}. \quad (2.26)$$

Таким образом, окончательно имеем, что напряженность электростатического поля равномерно заряженной сферы равна

$$\begin{cases} E = 0, & \text{при } 0 \leq r < R, \\ E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, & \text{при } r \geq R. \end{cases} \quad (2.27)$$

Сравнивая (2.27) с (1.7), можно сделать вывод, что при $r \geq R$ поле равномерно заряженной сферы совпадает с полем точечного заряда Q на расстоянии $r \geq R$ от него.

Найдем потенциал поля равномерно заряженной по поверхности сферы. Для любых двух точек внутри сферы

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E} d\vec{l}) = 0,$$

так как в этой области $E = 0$ (2.27). Это означает, что потенциал во всей внутренней области постоянен: $\varphi = C_1 = \text{const}$. Для внешней области в ее произвольной точке, находящейся на расстоянии $r \geq R$ от центра заряженной сферы, полагая $\varphi = \varphi_0$ на ее поверхности при $r = R$, получим

$$\varphi_0 - \varphi = \int_R^r E dr = \int_R^r \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right).$$

Выберем нулевое значение потенциала в бесконечно удаленной от заряженной сферы точке, т.е. потребуем, чтобы при $r \rightarrow \infty$ $\varphi \rightarrow 0$. Тогда из последнего равенства имеем значение потенциала на поверхности заряженной сферы:

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R},$$

которое в силу непрерывности потенциала определяет его величину и внутри сферы ($C_1 = \varphi_0$). Итак, потенциал равномерно заряженной по поверхности сферы описывается равенствами:

$$\begin{cases} \varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}, & \text{при } 0 \leq r < R, \\ \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, & \text{при } r \geq R. \end{cases} \quad (2.28)$$

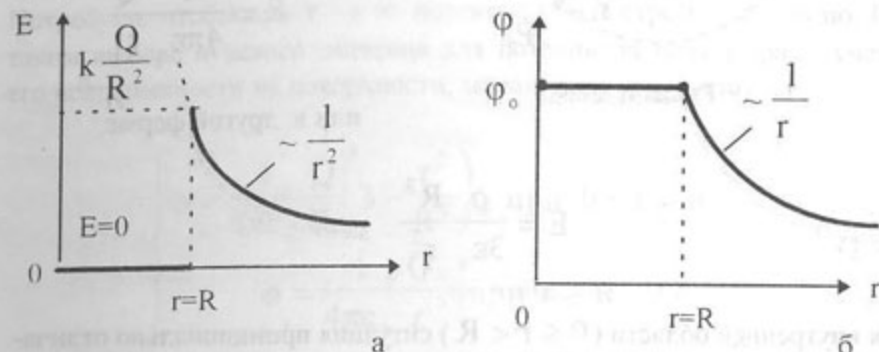


Рис.2.6

Зависимости $E(r)$ (2.27) и $\varphi(r)$ (2.28) изображены на рис 2.6 а,б для $Q > 0$.

Из сравнения (2.27) с (1.7) и (2.28) с (1.16) можно сделать вывод: *вне равномерно заряженной по поверхности сферы ее поле полностью совпадает с полем точечного заряда Q , помещенного в центр этой сферы. Другими словами при стягивании заряда сферы к ее центру без нарушения равномерности его распределения в области $r \geq R$ никаких изменений поля не происходит.*

б) Поле равномерно заряженного по объему шара

В качестве еще одного примера электростатического поля, обладающего сферической симметрией, рассмотрим шар радиуса R , равномерно заряженный с объемной плотностью заряда $\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, где Q -общий заряд шара (рис. 2.7). Во внешней

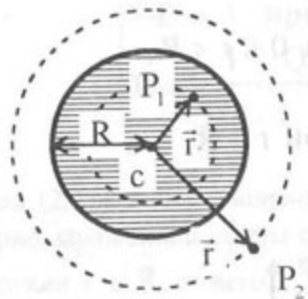


Рис.2.7

по отношению к шару области ($r \geq R$), проводя такие же рассуждения, как и в случае а) этого пункта получим подобный результат:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

или в другой форме

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2}$$

Для внутренней области ($0 \leq r < R$) ситуация принципиально отличается от случая а) этого пункта. Действительно, внутри воображаемой сферы, проходящей через точку P_1 , содержится заряд

$$q = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 = Q \frac{r^3}{R^3}$$

Поэтому поток Φ_E через эту поверхность, согласно теореме Гаусса, равен

$$\Phi_E = E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} q = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3}$$

Откуда для напряженности поля внутри шара имеем формулы

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r$$

Суммируя результаты, для напряженности поля равномерно заряженного по объему шара получим равенства

$$\begin{cases} E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r & \text{при } 0 \leq r < R, \\ E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & \text{при } r \geq R. \end{cases} \quad (2.29)$$

Потребуем, чтобы при $r \rightarrow \infty$ потенциал поля стремился к нулю. При таком выборе нулевого значения для потенциала поля шара, с учетом его непрерывности на поверхности, можно получить формулы

$$\begin{cases} \varphi = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right), & \text{при } 0 \leq r < R, \\ \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, & \text{при } r \geq R. \end{cases} \quad (2.30)$$

Зависимости (2.29) для $E(r)$ и (2.30) для $\varphi(r)$ изображены на рис. 2.8 а,б для случая $Q > 0$, где φ_0 - потенциал на поверхности шара.

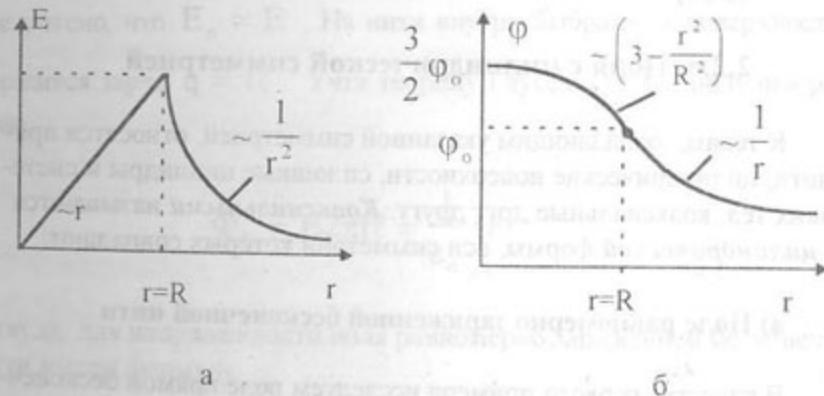


Рис.2.8

Таким образом, поле равномерно заряженного по объему шара имеет достаточно сложную структуру. *Внутри шара величина напряженности растет от центра к поверхности линейно, а потенциал убывает по параболическому закону. Вне шара поле совпадает по своим параметрам с полем точечного заряда Q , помещенного в точку, совпадающую с центром шара.*

Контрольные вопросы

- 2.7. Опишите поведение электростатических полей равномерно заряженных сферы и шара. Каковы особенности этих полей?
- 2.8. Рассмотрите случай двух концентрических равномерно заряженных сфер с радиусами $R_1 < R_2$ и одинаковыми по величине, но противоположными по знаку зарядами $Q_1 = -Q_2 = Q > 0$.
- 2.9. Рассмотрите случай равномерно заряженного с объемной плотностью заряда ρ шарового слоя с радиусами $R_1 < R_2$. Сравните Ваш результат при $R_1 \rightarrow 0$ с (2.29) и (2.30).

2.2.3. Поля с цилиндрической симметрией

К телам, обладающим указанной симметрией, относятся прямые нити, цилиндрические поверхности, сплошные цилиндры и системы таких тел, коаксиальные друг другу. *Коаксиальными называются тела цилиндрической формы, оси симметрии которых совпадают.*

а) Поле равномерно заряженной бесконечной нити

В качестве первого примера исследуем поле прямой бесконечной равномерно заряженной нити (рис. 2.9). Пусть линейная плотность заряда на нити равна

$$\tau = \frac{dq}{d\ell} = \text{const.}$$

Из соображений симметрии напряженность поля \vec{E} , создаваемого нитью, во всей области пространства направлена вдоль радиальных прямых. Выберем воображаемую поверхность в виде цилиндра длиной ℓ и радиуса r так, чтобы его ось совпадала с заряженной нитью (рис. 2.9). В этом случае линии напряженности пересекают только боковую поверхность выбранного цилиндра в направлении положительной нормали \vec{n} . Поэтому поток Φ_E через поверхность цилиндра равен потоку через его боковую поверхность $\Phi_{\text{бок}}$:

$$\Phi_E = \Phi_{\text{бок}} = \int_{S_{\text{бок}}} (\vec{E} d\vec{S}) = E 2\pi r \ell,$$

где учтено, что $E_n = E$. На нити внутри выбранной поверхности содержится заряд $q = \tau \ell$. Учтя теорему Гаусса для \vec{E} , получим равенство

$$\Phi_E = E 2\pi r \ell = \frac{1}{\epsilon_0} \tau \ell.$$

Откуда, для напряженности поля равномерно заряженной бесконечной нити имеем формулу

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Формулу для потенциала произвольной точки поля можно получить из (1.27). Полагая потенциал, равным ϕ_0 , на расстоянии $r = r_0$ от нити, будем иметь

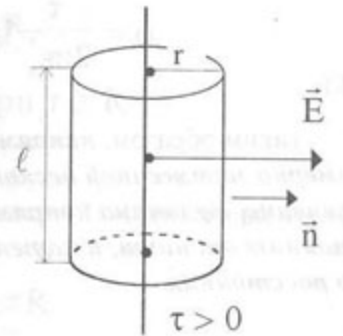


Рис. 2.9



$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r} + \varphi_0. \quad (2.32)$$

Таким образом, напряженность электростатического поля равномерно заряженной бесконечной нити имеет везде радиальное направление. Величина напряженности обратно пропорциональна расстоянию от нити, а потенциал зависит логарифмически от этого расстояния.

б) Поле бесконечной равномерно заряженной цилиндрической поверхности

Полученные результаты для бесконечной нити можно использовать для анализа свойств электростатического поля бесконечной равномерно заряженной цилиндрической поверхности радиуса R (рис.2.10). Распределение заряда на заряженной поверхности можно

характеризовать либо линейной $\tau = \frac{dq}{d\ell}$, либо поверхностной

плотностью заряда, между которыми существует простая

связь
$$\sigma = \frac{\tau}{2\pi R}. \quad (2.33)$$

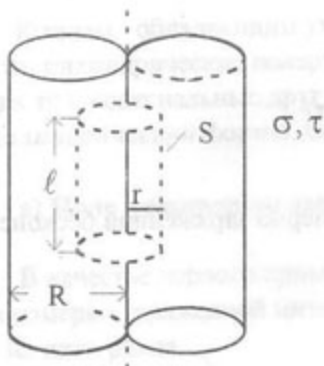


Рис.2.10

Напряженность поля вне заряженной цилиндрической поверхности ($r \geq R$) описывается формулой (2.31). Причем рассуждения, приводящие к этой формуле, такие же, как и для нити (случай а) этого пункта). Внутри же цилиндрической поверхности ($r < R$) напряженность поля равна нулю, так как поверхность S (рис.2.10) не содержит внутри себя никаких зарядов.

Поэтому

$$\begin{cases} E = 0, & \text{при } r < R, \\ E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}, & \text{при } r \geq R. \end{cases} \quad (2.34)$$

Для потенциала на основании (1.27) с учетом (2.34) имеем равенства:

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_0, & \text{при } r < R, \\ \varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{r} + \varphi_0, & \text{при } r \geq R. \end{cases} \quad (2.35)$$

В формулах (2.35) φ_0 - значение потенциала на заряженной цилиндрической поверхности при $r = R$.

Итак, электростатическое поле равномерно заряженной бесконечной цилиндрической поверхности за ее пределами совпадает с полем бесконечной нити с такой же линейной плотностью заряда. Внутри же поверхности напряженность поля равна нулю, а потенциал постоянен и равен потенциалу на цилиндрической поверхности.

в) Поле бесконечного равномерно заряженного по объему цилиндра

В этом случае (рис.2.11) распределение заряда можно характеризовать либо линейной

плотностью $\tau = \frac{dq}{d\ell}$ (заряд,

приходящийся на единицу длины цилиндра), либо объемной

плотностью $\rho = \frac{dq}{dV}$, связь

между которыми легко получить, записывая выражение для заряда, содержащегося в части цилиндра длиной ℓ :

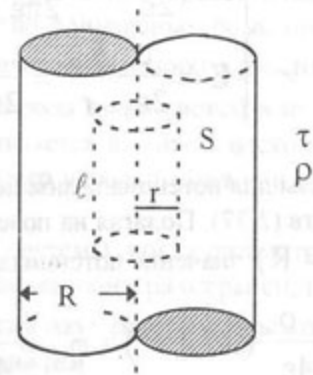


Рис.2.11

$$q = \tau \ell = \rho \pi R^2 \ell.$$

Откуда

$$\tau = \pi R^2 \rho. \quad (2.36)$$

За пределами цилиндра напряженность поля описывается формулой (2.31). Внутри же цилиндра при $r < R$ напряженность определим с помощью теоремы Гаусса. Для поверхности S (рис.2.11) имеем

$$\Phi_E = E 2\pi r \ell = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \pi r^2 \ell.$$

Поэтому

$$E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r.$$

Таким образом, для напряженности окончательно получим

$$\begin{cases} E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 R^2} r, & \text{при } r < R, \\ E = \frac{\rho}{2\epsilon_0} R = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 R}, & \text{при } r \geq R. \end{cases} \quad (2.37)$$

Формулы для потенциала можно получить на основании (1.27) с учетом равенств (2.37). Полагая на поверхности объемно заряженного цилиндра ($r = R$) значение потенциала, равным φ_0 , получим в этом случае

$$\begin{cases} \varphi = \frac{\rho}{4\epsilon_0} (R^2 - r^2) + \varphi_0 = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) + \varphi_0, & \text{при } r < R, \\ \varphi = \frac{\rho}{2\epsilon_0} R^2 \ln \frac{R}{r} + \varphi_0 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{r} + \varphi_0, & \text{при } r \geq R. \end{cases} \quad 2.38$$

Электростатическое поле равномерно заряженного по объему бесконечно цилиндра во внешней области совпадает с электрическим полем заряженной нити, имеющей такую же линейную плотность заряда. Внутри цилиндра величина напряженности линейно растет от оси цилиндра к его поверхности, а потенциал изменяется по параболическому закону.

Контрольные вопросы

- 2.10. Опишите поведение электростатических полей равномерно заряженных нити, цилиндрической поверхности и объемно заряженного цилиндра. Каковы особенности структуры этих полей?
- 2.11. Выведите формулы (2.32), (2.35) и (2.38).
- 2.12. Сравните формулу (2.34) при $r \rightarrow R$ с (2.23). Поясните результат сравнения.
- 2.13. Рассмотрите электростатическое поле двух коаксиальных бесконечных равномерно заряженных цилиндрических поверхностей, радиусы которых $R_1 < R_2$, для случая $\tau_1 = -\tau_2 = \tau$.

2.3. Электрическое поле диполя

Определенный интерес в электростатике представляет собой система двух разноименных по знаку, но одинаковых по величине точечных зарядов q и $-q$, расположенных на некотором расстоянии ℓ друг от друга. Изучение электрического поля таких систем и их поведения во внешнем электрическом поле является важным, поскольку, как будет видно ниже, эти результаты широко используются при описании электрического поля в веществе.

Особенно важна модель такой системы, когда рассматривается поле на расстояниях, значительно превышающих размеры системы зарядов, т.е. $r \gg \ell$. В этом случае система двух разноименных одинаковых по величине зарядов называется *диполем*.

Основной характеристикой диполя, определяющей характер его электрического поля и его поведение во внешнем поле, является *дипольный* или *электрический момент*. Дипольный момент определяется равенством

$$\vec{p} = q\vec{\ell}, \quad (2.39)$$

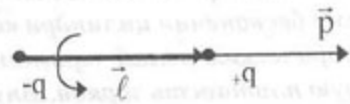


Рис.2.12

где вектор $\vec{\ell}$, равный по модулю расстоянию ℓ между зарядами q и $-q$ диполя (рис.2.12) и направленный по оси диполя от $-q$ к $+q$, называется *плечом диполя*.

Легко видеть, что электрическое поле диполя должно обладать осевой симметрией, так как при повороте диполя вокруг его оси никаких изменений в окружающем пространстве не происходит. Следовательно, структура поля в любой плоскости, содержащей в себе ось диполя, будет одна и та же. Поэтому для описания поля удобно выбрать цилиндрическую систему координат, ось Z которой проходит через центр оси диполя (рис.2.13). Начало координат поместим в середине оси диполя.

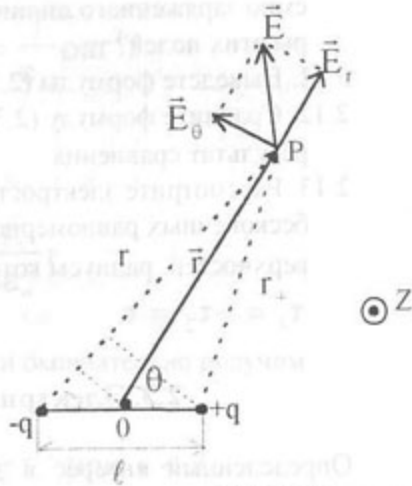


Рис.2.13

Радиус-вектор \vec{r} , проведенный из начала координат в точку наблюдения P , составляет с осью диполя угол θ .

Потенциал поля диполя в точке P определяется легко на основании (1.16) и принципа суперпозиции (1.21) (см. обозначения на рис. 2.13)

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_- - r_+}{r_+ r_-}$$

Из-за малости ℓ по сравнению с r ($r \gg \ell$), с достаточно высокой степенью точности можно считать, что $r_- - r_+ \approx \ell \cos\theta$, а $r_+ r_- \approx r^2$. Поэтому формула для потенциала примет вид

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\ell \cos\theta}{r^2} = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (2.40)$$

Вектор напряженности \vec{E} разложим на две составляющие: \vec{E}_r - направленную вдоль \vec{r} , и \vec{E}_θ - перпендикулярную \vec{r} , т.е. $\vec{E} = \vec{E}_r + \vec{E}_\theta$.

Модули этих составляющих равны проекциям вектора \vec{E} на эти направления: $|\vec{E}_\theta| = E_\theta$ и $|\vec{E}_r| = E_r$. Найдем эти проекции на основании (1.23) и (2.40).

$$\begin{cases} E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos\theta}{r^3}, \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin\theta}{r^3}, \\ E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (2.41)$$

Равенства (2.41) получены с учетом вида оператора ∇ в цилиндрической системе координат:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z.$$

Модуль вектора напряженности равен

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta}. \quad (2.42)$$

Особенность последней формулы заключается в том, что напряженность поля диполя убывает обратно пропорционально кубу расстояния

от диполя, т.е. быстрее, чем у точечного заряда ($\sim \frac{1}{r^2}$).

Выводы

Электрическое поле диполя обладает осевой симметрией. Параметры поля определяются дипольным моментом и положением точки наблюдения. Величина напряженности и потенциала убывает с ростом расстояния быстрее, чем у точечного заряда.

Контрольные вопросы

- 2.14. Изобразите на рисунке качественно вид линий напряженности и эквипотенциальных поверхностей поля диполя?
- 2.15. Запишите, используя (2.42), формулы для напряженности поля: на оси диполя; в плоскости, перпендикулярной оси диполя и проходящей через ее середину.

3. Описание электростатического поля в диэлектриках

3.1. Общая проблема описания поля в веществе

Любое вещество состоит из атомов или молекул, которые содержат в себе заряженные частицы обоих знаков: положительные ядра и отрицательные электроны, движущиеся вокруг ядер.

В предыдущих разделах было показано, что источниками электрического поля являются заряженные частицы. Все заряды условно можно разделить на два типа:

- Заряды, не входящие в состав вещества, которые называются *сторонними*. Отметим, что эти заряды могут находиться как внутри вещества, так и за его пределами.
- Заряды, входящие в состав атомов или молекул вещества.

Заряды обоих типов создают внутри вещества электрическое поле, которое называется *микроскопическим*. В соответствии с принципом суперпозиции

$$\vec{E}_{\text{микро}} = \vec{E}_{\text{стор}} + \vec{E}_{\text{молек}}, \quad (3.1)$$

где $\vec{E}_{\text{стор}}$ - напряженность поля, созданного сторонними зарядами; $\vec{E}_{\text{молек}}$ - напряженность, созданная зарядами, входящими в состав атомов или молекул вещества. $\vec{E}_{\text{молек}}$ - является очень быстропеременной функцией положения точки наблюдения и времени из-за внутриатомного и теплового движений частиц. Поэтому $\vec{E}_{\text{микро}}$ тоже обладает этими особенностями.

Поскольку в классических (не квантовых) теориях пренебрегают дискретностью вещества, считая его непрерывной средой, то для описания электрического поля в веществе применяют среднее значение $\vec{E}_{\text{микро}}$:

$$\vec{E} = \langle \vec{E}_{\text{микро}} \rangle = \langle \vec{E}_{\text{стор}} \rangle + \langle \vec{E}_{\text{молек}} \rangle.$$

При этом усреднение ведется по физически малому объему и по времени.

Напомним, что физически малый объем имеет размеры, значительно меньшие размеров объема, занимаемого веществом, в пределах которого дискретностью вещества уже можно пренебречь. Промежуток времени, по которому ведется усреднение, должен значительно превышать характерные времена микродвижений заряженных частиц вещества.

Введя обозначения $\langle \vec{E}_{\text{стор}} \rangle = \vec{E}_0$ и $\langle \vec{E}_{\text{молек}} \rangle = \vec{E}^*$, для усредненного поля \vec{E} получим равенство

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}^*, \quad (3.2)$$

которое определяет *макроскопическое поле* внутри вещества.

Теперь можно обозначить проблему, возникающую при описании поля в веществе.

Для определения \vec{E} необходимо знать \vec{E}_0 и \vec{E}^* . Поле \vec{E}^* , согласно (1.43), определяется усредненным распределением заряженных частиц вещества, которое в свою очередь существенным образом зависит от напряженности \vec{E} .

Эта проблема решается по-разному, в зависимости от электрических свойств вещества, которые определяются поведением заряженных частиц, входящих в состав вещества.

Если заряженные частицы при рассмотрении каких-либо явлений остаются в пределах собственных атомов или молекул, то соответствующие заряды называются связанными.

Заряженные частицы, которые могут перемещаться внутри вещества на расстояния, превышающие межатомные, называются свободными.

Вещества, в которых отсутствуют свободные заряды, называются диэлектриками. Очевидно, что реальные вещества всегда имеют в своем составе то или иное количество свободных зарядов. Поэтому диэлектрик - это идеализированная физическая модель вещества.

Ниже в данном разделе рассматривается описание электрического поля в диэлектрических средах.

3.2. Поляризация диэлектриков. Виды поляризации

Как уже указывалось в предыдущем пункте, описание электрического поля в диэлектрике существенным образом определяется усредненным распределением связанных зарядов внутри диэлектрика, которое, очевидно, зависит от структуры распределения заряженных частиц внутри молекулы.

Укажем наиболее характерные случаи усредненного распределения зарядов, входящих в молекулу.

а) Центральное-симметричное распределение. В этом случае средние положения суммарного положительного заряда и суммарного отрицательного заряда совпадают. Поэтому дипольный момент молекулы в отсутствие внешнего по отношению к ней электрического поля \vec{E} равен нулю. Такие молекулы и диэлектрики, состоящие из подобных молекул, называются неполярными. Во внешнем поле на противоположные по знаку заряды молекулы действуют силы, смещающие друг относительно друга «центры тяжести» положительных и отрицательных

зарядов. В результате этого молекула приобретает индуцированный дипольный момент \vec{p} , ориентированный вдоль внешнего поля \vec{E} .

б) Не симметричное распределение. При таком распределении средние положения суммарных положительного и отрицательного зарядов молекулы даже в отсутствие внешнего поля \vec{E} не совпадают. Поэтому также молекулы уже при $\vec{E} = 0$ имеют собственный дипольный момент $\vec{p} \neq 0$. В этом случае молекулы и диэлектрики, состоящие из таких молекул, называются полярными. Легко сообразить, что, если полярную молекулу поместить во внешнее по отношению к ней однородное поле, то на нее будет действовать момент сил

$$\vec{M} = [\vec{p} \times \vec{E}],$$

стремящийся повернуть молекулу в положение $\vec{p} \uparrow \uparrow \vec{E}$ (рис.3.1), т.е. ориентировать ее дипольный момент вдоль поля \vec{E} .

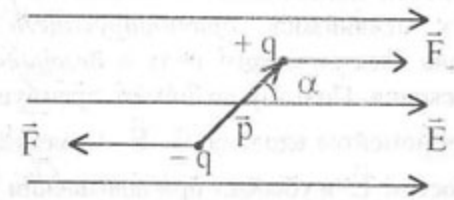


Рис.3.1

Еще одну группу диэлектриков образуют вещества, состоящие из ионных молекул. Кристаллическая решетка ионных диэлектриков представляет собой систему ионных подрешеток разного знака, вдвинутых друг в друга. При наложении внешнего электрического поля такие подрешетки слегка смещаются друг относительно друга в противоположных направлениях. В результате этого диэлектрик приобретает отличный от нуля макроскопический электрический момент.

Итак, из выше сказанного следует, что при действии на диэлектрик любого типа внешнего электрического поля происходит перераспределение связанных зарядов, приводящее к возникновению не равного нулю макроскопического электрического момента.

Процессы, сопровождающиеся появлением индуцированного макроскопического электрического момента, называются поляризацией диэлектрика.

Теперь соответственно указанным типам диэлектриков можно кратко рассмотреть основные механизмы их поляризации.

Электронная или деформационная поляризация неполярных диэлектриков происходит в результате смещения друг относительно друга связанных зарядов неполярных молекул, которые приобретают индуцированный дипольный момент, пропорциональный напряженности электрического поля \vec{E} :

$$\vec{p}_e = \epsilon_0 \beta \vec{E},$$

где β - *поляризуемость* молекулы, зависящая только от ее объема. Тепловое движение не влияет на величину дипольного момента молекулы, поэтому β не зависит от температуры. Отметим, что в системе единиц СИ поляризуемость молекулы измеряется в м^3 .

Ориентационная поляризация диэлектрика с жесткими полярными молекулами происходит в результате совместного действия двух механизмов: *ориентирующего* дипольные моменты молекул вдоль электрического поля и *дезориентирующего* за счет теплового движения. Поэтому возникает преимущественная ориентация дипольных моментов вдоль поля \vec{E} . Ориентационная поляризация возрастает с ростом \vec{E} и убывает при повышении температуры.

Ионная поляризация диэлектриков, имеющих ионные кристаллические решетки, обусловлена упругим смещением ионов разного знака от их положений равновесия.

Выводы

При внесении диэлектрика во внешнее электрическое поле происходит его поляризация. В зависимости от структуры молекул, образующих диэлектрик, различают три основных типа поляризации: электронную, ориентационную и ионную.

Контрольные вопросы

- 3.1. Поясните суть терминов: «сторонние», «свободные» и «связанные» заряды.
- 3.2. Что понимается под «микроскопическим» и «макроскопическим» полем? В чем общность и различие этих понятий?

- 3.3. Сформулируйте сущность проблемы описания электрического поля в веществе.
- 3.4. Перечислите и охарактеризуйте основные типы диэлектриков и механизмы их поляризации.

3.3. Поляризованность диэлектрика и ее связь с распределением связанных зарядов

Как уже указывалось в предыдущем пункте, при наличии внешнего электрического поля диэлектрик поляризуется, т.е. из-за перераспределения связанных зарядов возникает не равный нулю индуцированный электрический момент. Естественно характеризовать этот момент суммой дипольных моментов молекул $\sum_{\Delta V} \vec{p}$, заключенных внутри физически малого объема ΔV в окрестности данной точки А, отнесенной к величине этого объема

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow A} \frac{\sum \vec{p}}{\Delta V} \quad (3.4)$$

Введенная таким образом векторная величина \vec{P} называется *поляризованностью диэлектрика* и определяет *электрический момент единицы объема диэлектрика в окрестности данной точки*.

В системе единиц СИ поляризованность измеряется в Кл/м^2 .

Опытным путем определено, что у изотропных диэлектриков в сравнительно слабых электрических полях между поляризованностью и напряженностью электрического поля существует линейная зависимость

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}, \quad (3.5)$$

где χ - безразмерная положительная величина, обычно порядка нескольких единиц, называется *диэлектрической восприимчивостью*. Количественно χ зависит от свойств диэлектрика.

Убедиться в справедливости связи (3.5) особенно легко, если в определении (3.4) использовать равенство (3.3).

Ниже попытаемся установить количественную связь между поляризованностью диэлектрика и распределением связанных зарядов. При поляризации диэлектрика на его поверхности возникают избыточные связанные заряды, распределение которых будем характеризовать их поверхностной плотностью σ' . В случае неоднородного диэлектрика или при наличии внутри диэлектрика сторонних зарядов при его поляризации могут возникать избыточные объемные связанные заряды с объемной плотностью ρ' .

Рассмотрим вначале случай однородного изотропного диэлектрика, когда избыточные связанные заряды возникают на поверхности диэлектрика. Поместим плоскопараллельную бесконечную пластину диэлектрика в однородное электрическое поле. В силу изотропности диэлектрика электрическое поле внутри него \vec{E} и его поляризованность \vec{P} коллинеарны. Внутри диэлектрической пластины выделим тонкий цилиндр (рис.3.2), образующие которого параллельны вектору \vec{E} , а основания ΔS расположены на

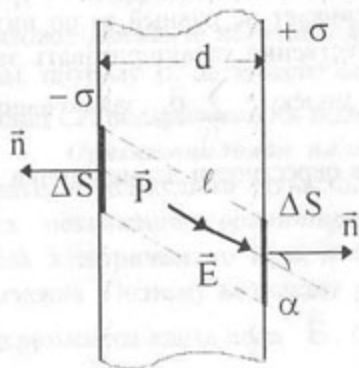


Рис.3.2

поверхностях пластины. Выделенный объем цилиндра представляет собой «макроскопический диполь», электрический момент которого может быть представлен в виде

$$p = \Delta q' \ell = \sigma' \Delta S \ell,$$

где $\Delta q'$ - величина связанного заряда, сосредоточенного на участке ΔS поверхности пластины.

Результирующий электрический момент выделенного цилиндрического объема можно вычислить другим путем, используя поляризованность диэлектрика (3.4):

$$p = P \Delta V = P \ell \Delta S \cos \alpha,$$

где $\Delta V = \ell \Delta S \cos \alpha$ - объем косоугольного цилиндра, а $\angle \alpha = (\vec{n}, \vec{P})$. Сравнивая оба выражения для электрического момента p , получим связь между поляризованностью P и поверхностной плотностью связанных зарядов σ' :

$$\sigma' = P \cos \alpha = P_n, \quad (3.6)$$

где P_n - проекция вектора \vec{P} на направление \vec{n} внешней нормали к поверхности диэлектрика.

Отметим здесь, что равенство (3.6) справедливо и для неоднородного диэлектрика произвольной формы.

Таким образом, *поверхностная плотность связанных зарядов равна нормальной составляющей поляризованности диэлектрика в данной точке поверхности.*

Равенство (3.6) используем для нахождения связи между объемными связанными зарядами ρ' и поляризованностью в случае неоднородного изотропного диэлектрика. Через элементарно-малую площадку dS , расположенную внутри диэлектрика, при его поляризации переносится связанный заряд dq'_1 вдоль \vec{E} и dq'_2 в противоположном направлении. Если диэлектрик неоднороден, то $dq'_1 \neq dq'_2$, и на выделенном участке dS возникает избыточный связанный заряд $dq' = dq'_1 + dq'_2$ (резльтирующий заряд, прошедший в направлении положительной нормали \vec{n} к площадке dS):

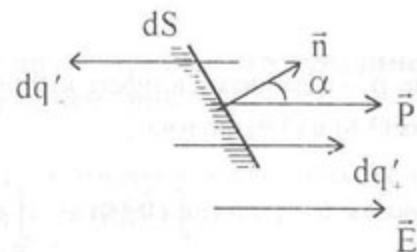


Рис.3.3

$$dq' = \sigma' dS = P dS \cos \alpha = d\Phi_p. \quad (3.7)$$

Здесь использовано равенство (3.6).

Правая часть равенства (3.7) представляет собой *элементарный поток $d\Phi_p$ вектора поляризованности через площадку dS ,*

выделенную внутри диэлектрика. Соотношение (3.7) позволяет вычислять поток вектора поляризованности через произвольную замкнутую поверхность S , расположенную внутри диэлектрика:

$$\Phi_p = \oint_S \vec{P} d\vec{S} \cos \alpha = \oint_S (\vec{P} d\vec{S}) = \oint_S dq' = q'_{\text{выш}}. \quad (3.8)$$

Напомним, что $\oint_S dq' = q'_{\text{выш}}$, согласно (3.7), определяет общий заряд,

прошедший через поверхность S в направлении положительной (внешней) нормали, т.е. заряд $q'_{\text{выш}}$, вышедший из объема V , ограниченного замкнутой поверхностью S . Но если из объема V вышел заряд $q'_{\text{выш}}$, это означает, что в этом объеме возник избыточный связанный заряд $q'_{\text{изб}}$, равный

$$q'_{\text{изб}} = -q'_{\text{выш}} = \int_V \rho' dV, \quad (3.9)$$

где ρ' - объемная плотность избыточных связанных зарядов. Объединяя (3.8) и (3.9), получим

$$\oint_S (\vec{P} d\vec{S}) = - \int_V \rho' dV. \quad (3.10)$$

Последнее равенство представляет собой математическое выражение теоремы Гаусса в интегральной форме для поляризованности диэлектрика.

Применяя к (3.10) интегральную теорему Остроградского-Гаусса (1.42), получим для поляризованности дифференциальную форму записи теоремы Гаусса:

$$(\nabla \vec{P}) = -\rho',$$

т.е. дивергенция поля вектора \vec{P} равна с противоположным знаком объемной плотности связанных зарядов, в данной точке диэлектрика.

Выводы

Поляризованность является количественной мерой процессов поляризации диэлектрика и численно равна электрическому моменту единицы объема в малой окрестности данной точки. Источниками поляризованности являются те точки диэлектрика, где отличны от нуля поверхностная или объемная плотности избыточных связанных зарядов.

Контрольные вопросы

- 3.5. Сформулируйте и запишите теорему Гаусса для поляризованности диэлектрика, поясните смысл этой теоремы.
- 3.6. Что является источниками поляризованности?
- 3.7. Может ли в однородном диэлектрике быть не равной нулю объемная плотность связанных зарядов? Если да, то укажите причину возникновения избыточных связанных зарядов в объеме однородного диэлектрика.

3.4. Электрическое поле в диэлектрике и его описание. Вектор электрического смещения

Здесь на основе результатов, полученных выше, попытаемся решить проблему описания электрического поля в диэлектрике, которая была обозначена в п.3.1 данного раздела.

Применяя к равенству (3.2) оператор дивергенции

$$(\nabla \vec{E}) = (\nabla \vec{E}_0) + (\nabla \vec{E}^*)$$

и теорему Гаусса для напряженности электрического поля (1.43):

$$(\nabla \vec{E}_0) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_{\text{стоп}} \quad \text{и} \quad (\nabla \vec{E}^*) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho', \quad \text{получим}$$

$$(\nabla \vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{\text{стоп}} + \rho'). \quad (3.12)$$

где $\rho' = \rho'(\vec{E})$ - объемная плотность связанных зарядов является функцией напряженности поля \vec{E} . В связи с этим, описание поля в диэлектрике, основанное на (3.12), требует независимого от (3.12) знания зависимости $\rho'(\vec{E})$ от неизвестной величины \vec{E} . Разорвать этот «замкнутый круг» можно, если ввести вспомогательную величину, источниками которой являются только сторонние заряды $\rho_{\text{стор}}$. Вид такой вспомогательной величины легко установить, используя введенную в п.3.3 поляризованность диэлектрика \vec{P} . Подставляя (3.11) в (3.12), получим

$$(\nabla \vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_{\text{стор}} - (\nabla \vec{P}))$$

или

$$(\nabla(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})) = \rho_{\text{стор}} \quad (3.13)$$

Векторная величина

$$\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D} \quad (3.14)$$

называется *электрическим смещением* и является искомой вспомогательной величиной. Подставляя обозначение (3.14) в (3.13), получим равенство

$$(\nabla \vec{D}) = \rho_{\text{стор}}, \quad (3.15)$$

которое является дифференциальной формой теоремы Гаусса для вектора *электрического смещения*.

Отметим, что электрическое смещение измеряется, согласно определению (3.14), в тех же единицах, что и поляризованность, т.е. в кулонах на квадратный метр (Кл/м²).

Если проинтегрировать равенство (3.15) по некоторому произвольному объему V и использовать интегральную теорему Остроград-

ского-Гаусса (1.42), то получим математический вид теоремы Гаусса в интегральной форме для вектора электрического смещения

$$\Phi_D = \oint_S (\vec{D} d\vec{S}) = \int_V \rho_{\text{стор}} dV. \quad (3.16)$$

Таким образом, *поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме сторонних зарядов, заключенных внутри этой поверхности*. Источниками электрического смещения являются те точки поля, где имеются сторонние заряды.

Теперь можно указать, что *основными уравнениями* электростатического поля в диэлектрических средах являются теорема Гаусса для электрического смещения в дифференциальной (3.15) или в интегральной (3.16) формах и теорема о циркуляции вектора напряженности в дифференциальной (1.53) или в интегральной (1.44) формах, т.е.

$$\begin{cases} (\nabla \vec{D}) = \rho_{\text{стор}}, \\ [\nabla \times \vec{E}] = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \oint_S (\vec{D} d\vec{S}) = \int_V \rho_{\text{стор}} dV, \\ \oint_L (\vec{E} d\vec{l}) = 0. \end{cases}$$

Выводы

Электрическое поле в диэлектриках удобно описывать с помощью электрического смещения, источниками которого являются только сторонние заряды.

Контрольные вопросы

- 3.8. Опишите кратко способ, с помощью которого решается задача описания электрического поля в диэлектриках.
- 3.9. Запишите и сформулируйте теорему Гаусса для электрического смещения.

3.5. Относительная диэлектрическая проницаемость.

Материальное уравнение

В предыдущем пункте 3.4 для описания электрического поля в диэлектрике введена вспомогательная величина: электрическое смещение, которое определяется распределением только сторонних зарядов. Однако для полной характеристики поля необходимо знать и его напряженность \vec{E} , как основную физическую величину. Для этого нужно иметь математическое соотношение, устанавливающее связь между электрическим смещением \vec{D} и напряженностью \vec{E} :

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}).$$

Конкретный вид этой связи, очевидно, должен существенным образом зависеть от свойств самой диэлектрической среды, которые определяют зависимость поляризованности диэлектрика \vec{P} от напряженности поля \vec{E} в ней: $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$.

Учитывая сказанное, равенству (3.14) можно придать формальный вид:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}(\vec{E}), \quad (3.17)$$

где второе слагаемое в правой его части неявным образом учитывает свойства диэлектрической среды.

Таким образом, равенство (3.17) связывает между собой свойства двух форм материи: *полевой формы* (в данном случае электрического поля) и *вещества* (диэлектрика).

В связи с этим равенство (3.17) называется *материальным уравнением, связывающим свойства электрического поля и диэлектрической среды, в которой это поле находится*.

Конкретный вид материального уравнения (3.17) устанавливается на основе сведений о структуре и свойствах молекул диэлектрика, характере взаимодействия между ними, а также структуре самого диэлектрика. В частности, вид уравнения (3.17) может быть получен на основе опытных данных.

Простейшую форму материальное уравнение имеет для изотропного диэлектрика в слабых полях. В этом случае справедливо равенство (3.5). Поэтому материальное уравнение (3.17) имеет вид

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi) \vec{E}. \quad (3.18)$$

Величина

$$1 + \chi = \epsilon \quad (3.19)$$

является безразмерной и называется *относительной диэлектрической проницаемостью* среды.

Относительная диэлектрическая проницаемость является важной характеристикой диэлектрика. При определенных условиях она показывает как ослабляется электрическое поле в диэлектрике по сравнению с вакуумом. Теперь с учетом (3.19) уравнение (3.18) запишем в форме

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}. \quad (3.20)$$

Укажем некоторые особенности относительной диэлектрической проницаемости в конкретных случаях.

а) В случае вакуума диэлектрическая среда отсутствует, поэтому напряженность поля $E^* = 0$ и, согласно (3.2), $\vec{E} = \vec{E}_0$.

Поляризованность \vec{P} также равна нулю из-за отсутствия связанных зарядов, поэтому (см. (3.5)) $\chi = 0$, а следовательно (3.19) $\epsilon = 1$.

Материальное уравнение (3.20) при этом имеет вид

$$\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0. \quad (3.21)$$

Таким образом, в вакууме электрическое смещение \vec{D}_0 отличается от напряженности \vec{E}_0 только постоянным множителем, а значит обладает теми же свойствами, что и \vec{E}_0 .

б) В неоднородном изотропном диэлектрике диэлектрическая восприимчивость, а следовательно и относительная диэлектрическая проницаемость являются функциями положения точки:

$$\chi = \chi(\vec{r}), \quad \varepsilon = \varepsilon(\vec{r}).$$

в) Особый случай, который, на наш взгляд, необходимо отметить, представляет анизотропные диэлектрики, свойства которых существенным образом зависят от выбора направления в среде. Для таких диэлектриков материальное уравнение в виде (3.20) записать невозможно. Связь между \vec{D} и \vec{E} относительно декартовой системы координат в этом случае выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_0 \left((1 + \chi_{xx}) E_x + \chi_{xy} E_y + \chi_{xz} E_z \right), \\ D_y &= \varepsilon_0 \left(\chi_{yx} E_x + (1 + \chi_{yy}) E_y + \chi_{yz} E_z \right), \\ D_z &= \varepsilon_0 \left(\chi_{zx} E_x + \chi_{zy} E_y + (1 + \chi_{zz}) E_z \right). \end{aligned}$$

Электрические свойства анизотропного диэлектрика характеризуются набором девяти величин χ_{ik} , которые записываются в виде таблицы

$$\|\chi\| = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix}.$$

В математике подобные величины называются *тензорами*, а числа χ_{ik} его *компонентами*.

г) Последний случай, на который следует обратить внимание, относится к так называемым *нелинейным диэлектрикам*. Характерной особенностью таких диэлектриков является *нелинейная* зависимость поляризованности от напряженности поля. В этом случае диэлектрическая восприимчивость также является функцией напряженности поля в диэлектрике $\chi = \chi(\vec{E})$.

Выводы

Характер электрического поля в диэлектрических средах описывается с помощью материального уравнения, учитывающего электрические свойства диэлектрика. Электрические свойства диэлектрика определяются диэлектрической восприимчивостью (или относительной диэлектрической проницаемостью), которая в общем случае представляет собой тензорную величину с компонентами, зависящими как от положения точки, так и напряженности поля.

Контрольные вопросы

- 3.10. В чем заключается суть материального уравнения? Между какими величинами материальным уравнением устанавливается связь для случая электрического поля?
- 3.11. Приведите примеры записи простейших видов материального уравнения.
- 3.12. Какими величинами характеризуются электрические свойства диэлектриков? Каковы основные особенности этих характеристик?

3.6. Электрическое поле вблизи границы раздела двух диэлектриков

В этом пункте рассмотрим поведение электрического поля по обе стороны от границы раздела, контактирующих между собой двух диэлектриков. Условия, определяющие это поведение, непосредственно вытекают из основных уравнений для электростатического поля в диэлектриках (1.44) и (3.16):

$$\oint_L (\vec{E} d\vec{l}) = 0 \quad \text{и} \quad \oint_S (\vec{D} d\vec{S}) = \int_V \rho_{\text{стор}} dV.$$

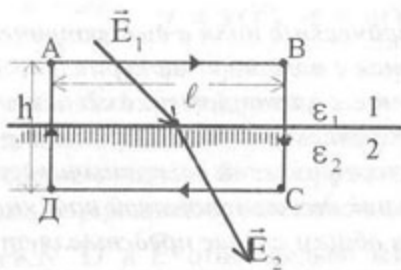


Рис.3.4

на этих сторон l выбирается такой малой, чтобы на их протяжении можно было считать выполненными условия $\vec{E}_1 = \text{const}_1$ и $\vec{E}_2 = \text{const}_2$. Контур ABCDA ориентируем так, чтобы вектор \vec{E}_1 находился в его плоскости.

Вычислим циркуляцию вектора \vec{E} по выбранному контуру ABCDA, разбив интеграл на четыре слагаемых:

$$\oint_{\text{ABCDA}} (\vec{E} d\vec{l}) = \int_A^B (\vec{E} d\vec{l}) + \int_B^C (\vec{E} d\vec{l}) + \int_C^D (\vec{E} d\vec{l}) + \int_D^A (\vec{E} d\vec{l}).$$

Поскольку нас интересует поведение \vec{E} вблизи границы раздела, устремим высоту контура h к нулю так, чтобы его стороны AB и CD равномерно приближались к границе раздела. При этом интегралы $\int_B^C (\vec{E} d\vec{l})$ и

$\int_D^A (\vec{E} d\vec{l})$ будут стремиться к нулю. С учетом всех этих условий и теоремы о циркуляции, получим

$$\oint_{\text{ABCDA}} (\vec{E} d\vec{l}) = E_{1\tau} l - E_{2\tau} l = 0. \quad (3.22)$$

Вспользуемся вначале теоремой о циркуляции вектора \vec{E} . Для этого вблизи границы раздела двух диэлектриков 1 и 2 (рис.3.4) построим небольшой замкнутый прямоугольный контур ABCDA так, чтобы его стороны AB и CD были параллельны поверхности раздела и расположены симметрично относительно нее. Дли-

В последнем равенстве $E_{1\tau}$ и $E_{2\tau}$ - проекции векторов \vec{E}_1 и \vec{E}_2 на направление обхода контура (рис.3.4.), т.е. величины касательных составляющих векторов напряженности \vec{E}_1 и \vec{E}_2 к границе раздела. Из равенства (3.22) имеем

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}. \quad (3.23)$$

Это означает, что проекции вектора напряженности на направление касательной к поверхности раздела в данной ее точке при переходе через эту поверхность остаются непрерывными.

Вспользовавшись материальным уравнением для изотропных диэлектриков (3.20), для касательных проекций электрического смещения получим равенство

$$\frac{D_{1\tau}}{D_{2\tau}} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}, \quad (3.24)$$

т.е. эти проекции при переходе через границу раздела терпят разрыв (скачок).

Поведение проекций векторов \vec{E} и \vec{D} на направление нормали к поверхности раздела установим на основе теоремы Гаусса для электрического смещения. Для этого на поверхности раздела выделим малый участок ΔS такой, чтобы в его пределах поле можно было считать однородным. На этом участке построим прямой цилиндр (рис.3.5) малой высоты h с основаниями, расположенными симметрично поверхности раздела. Вычислим поток электрического смещения через поверхность выделенного цилиндра

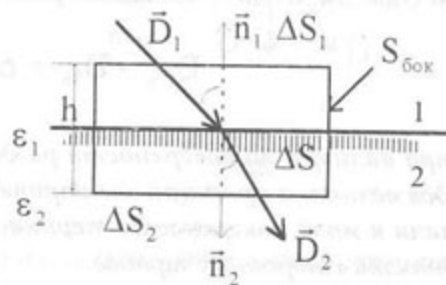


Рис.3.5

$$\Phi_D = \oint_S (\vec{D} d\vec{S}) = \int_{\Delta S_1} (\vec{D}_1 d\vec{S}_1) + \int_{S_{бок}} (\vec{D} d\vec{S}) + \int_{\Delta S_2} (\vec{D}_2 d\vec{S}).$$

Устремим высоту цилиндра к нулю так, чтобы его основания ΔS_1 и ΔS_2 стремились к поверхности раздела равномерно. В этом случае $S_{бок} \rightarrow 0$, а поэтому величина интеграла $\int_{S_{бок}} (\vec{D} d\vec{S})$ также стремится к нулю. В пре-

деле при $h \rightarrow 0$, с учетом условий выбора размера площадки $\Delta S = \Delta S_1 = \Delta S_2$, для величины потока Φ_D получим выражение

$$\Phi_D = -D_{1n} \Delta S + D_{2n} \Delta S.$$

С другой стороны, на основании теоремы Гаусса этот поток равен алгебраической сумме сторонних зарядов, заключенных внутри объема выбранного цилиндра. В пределе $h \rightarrow 0$ эта сумма зарядов равна стороннему заряду, сосредоточенному на участке ΔS поверхности раздела

$$q_{стор} = \sigma_{стор} \Delta S.$$

Таким образом, из двух последних равенств и (3.16) имеем

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{стор}, \quad (3.25)$$

т.е. при наличии на поверхности раздела диэлектриков сторонних зарядов величина проекции электрического смещения на направление нормали к этой поверхности терпит скачок, равный поверхностной плотности сторонних зарядов.

Во многих случаях сторонние заряды на поверхности раздела отсутствуют $\sigma_{стор} = 0$, тогда

$$D_{2n} = D_{1n}, \quad (3.26)$$

т.е. эти проекции непрерывны.

Используя (3.20) для проекций напряженности \vec{E} на направленные нормали к поверхности раздела, можно получить соотношение

$$\frac{E_{1n}}{E_{2n}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}. \quad (3.27)$$

Отметим, что скачок составляющих \vec{E}_n при переходе через границу раздела обусловлен наличием на ней избыточных связанных зарядов.

Из результатов (3.23), (3.24), (3.26) и (3.27) следует, что линии напряженности и линии электрического смещения на границе раздела преломляются (рис.3.6). Установим «закон преломления» этих линий.

Для этого разложим векторы \vec{D}_1 и \vec{D}_2 на составляющие:

$$\vec{D}_1 = \vec{D}_{1n} + \vec{D}_{1\tau},$$

$$\vec{D}_2 = \vec{D}_{2n} + \vec{D}_{2\tau}.$$

Из рис. 3.6 видно, что

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{D_{1\tau}}{D_{1n}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{D_{2\tau}}{D_{2n}}.$$

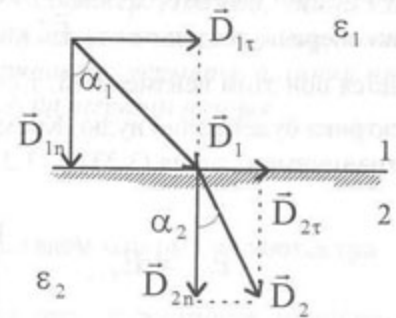


Рис.3.6

Откуда, учитывая условия (3.24) и (3.26), получим закон преломления линий электрического смещения

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}. \quad (3.28)$$

Аналогично выглядит закон преломления вектора \vec{E} , поскольку в изотропных диэлектриках $\vec{E} \uparrow \uparrow \vec{D}$.

Равенство (3.28) означает, что в диэлектрике с большей диэлектрической проницаемостью угол, который линии электрического смещения образуют с нормалью к поверхности раздела, возрастает, что приводит к сгущению линий поля.

В заключение этого пункта обсудим условия, при которых оказывается справедливым утверждение, что относительная диэлектрическая проницаемость среды показывает во сколько раз напряженность поля, созданная сторонними зарядами в вакууме, больше, чем напряженность в диэлектрике, т.е.

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E}. \quad (3.29)$$

Рассмотрим поле в вакууме \vec{E}_0 , созданное какой-либо системой сторонних зарядов. При внесении в это поле диэлектрика в результате его поляризации появляются индуцированные связанные заряды, которые, в свою очередь, создают поле \vec{E}^* (3.2). Электрическое поле в вакууме останется при этом неизменным, т.е. $\vec{E} = \vec{E}_0$, если \vec{E}^* за пределами диэлектрика будет равно нулю. Кроме этого, очевидно, должны выполняться граничные условия (3.23) и (3.27), которые в данном случае имеют вид

$$E_{от} = E_{\tau}; \quad \frac{E_{он}}{E_n} = \varepsilon, \quad (3.30)$$

где $\vec{E}_0 = \vec{E}_{от} + \vec{E}_{он}$; $\vec{E} = \vec{E}_{\tau} + \vec{E}_n$ - напряженности поля в вакууме и диэлектрике, соответственно. Равенства (3.29) и (3.30) могут выполняться одновременно, если $E_{от} = E_{\tau} = 0$, $E_0 = E_{он}$, $E = E_n$, т.е. если напряженность электрического поля везде перпендикулярна поверхности диэлектрика. Это означает, что для выполнения (3.29) необходимо, чтобы однородный изотропный диэлектрик имел объем, ограниченный эквипотенциальными поверхностями поля \vec{E}_0 , созданного сторонними зарядами.

Один из простейших примеров подобной ситуации приведен на рис. 3.7, где изображена бесконечная плоская пластина однородного изотропного диэлектрика, помещенного в однородное поле \vec{E}_0 сторонних зарядов так, что ее грани перпендикулярны полю \vec{E}_0 . Пунктиром помечены линии поля сторонних зарядов \vec{E}^* .

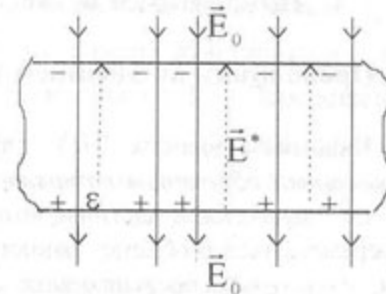


Рис.3.7

Выводы

На границе раздела двух диэлектриков линии электрического поля преломляются. Причем, линии электрического смещения в отсутствие на поверхности раздела сторонних зарядов непрерывны, а линии напряженности поля всегда терпят разрыв.

Контрольные вопросы

- 3.13. Запишите уравнения, следствием которых являются граничные условия.
- 3.14. Почему на границе раздела двух диэлектриков линии напряженности всегда терпят разрыв?
- 3.15. При каком условии линии электрического смещения при переходе через границу раздела двух диэлектриков непрерывны?
- 3.16. Приведите конкретные примеры, когда выполняется условие $\frac{E_0}{E} = \varepsilon$.

4. Проводники и электростатическое поле

4.1. Проводники во внешнем электростатическом поле

Напомним вначале, что *проводником называется тело (материальный объект), в котором имеются свободные носители заряда*, т.е. заряженные частицы, которые под действием внешних сил могут перемещаться в объеме данного тела на макроскопические расстояния, значительно превышающие средние расстояния между частицами.

В зависимости от вида свободных носителей заряда проводники делятся на два типа. а) *Проводники первого рода*, в которых перенос заряда не сопровождается химическими реакциями. К проводникам первого рода относятся практически все металлы и их сплавы. Основными носителями заряда в них являются электроны. б) *Проводники*

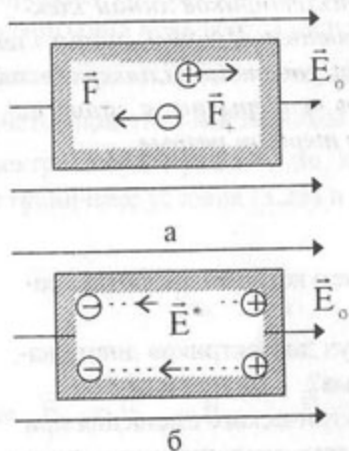


Рис.4.1

второго рода - тела, в которых основными свободными носителями заряда являются положительные и отрицательные ионы или их комплексы. Перенос заряда в таких проводниках, как правило, сопровождается переносом вещества и химическими превращениями.

Рассмотрим некоторый уединенный нейтральный проводник в отсутствие внешнего электрического поля \vec{E}_0 . Очевидно, что в этом случае все заряженные частицы распределены по объему проводника равномерно так, что в любой его точке объемная плотность заряда ρ в среднем равна нулю, а поэтому $\vec{E}^* = 0$ (3.2). Следовательно, при указанных условиях никакого макроскопического поля \vec{E} внутри проводника возникнуть не может. Если электрически нейтральный проводник поместить во внешнее электростатическое поле \vec{E}_0 , созданное сторонними зарядами, то на заряженные частицы, входящие в состав проводника, подействуют силы \vec{F}_+ , \vec{F}_- (рис.4.1 а), в результате чего свободные носители заряда нач-

нут перемещаться, скапливаясь у поверхности проводника. При этом возникает поле \vec{E}^* (на рис. 4.1 б изображено пунктирными линиями), направленное противоположно внешнему полю \vec{E}_0 . Перемещение свободных носителей будет продолжаться до тех пор, пока силы $\vec{F}_+ = q_+ \vec{E}$ и $\vec{F}_- = q_- \vec{E}$ не станут равными нулю. Это произойдет, когда результирующее поле

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}^*$$

обратится в нуль, т.е.

$$\vec{E} = 0. \quad (4.1)$$

В этом случае установится некоторое *равновесное распределение индуцированных зарядов* с поверхностной плотностью $\sigma \neq 0$ и объемной плотностью $\rho = 0$. Равенство $\rho = 0$ непосредственно следует из теоремы Гаусса (1.43) и условия (4.1). Поскольку условие (4.1) при равновесии должно выполняться в любой точке проводника, включая его поверхность (в противоположном случае в окрестности этой точки будет продолжаться перераспределение заряженных частиц), то согласно (1.27), *разность потенциалов любых двух точек проводника равна нулю*. Следовательно, весь объем проводника, включая его поверхность, представляет собой *эквипотенциальную область*

$$\phi = \text{const}. \quad (4.2)$$

На наш взгляд, полезно оценить здесь, при каких значениях напряженности внешнего поля \vec{E}_0 может быть нарушено условие (4.1), т.е. $E \neq 0$. Для этого необходимо, чтобы максимально возможное значение E^* было меньше E_0 .

Для примера возьмем медный проводник в виде куба с ребром $a=1$ см. Примем, что E_{max}^* достигается, когда все свободные электроны располагаются на одной из его граней (рис.4.2). Оценим E_{max}^* по формуле (2.23)

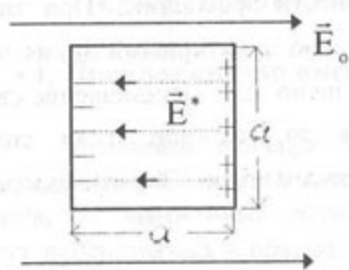


Рис.4.2

$$E_{\max}^* = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{a^2 \epsilon_0},$$

где $q = eN$ - максимальный заряд на грани образца, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл - величина заряда электрона, $N = N_{\text{ат}}$ - общее число свободных электронов, которое примем равным числу атомов меди (на каждый атом меди приходится один свободный электрон).

Учитывая, что $N_{\text{ат}} = \frac{m}{\mu} N_a = \frac{\gamma a^3}{\mu} N_a$, где $\gamma = 8,6 \cdot 10^3$ кг / м³ - плотность меди, $\mu = 64 \cdot 10^{-3}$ кг/моль - масса одного моля меди, $N_a = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹, для E_{\max}^* получим оценочное равенство

$$E_{\max}^* = \frac{e \gamma a N_a}{\mu \epsilon_0}.$$

произведем вычисления:

$$E_{\max}^* = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 8,6 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{64 \cdot 10^{-3} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \approx 10^{19} \text{ В / м.}$$

полученное значение настолько огромно, что на много порядков превышает внутриатомные поля. Поэтому при всех технически достижимых значениях напряженности поля \vec{E}_0 , условие (4.1) оказывается тогда выполненным.

В заключение отметим важный практический результат, вытекающий из условия (4.1). Поскольку внутри проводника, находящегося во внешнем поле, электрическое поле и объемные заряды отсутствуют, это позволяет в проводнике сделать полость. Наличие полости не приводит к перераспределению индуцированных зарядов, а поэтому напряженность поля внутри нее остается, равной нулю. Этот результат

широко используют на практике для электростатической защиты от внешних электрических полей.

Выводы

Внутри проводника, помещенного во внешнее электростатическое поле, при равновесии электрическое поле и объемные заряды отсутствуют. Весь проводник представляет собой эквипотенциальную область.

Контрольные вопросы

1. Укажите основные типы проводников и отличительные их особенности.
2. Какими условиями описывается равновесное распределение индуцированных зарядов в проводнике, находящемся во внешнем электростатическом поле?
3. Опишите электростатическое поле, если электрические заряды находятся внутри замкнутой полости проводника.

4.2. Электрическое поле заряженного проводника

В предыдущем пункте обсуждался случай, когда проводник, оставаясь в целом *электрически нейтральным*, помещался во внешнее электрическое поле. Здесь рассмотрим ситуацию, когда внешнее электростатическое поле отсутствует, а самому проводнику сообщен некоторый избыточный заряд Q . Возникают два вопроса: как распределен этот заряд в проводнике при равновесии и каково создаваемое им поле? Ответы достаточно просты. Действительно, в равновесии во всех точках проводника напряженность поля, создаваемого избыточными зарядами, должна быть равна нулю (в противном случае, продолжалось бы перераспределение заряженных частиц), а потенциал постоянен, т.е.

$$\vec{E} = 0, \quad \varphi = \text{const} \quad (4.3)$$

(сравните с (4.1) и (4.2)). Поэтому из (2.1) или уравнения Пуассона (2.12) непосредственно видно, что при равновесии во всех точках

внутри проводника объемная плотность избыточных зарядов ρ равна нулю. Это означает, что они распределяются по поверхности проводника с некоторой равновесной поверхностной плотностью $\sigma = dQ / dS = \sigma(\vec{r}_s)$, где \vec{r}_s - радиус - вектор, определяющий положение точки на поверхности проводника.

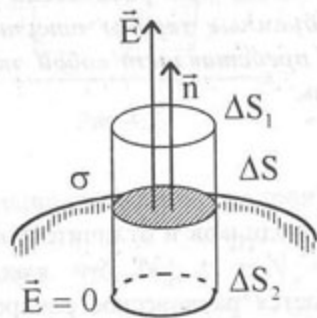


Рис.4.3

За пределами проводника непосредственно вблизи его поверхности напряженность поля избыточных зарядов везде перпендикулярна поверхности проводника, так как она эквипотенциальна. Это условие позволяет с помощью теоремы Гаусса установить связь между поверхностной плотностью заряда σ и напряженностью поля у поверхности проводника \vec{E} за его пределами. Выделим на поверхности проводника малую площадку ΔS такую, чтобы в ее пределах можно было считать $\sigma = \text{const}$ и $E = \text{const}$ вблизи нее (рис.4.3). На этой площадке построим прямой цилиндр с основаниями ΔS_1 и ΔS_2 ($\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S$), расположенными по обе стороны от поверхности проводника вблизи нее. На основании теоремы Гаусса для вектора \vec{E} , с учетом условия (4.3), получим, что поток Φ_E через выбранную поверхность цилиндра равен

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = E_n \Delta S_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \Delta S$$

или

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (4.4)$$

так как снаружи заряженного проводника напряженность поля вблизи его поверхности всюду перпендикулярна ей, то эквипотенциальные поверхности практически повторяют форму проводника. На значительном от него удалении, когда проводник можно считать точечным объектом, его поле описывается формулами (1.7) и (1.16), т.е. эквипотенциальные поверхности становятся сферическими (рис.4.4). Такое изменение формы эквипотенциальных поверхностей при удалении от проводника означает, что вблизи выступов на поверхности проводника градиент потенциала $|\nabla\phi|$, величина напряженности E и поверхностная плотность заряда $|\sigma|$ (4.4) возрастают, а вблизи впадин уменьшаются (точки 1 и 2 на рис. 4.4).

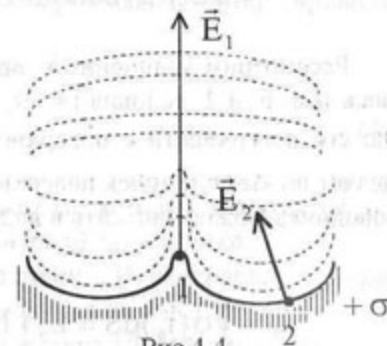


Рис.4.4

Выводы

Условия равновесия избыточных зарядов на проводнике имеют тот же вид, что и для нейтрального проводника во внешнем поле. Вблизи поверхности проводника за его пределами напряженность направлена перпендикулярно поверхности. Величина напряженности и распределение избыточных зарядов на поверхности существенно зависят от формы проводника.

Контрольные вопросы

- 4.4. Сформулируйте условия равновесия избыточных зарядов на проводнике. Поясните причины, приводящие к этим условиям.
- 4.5. Какую структуру имеет электрическое поле заряженного проводника вблизи его поверхности и вдали от нее?

4.3. Электроемкость. Конденсаторы

Рассмотрим уединенный заряженный проводник. Как уже указывалось (см. п. 4.2, условия (4.3)), при равновесии заряд распределяется по его поверхности с поверхностной плотностью $\sigma(\vec{r}_s)$, где \vec{r}_s - определяет положение точек поверхности S проводника. Полный заряд q проводника можно записать в виде цепочки равенств

$$q = \oint_S \sigma(\vec{r}_s) dS = \epsilon_0 \oint_S E_n dS = -\epsilon_0 \oint_S \frac{\partial \phi}{\partial n} dS, \quad (4.5)$$

где \vec{n} - единичный вектор внешней нормали. При записи (4.5) использована (4.4), а также связь (1.23).

Во всем пространстве за пределами проводника заряды отсутствуют ($\rho = 0$), поэтому уравнение Пуассона (2.11) переходит в уравнение Лапласа

$$\Delta \phi = 0. \quad (4.6)$$

Предположим, что найдено решение $\phi(\vec{r})$ уравнения (4.6), удовлетворяющее условию на границе проводника $E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ с полным зарядом (4.5). Так как уравнение Лапласа линейно, то функция $\phi^*(\vec{r}) = A\phi(\vec{r})$, A - произвольная константа, тоже является решением уравнения (4.6). Как видно из (4.5), это решение соответствует граничному условию

$$q^* = \oint_S \sigma^*(\vec{r}_s) dS = \epsilon_0 \oint_S E_n^* dS = -\epsilon_0 \oint_S \frac{\partial \phi^*}{\partial n} dS. \quad (4.7)$$

Подставляя в (4.7) $\phi^* = A\phi$, получим равенство $q^* = Aq$. Все это означает, что потенциал $\phi(\vec{r})$ в любой точке пространства, а следова-

тельно, и самого проводника ϕ , пропорционален заряду проводника q , т.е.

$$\phi = C^{-1}q, \quad (4.8)$$

где C - коэффициент пропорциональности, который называется *электрической емкостью (электроемкостью) проводника*.

Электроемкость в системе единиц СИ измеряется в *фарадах* (Φ). Если при изменении заряда проводника на 1 Кл его потенциал изменяется на 1В, то емкость проводника равна 1Ф (1Ф=1Кл/1В).

Отметим, что электроемкость уединенного проводника зависит от его формы, размеров и диэлектрических свойств среды, в которой находится этот проводник. Если в окрестности заряженного проводника находятся другие тела, то поле индуцированных на них зарядов изменяет равновесное распределение зарядов на самом проводнике, а следовательно и его потенциал. Однако пропорциональность потенциала проводника его полному заряду сохраняется, но с другим значением коэффициента пропорциональности, чем для уединенного проводника. Поэтому в общем случае электроемкость проводника, кроме указанного, зависит от электрических свойств, расположения, формы и размеров окружающих тел. Избежать влияния других тел на электроемкость можно, если рассматривать систему заряженных проводников, *электрическое поле которых полностью сосредоточено в объеме, занимаемом этой системой*. Такая система заряженных проводников называется *конденсатором*.

Простейшие конденсаторы состоят из двух заряженных проводников, форма и заряды которых выбираются специальным образом, чтобы их электрическое поле было заключено в объеме между этими телами. Сами проводники, образующие конденсатор называются его *пластинами* или *обкладками*. Чтобы выполнялось условие ограниченности объема, занимаемого электрическим полем простого конденсатора, необходимо, чтобы заряды его обкладок были равны по величине и противоположны по знаку.

Связь между величиной заряда на одной из обкладок конденсатора q и разностью потенциалов между ними $\phi_1 - \phi_2$ имеет вид аналогичный (4.8):

$$q = C(\phi_1 - \phi_2) = CU. \quad (4.9)$$

Разность потенциалов в данном случае равна напряжению между обкладками, т.е. $\varphi_1 - \varphi_2 = U$, что использовано при записи (4.9). Отметим, что в общем случае понятия *разности потенциалов и напряжения различны*. Это различие мы обсудим позже.

Емкость конденсатора C зависит только от формы, размеров, взаимного расположения его обкладок, а также диэлектрических свойств среды, находящейся между обкладками.

Выводы

В равновесии между полным зарядом проводника и его потенциалом существует прямая пропорциональная зависимость. Емкость проводника или системы проводников в общем случае зависит от многих факторов и характеризует способность системы накапливать заряд при данных условиях.

Контрольные вопросы

- 4.6. Поясните, почему между зарядом и потенциалом проводника существует связь в виде (4.8)?
- 4.7. Какими факторами определяется величина емкости проводника, конденсатора и почему?

4.4. Примеры вычисления емкости

Опишем сначала общий подход к вычислению емкости простых конденсаторов. Поскольку избыточные заряды при равновесии распределяются по поверхности проводников, то в остальном пространстве справедливо уравнение Лапласа (4.6) $\Delta\varphi = 0$. Решив это уравнение с соответствующими граничными условиями, когда заряды на обкладках имеют заданную величину q : $E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, находят зависимость $\varphi(\vec{r})$, а следовательно и разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между обкладками. После этого емкость определяют по формуле (4.9).

Рассмотрим некоторые простейшие примеры вычисления емкости, которые не требуют решения уравнения Лапласа.

При этом воспользуемся результатами расчета электростатических полей, которые получены в п. 2.2.

а) Емкость единичного сферического проводника.

В этом случае потенциал на поверхности проводника определяется формулой (2.28) при $r = R$:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}.$$

Сравнив ее с (4.8), получим для емкости равенство

$$C = 4\pi\epsilon_0 R.$$

Если проводник находится в среде с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ , то его емкость возрастает по сравнению с вакуумом в ϵ раз (здесь необходимо вспомнить рассуждения, сопровождающие условия (3.29) и (3.30)):

$$C = 4\pi\epsilon_0 \epsilon R. \quad (4.10)$$

б) Емкость плоского конденсатора.

Плоский конденсатор представляет собой систему двух параллельных пластин площадью S каждая, расположенных на малом расстоянии d друг от друга ($\sqrt{S} \gg d$) таким, что рассеянием поля у их краев можно пренебречь. При равенстве по величине и противоположности по знаку зарядов на пластинах разность потенциалов между ними определяется формулой (2.24):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{qd}{\epsilon_0 S}.$$

Откуда имеем

$$q = \frac{\epsilon_0 S}{d} (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Сравнивая последнее равенство с определением (4.9), получим для емкости вакуумного (воздушного) конденсатора формулу

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{d}. \quad (4.11)$$

Если пространство между обкладками полностью заполнено диэлектриком, то формула (4.11) принимает вид

$$C = \epsilon C_0 = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}. \quad (4.12)$$

Отметим, что (4.11) и (4.12) являются приближенными формулами, выполняющимися с тем большей точностью, чем точнее соблюдается условие $\sqrt{S} \gg d$.

в) Емкость сферического конденсатора

Сферический конденсатор представляет собой две концентрические металлические сферы радиусами R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$), несущие на себе заряды q противоположного знака. В этом случае напряженность E поля между обкладками $R_1 \leq r < R_2$ обусловлена только полем внутренней обкладки (2.27):

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Интегрируя это выражение, согласно (1.27), получим значение разности потенциалов между обкладками:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Сравнивая последнее равенство с (4.9), для емкости вакуумного сферического конденсатора имеем формулу

$$C_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (4.13)$$

Если пространство между обкладками полностью заполнено однородным изотропным диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ , то формула (4.13) приобретает вид

$$C = 4\pi\epsilon_0 \epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (4.14)$$

Интересно отметить здесь случай, когда радиусы сфер R_1 и R_2 близки по своим значениям, т.е. $d = R_2 - R_1 \ll R_1$. При этом условии преобразуем дробь в (4.14), пренебрегая величиной d по сравнению с R_1

$$\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = \frac{R_1 (R_1 + d)}{d} \approx \frac{R_1^2}{d}.$$

Произведя соответствующую замену в (4.14) и опуская индекс «1», для емкости тонкого сферического конденсатора получим выражение

$$C \approx 4\pi\epsilon_0 \epsilon \frac{R^2}{d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}, \quad (4.15)$$

где учтено, что $S = 4\pi R^2$. Сравните (4.15) с (4.12).

г) Емкость цилиндрического конденсатора.

Цилиндрический конденсатор состоит из двух коаксиальных (соосных) металлических цилиндров с радиусами R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$). Чтобы можно было пренебречь краевыми эффектами рассеяния электрического поля, будем считать длину цилиндров ℓ значительно большей по сравнению с зазором $d = R_2 - R_1$ между ними, т.е. $\ell \gg R_2 - R_1$. Если заряды цилиндров q равны между собой и

противоположны по знаку ($q_1 = -q_2 = q$), то электрическое поле сосредоточено в зазоре между ними и определяется формулой (2.34):

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 \ell r}, \text{ при } R_1 \leq r < R_2, \quad (4.16)$$

где учтено, что поле E в зазоре создается только внутренним цилиндром.

Интегрируя (4.16), получим выражение для разности потенциалов между обкладками конденсатора

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 \ell} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

откуда

$$q = \frac{2\pi\epsilon_0 \ell}{\ln R_2 / R_1} (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Сравнивая последнюю формулу с (4.9), для емкости цилиндрического вакуумного конденсатора имеем

$$C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 \ell}{\ln R_2 / R_1}. \quad (4.17)$$

Если зазор между цилиндрами заполнить однородным изотропным диэлектриком, то (4.17) примет вид

$$C = \epsilon C_0 = \frac{2\pi\epsilon_0 \epsilon \ell}{\ln R_2 / R_1}. \quad (4.18)$$

д) В заключение этого пункта отметим, что результаты (4.12) и (4.15) являются справедливыми для конденсаторов с произвольной формой обкладок. При этом должно выполняться условие

$$d \ll R, \quad (4.19)$$

которое означает, что радиус кривизны R обкладок на любом их участке должен быть значительно больше зазора d между ними на этом же участке. Таким образом,

$$C \approx \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}, \text{ при } d \ll R. \quad (4.20)$$

Справедливость этого результата обусловлена тем, что всякое неоднородное поле на малых расстояниях можно считать приближенно однородным.

Выводы

Точное определение емкостей произвольной системы проводников является сложной задачей, требующей решения уравнения Лапласа для потенциала Φ с соответствующими граничными условиями. Задача упрощается в случае простых конденсаторов с обкладками высокосимметричной формы. Для конденсаторов с тонким зазором между обкладками существует универсальная приближенная формула для электроемкости.

Контрольные вопросы

- 4.8. Какой результат для электроемкости получается при неограниченном увеличении радиуса внешней обкладки R_2 сферического конденсатора?
- 4.9. Покажите, что формула (4.18) при условии $R_2 - R_1 \ll R_1$ переходит в (4.20).

4.5. Энергия системы точечных зарядов

Как известно из механики, *точечные* объекты взаимодействуют попарно и их взаимодействие между собой не зависит от наличия в окружающем пространстве других тел. Поэтому вначале рассмотрим систему, состоящую из двух неподвижных точечных зарядов q_1 и q_2 ,

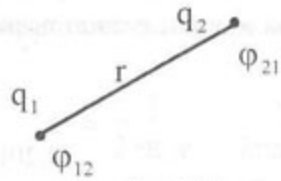


Рис.4.5

находящихся на некотором расстоянии r друг от друга (рис.4.5). Поскольку кулоновские силы взаимодействия консервативны, то система зарядов q_1 и q_2 обладает потенциальной энергией взаимодействия, которую, согласно (1.14), можно определить двумя спосо-

бами.

Как энергию заряда q_1 в поле ϕ_{12} заряда q_2

$$W_1 = q_1 \phi_{12}$$

или как энергию заряда q_2 в поле ϕ_{21} заряда q_1

$$W_2 = q_2 \phi_{21}$$

где $\phi_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r}$ и $\phi_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r}$ - потенциалы, создаваемые зарядами q_2 и q_1 в тех точках, в которых находятся заряды q_1 и q_2 соответственно. Легко видеть, что

$$W_1 = W_2 = W_{12} = q_1 \phi_{12} = q_2 \phi_{21}$$

Поэтому выражение для энергии взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов можно представить в симметричной форме:

$$W_{12} = \frac{1}{2}(W_1 + W_2) = \frac{1}{2}(q_1 \phi_{12} + q_2 \phi_{21}). \quad (4.21)$$

Используя независимость попарного взаимодействия и аддитивность потенциальной энергии, для произвольной системы N неподвижных точечных зарядов получим

$$W = \sum_{i \neq k} W_{ik} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left(\sum_{k=1, k \neq i}^N \phi_{ki} \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \phi_i, \quad (4.22)$$

где согласно принципу суперпозиции (1.21)

$$\phi_i = \sum_{k=1, k \neq i}^N \phi_{ki} \quad (4.23)$$

- потенциал результирующего поля, созданного всеми зарядами системы, кроме q_i , в той точке, где находится заряд q_i (неподвижный точечный заряд сам на себя не действует).

4.6. Энергия уединенного заряженного проводника, конденсатора. Энергия электрического поля

Формула (4.22) для электростатической энергии взаимодействия системы неподвижных точечных зарядов позволяет легко определить энергию уединенного заряженного проводника. Действительно, поскольку при равновесном распределении зарядов весь объем проводника эквипотенциален $\phi = \text{const}$, это означает, что все элементарные заряды $\Delta q_i = q_i$ находятся в точках с равными потенциалами $\phi_i = \phi$. Учтя это обстоятельство, из (4.22) получим

$$W = \frac{1}{2} \phi \sum_{i=1}^N \Delta q_i = \frac{1}{2} q \phi, \quad (4.24)$$

где $q = \sum_{i=1}^N \Delta q_i$ - полный избыточный заряд проводника. Используя понятие емкости уединенного проводника (4.8), равенство (4.24) можно записать в других формах:

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (4.25)$$

Теперь найдем энергию заряженного конденсатора. Для этого обозначим потенциал положительно заряженной обкладки φ_1 , а отрицательной - φ_2 . Используя (4.24), получим

$$W = W_1 + W_2 = \frac{1}{2}q\varphi_1 + \frac{1}{2}(-q)\varphi_2$$

или

$$W = \frac{1}{2}q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2}qU. \quad (4.26)$$

С помощью (4.9) запишем (4.26) в виде, аналогичном (4.25)

$$W = \frac{CU^2}{2}, \quad (4.27)$$

$$W = \frac{q^2}{2C}. \quad (4.28)$$

Заметим, что формулы (4.26) - (4.28) эквивалентны. Но для сравнения энергий различных конденсаторов равенством (4.27) удобней пользоваться при параллельном их соединении, а равенством (4.28) - при последовательном соединении конденсаторов.

Энергия заряженного конденсатора может быть вычислена с использованием параметров электрического поля между его обкладками. Для простоты выкладок рассмотрим плоский заряженный конденсатор, емкость которого равна $C = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}$. Поскольку поле между пластинами однородно, то $U = Ed$. В результате формулу (4.27) представим в виде

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} Sd = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} V, \quad (4.29)$$

где $V = Sd$ - объем конденсатора. С другой стороны, V - это объем, в котором сосредоточено *однородное электростатическое* поле, созданное заряженными обкладками. Поэтому оно равномерно распределено по объему с плотностью

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2}. \quad (4.30)$$

Отметим здесь, что, хотя (4.30) получена для однородного электростатического поля, эта формула обладает очень большой общностью. Она справедлива как для неоднородных, так и для нестационарных электрических полей. В случае неоднородного электростатического поля объемная плотность его энергии является функцией положения точки: $w = w(\vec{r})$. Поэтому энергия электрического поля может быть вычислена с помощью интеграла

$$W_{эл} = \int_V w(\vec{r}) dV = \int_V \frac{\epsilon_0 \epsilon(\vec{r}) E^2(\vec{r})}{2} dV, \quad (4.31)$$

где V - объем той области пространства, в которой сосредоточено электрическое поле.

В случае изотропного диэлектрика в слабых полях справедливо материальное уравнение $D = \epsilon\epsilon_0 E$. поэтому формулу (4.30) можно представить в виде

$$w = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon_0 \epsilon} \quad (4.32)$$

или, учитывая, что в изотропном диэлектрике $\vec{E} \uparrow \uparrow \vec{D}$,

$$w = \frac{(\vec{E}\vec{D})}{2}. \quad (4.33)$$

Смысл последнего равенства рассмотрим подробнее. Так как по определению электрическое смещение $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, то подставляя это равенство в (4.33), получим

$$w = \frac{(\vec{E}(\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}))}{2} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{(\vec{E}\vec{P})}{2}. \quad (4.34)$$

Первое слагаемое в этом равенстве представляет собой объемную плотность энергии электрического поля \vec{E} в вакууме, а второе равно энергии, затрачиваемой на поляризацию единицы объема диэлектрика.

В заключение этого пункта кратко обсудим вопрос, который может возникнуть у внимательного читателя: «Где же сосредоточена энергия? Являются ли носителями энергии заряды, расположенные на обкладках конденсатора, или электростатическое поле, сосредоточенное в объеме между обкладками?».

К сожалению, в случае электростатических полей на этот вопрос ответить невозможно, так как *неподвижные* заряды и порождаемое ими *электростатическое* поле неразрывно связаны и друг без друга существовать не могут.

Положительный ответ на поставленный вопрос может быть получен в общей теории электромагнитного переменного во времени поля, которое может существовать как самостоятельный объект в отрыве от породивших это поле источников.

Выводы

Неподвижные заряженные тела и порождаемое ими электростатическое поле, как единая система материальных объектов, обладает собственной энергией. Вопрос о локализации этой энергии в рамках электростатики остается открытым.

Контрольные вопросы

- 4.10. Поясните физические причины наличия в формуле (4.22) коэффициента «1/2».
- 4.11. Используя (4.30) и (4.31), определите энергию а) сферического и б) цилиндрического воздушных конденсаторов. Охарактеризуйте распределение энергии электрического поля по объему этих конденсаторов.

5. Постоянный электрический ток

5.1. Электрический ток и его характеристики

В этом разделе будут рассмотрены некоторые физические явления, связанные с движением заряженных частиц. Такими частицами в зависимости от свойств среды могут быть электроны, ионы или макроскопические заряженные тела. Наиболее характерным явлением, сопровождающим движение заряженных частиц через какую-либо воображаемую поверхность, является перенос некоторого суммарного заряда. Подобный перенос заряда наблюдается, если в движении заряженных частиц наблюдается некоторая упорядоченность.

Таким образом, всякое упорядоченное (направленное) движение заряженных частиц, при котором происходит перенос отличного от нуля заряда через выделенную в среде поверхность, называется электрическим током или просто током.

Согласно этому определению, естественно характеризовать электрический ток величиной заряда, переносимого через выделенную поверхность в единицу времени:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (5.1)$$

Введенная таким образом величина I , называется *силой тока*. Из определения (5.1) следует, что сила тока характеризует *скорость переноса* заряда через данную поверхность. В случае *постоянного тока*, когда сила тока от времени не зависит, (5.1) можно записать в виде

$$I = \frac{q}{t}, \quad (5.2)$$

где q - заряд, перенесенный через данную поверхность за время t .

Сила тока является скалярной величиной. В системе СИ за единицу силы тока принимается - *ампер* (А). Поскольку в этой системе единиц «ампер» является *основной единицей*, то выражение (5.2) принимается базовым для определения единицы заряда - *куллона* (см. начало п.1.1).

Часто распределение тока I через поверхность является *неоднородным*, поэтому для более детальной характеристики этого распределения вводят *плотность тока* как локальную величину.

Плотностью тока называют величину, численно равную силе тока через единичную площадку, перпендикулярную направлению переноса заряда:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}. \quad (5.3)$$

Отметим, что единицей плотности тока в СИ является - IA / m^2 (ампер на метр в квадрате).

Поскольку в переносе заряда участвуют отдельные частицы, то важно установить связь между параметрами этих заряженных частиц и плотностью тока.

Рассмотрим вначале среду, в которой в переносе заряда участвуют частицы одного сорта, концентрация которых равна n , а заряд каждой из них q_0 . Отдельная частица движется одновременно упорядоченно со скоростью \vec{u} и хаотично со скоростью \vec{v}_T . Ее средняя результирующая скорость равна

$$\langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{u} + \vec{v}_T \rangle = \langle \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}_T \rangle = \langle \vec{u} \rangle$$

средней скорости упорядоченного движения. Используем этот результат. Для этого расположим малую площадку dS_{\perp} перпендикулярно вектору $\langle \vec{u} \rangle$. На этой площадке построим прямой малый параллелепипед высотой $d\ell = |\langle \vec{u} \rangle| dt$ с образующими, параллельными вектору $\langle \vec{u} \rangle$ (рис.5.1). В этом случае через площадку dS_{\perp} за промежуток времени dt успеют пройти все частицы, содержащиеся в выделенном объеме

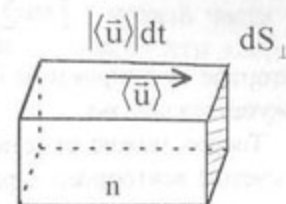


Рис.5.1

$$dN = ndV = ndS_{\perp} |\langle \vec{u} \rangle| dt,$$

при этом будет перенесен заряд

$$dq = q_0 dN = q_0 n |\langle \vec{u} \rangle| dS_{\perp} dt.$$

Учтя (5.3) и (5.1), для величины плотности тока получим равенство

$$j = q_0 n |\langle \vec{u} \rangle|. \quad (5.4)$$

Введем *вектор плотности тока* как вектор, направление которого совпадает со скоростью упорядоченного движения положительно заряженных частиц. В этом случае формулу (5.4) можно записать в векторном виде

$$\vec{j} = q_0 n \langle \vec{u} \rangle. \quad (5.5)$$

Если в среде имеются несколько сортов заряженных частиц, участвующих в переносе заряда, то результирующий вектор плотности тока определяется суммой

$$\vec{j} = \sum_k q_{ок} n_k \langle \vec{u}_k \rangle, \quad (5.6)$$

где векторное суммирование производится по всем сортам упорядоченно движущихся частиц.

Теперь можно отметить, что на основании определений (5.1) и (5.3) с учетом векторного характера плотности тока сила тока является потоком вектора плотности тока через выделенную поверхность:

$$I = \int_S (\vec{j} d\vec{S}) = \Phi_j. \quad (5.7)$$

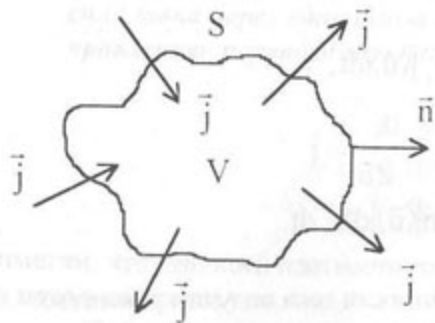


Рис.5.2

Естественно возникает вопрос: «Имеет ли поле вектора \vec{j} источники или нет?» Как известно, ответ на этот вопрос дает теорема Гаусса для соответствующего векторного поля. Определим поток Φ_j через произвольную замкнутую поверхность S (рис.5.2), выделенную в среде, в которой течет ток. Очевидно, что поток

Φ_j через выделенную поверхность будет отличен от нуля, если суммарный заряд, заключенный в объеме V , ограниченном поверхностью S , будет изменяться с течением времени. Это реализуется в случае, когда заряд «вытекающий» в единицу времени в объем V не равен «вытекающему». Исходя из этого, суммарный заряд «вытекающий» из объема V в единицу времени равен скорости убывания заряда в этом объеме, т.е.

$$\Phi_j = \int_S (\vec{j} d\vec{S}) = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV,$$

где ρ - объемная плотность заряда.

Изменяя порядок дифференцирования в правой части последнего равенства, что можно сделать из-за независимости координат и времени, получим

$$\oint_S (\vec{j} d\vec{S}) = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (5.8)$$

Применяя к (5.8) интегральную теорему Остроградского-Гаусса (1.42)

$$\oint_S (\vec{j} d\vec{S}) = \int_V (\nabla \cdot \vec{j}) dV,$$

получим

$$(\nabla \cdot \vec{j}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (5.9)$$

Последнее равенство имеет специальное название: *уравнение непрерывности для плотности тока*. Интегральное (5.8) и дифференциальное (5.9) равенства представляют математические выражения теоремы Гаусса для поля вектора \vec{j} и свидетельствуют о том, что источниками вектора \vec{j} (линий тока) являются те точки среды, в которых происходит убыль объемной плотности заряда (линии тока начинаются или заканчиваются в подобных точках). В случае постоянного (стационарного) тока все электрические характеристики не зависят явно от времени, поэтому $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Следовательно, для постоянного тока

$$\oint_S (\vec{j} d\vec{S}) = 0 \text{ и } (\nabla \cdot \vec{j}) = 0. \quad (5.10)$$

Это означает, что линии постоянного тока замкнуты, т.е. нигде не начинаются и нигде не заканчиваются.

В заключение этого пункта отметим, что равенства (5.8) и (5.9) являются *обобщением закона сохранения заряда* на случай электрически изолированных систем.

Выводы

Процесс упорядоченного переноса заряда характеризуется силой и плотностью тока. Плотность тока в окрестности данной точки среды определяется усредненными микропараметрами заряженных частиц. Источниками поля вектора плотности тока являются те точки, в которых происходит изменение со временем объемной плотности заряда.

Контрольные вопросы

- 5.1. Что называется электрическим током? Какими физическими величинами характеризуется электрический ток? Поясните смысл этих величин и их взаимосвязь.
- 5.2. Сформулируйте теорему Гаусса для вектора плотности тока. Поясните ее смысл и роль в описании электрического тока.
- 5.3. Оцените среднюю скорость направленного движения электронов в меди при плотности тока $j = 10 \text{ А/мм}^2$, считая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон. Плотность меди $\gamma = 8,6 \cdot 10^3 \text{ Кг/м}^3$, ее молярная масса $\mu = 64 \text{ г/моль}$.

5.2. Условия существования электрического тока

Из предыдущего пункта ясно, что одним из очевидных условий существования электрического тока является наличие свободных носителей заряда - частиц, которые при макроскопическом направленном движении в среде переносят заряд. Как известно (п.4.1), такие среды называются проводниками электричества. Будем считать, что это условие выполнено. В пункте 4.1 рассмотрено поведение проводника, помещенного во внешнее электростатическое поле. Возникающее в этом случае в начальный момент времени направленное движение свободных носителей очень быстро прекращается и наступает равновесное распределение индуцированных зарядов на поверхности проводника, определяемое условиями (4.1) и (4.2). Для поддержания упорядоченного движения необходимо непрерывное искусственное нарушение усло-

вий (4.1) или (4.2). Это возможно, если какими-либо способами или компенсировать индуцированные заряды на поверхности проводника или удалить их с поверхности на бесконечность. Оба способа можно объединить, непрерывно перенося заряды с одного конца проводника на другой (рис.5.3).

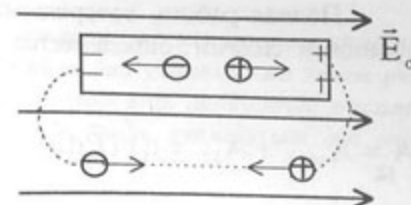


Рис.5.3

Такой перенос заряда требует движения зарядов на некотором участке против сил электростатического поля, а следовательно может осуществляться только какими-либо «сторонними» силами не электростатического происхождения. Роль сторонних могут играть любые по своей физической природе силы, но не электростатические.

Следовательно, для поддержания тока в проводнике, кроме электростатических сил, на свободные носители заряда должны действовать сторонние силы не электростатического происхождения.

Сторонняя сила \vec{F}^* , действуя на свободный носитель, совершает работу при его перемещении из точки 1 в точку 2

$$A_{12}^* = \int_1^2 (\vec{F}^* d\vec{l}) = q \int_1^2 (\vec{E}^* d\vec{l}),$$

где по аналогии с (1.6) использовано понятие напряженности поля сторонних сил:

$$\vec{E}^* = \vec{F}^* / q.$$

Величина, численно равная работе поля сторонних сил по переносу единичного положительного точечного заряда из одной точки поля 1 в другую 2, называется электродвижущей силой (ЭДС).

Согласно этому определению, ЭДС равна

$$\mathcal{E}_{12} = \frac{A_{12}^*}{q} = \int_1^2 (\vec{E}^* d\vec{l}). \quad (5.11)$$

Полная работа, совершаемая как электростатическими, так и сторонними силами, определяется с помощью равенства

$$A_{12} = A_{эл12} + A_{12}^* = q \int_1^2 (\vec{E} d\vec{\ell}) + q \int_1^2 (\vec{E}^* d\vec{\ell}) = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\mathcal{E},$$

где учтено (5.11) и (1.27).

Величина, численно равная полной работе A по перемещению единичного положительного точечного заряда из одной точки 1 проводника в другую 2, называется *падением напряжения* между этими точками или просто *напряжением* U_{12} . Таким образом,

$$U_{12} = \frac{A_{12}}{q} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}. \quad (5.12)$$

Интересны, на наш взгляд, два частных случая, которые часто встречаются в практике.

а) *Однородный участок цепи* - это участок, на котором не действуют сторонние силы (не путайте с однородным проводником). В этом случае $\mathcal{E}_{12} = 0$, а падение напряжения равно разности потенциалов на концах этого участка:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (5.13)$$

(см. формулу (4.9) и ниже высказанное замечание).

б) *Замкнутый участок цепи*. Концы такого участка совпадают, поэтому $\varphi_1 = \varphi_2$. В этом случае

$$U = \mathcal{E} = \oint_L (\vec{E}^* d\vec{\ell}), \quad (5.14)$$

т.е. в замкнутой цепи ЭДС равна циркуляции вектора напряженности поля сторонних сил.

Выводы

Для существования тока на некотором участке должны выполняться два условия: на этом участке должны существовать свободные носители заряда и должно быть отличным от нуля напряжение.

Контрольные вопросы

- 5.4. Какие силы называются сторонними? Какова их главная особенность? Приведите конкретные примеры сторонних сил, с помощью которых можно непрерывно поддерживать направленное движение заряженных частиц в проводнике.
- 5.5. Какой смысл имеют понятия электродвижущей силы, напряжения? В чем может проявляться их сходство и различие?
- 5.6. Какие особенности понятия напряжения необходимо учитывать для однородного и замкнутого участков цепи?

5.3. Законы постоянного тока

5.3.1. Закон Ома. Электрическое сопротивление

Между напряжением U и силой тока I , как между причиной и следствием, для каждого проводника должна существовать определенная количественная взаимосвязь. Простейший вид этой связи, справедливой для однородного изотропного проводника, был установлен экспериментально немецким ученым Омом:

$$I = \Lambda U, \quad (5.15)$$

где Λ - коэффициент пропорциональности называется *электрической проводимостью (электропроводностью)* проводника.

Единицей электропроводности в системе СИ является *сименс* (См): 1 См - электропроводность проводника, в котором при напряжении 1 В течет ток 1 А.

Чаше равенство (5.15) записывают в виде

$$I = \frac{U}{R}, \quad (5.16)$$

используя величину, обратную электропроводности

$$R = \frac{1}{\Lambda}, \quad (5.17)$$

которая называется *электрическим сопротивлением* (просто *сопротивлением*) проводника или участка цепи. Единицей сопротивления в СИ является *Ом* (ом): $1 \text{ Ом} = 1 \text{ См}^{-1}$ или $1 \text{ Ом} = 1 \text{ В/1 А}$.

Электропроводность и сопротивление конкретного проводника определяются его формой, размерами и свойствами материала, из которого он изготовлен.

Равенства (5.15) и (5.16) являются математическими выражениями *закона Ома для участка цепи*. Проводники, для которых выполняется прямая пропорциональная зависимость между током и напряжением, называются *линейными*.

Для линейных проводников Λ и R являются величинами, не зависящими от величины приложенного напряжения.

В частности, сопротивление однородного изотропного проводника длиной ℓ и с неизменной по его длине площадью поперечного сечения S может быть вычислено по формуле

$$R = \rho \frac{\ell}{S}, \quad (5.18)$$

где ρ - *удельное электрическое сопротивление*, зависящее от свойств материала проводника. Единица измерения удельного сопротивления в СИ - «*ом-метр*» (Ом·м). Величина, обратная удельному сопротивлению, называется *удельной электропроводностью*

$$\sigma = \frac{1}{\rho}, \quad (5.19)$$

единица измерения которой называется *сименс на метр* (См/м).

Отметим, что величина удельного сопротивления данного материала численно равна сопротивлению однородного проводника кубической формы, ребро которого равно одному метру.

В общем случае сопротивление произвольного участка цепи определяется как коэффициент пропорциональности между током I и напряжением U , приложенным к этому участку.

Поскольку в закон Ома (5.15), (5.16) входят величины, относящиеся ко всему проводнику как целому, то эти формы записи закона называются *интегральными*. Действительно, учтя (5.7), (5.12), (5.11) и (1.27), для закона Ома (5.16) получим интегральное равенство

$$\int_S (\vec{j} d\vec{S}) = \frac{1}{R} \left[\int_1^2 (\vec{E} d\vec{\ell}) + \int_1^2 (\vec{E}^* d\vec{\ell}) \right].$$

Не следует забывать, что в общем случае *неоднородного* участка цепи напряжение U_{12} равно алгебраической сумме разности потенциалов $(\varphi_1 - \varphi_2)$ и ЭДС на концах этого участка.

Для *однородного* участка цепи закон Ома принимает вид

$$I = \frac{U_{12}}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}, \quad (5.20)$$

а для замкнутого участка

$$I = \frac{U_{12}}{R_{\text{общ}}} = \frac{\mathcal{E}_{12}}{R_{\text{общ}}}. \quad (5.21)$$

В последнем случае, если в замкнутом участке можно выделить «место», где действуют сторонние силы, то это «место» называют *источником ЭДС (напряжения)*. Полное сопротивление замкнутого участка $R_{\text{общ}}$ можно тогда представить в виде суммы внутреннего сопротивления источника Γ и внешнего по отношению к нему сопротивления R :

$$R_{\text{общ}} = R + r.$$

При этом закон Ома для замкнутого участка (5.21) принимает более частную форму:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (5.22)$$

Во многих ситуациях электрический ток течет в *неоднородной* по своим электрическим свойствам проводящей среде ($\rho = \rho(\vec{r}), \sigma = \sigma(\vec{r})$), что приводит к неравномерному переносу заряда в различных участках среды. В этом случае для более детальной

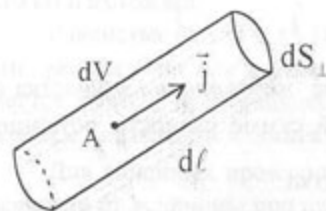


Рис. 5.4

локальной характеристики электрического тока применяют *дифференциальную форму закона Ома*, которая связывает между собой соответствующие величины, относящиеся к данной точке проводящей среды. Установить дифференциальную форму закона Ома весьма просто. Для этого в

окрестности некоторой точки A изотропной проводящей среды (рис. 5.4) выделим физически малый объем dV в виде прямого цилиндра с основаниями dS_{\perp} и образующими $d\ell$, параллельными вектору \vec{j} . Размеры цилиндра выбираются такими малыми, чтобы в пределах его объема dV неоднородностью среды можно было пренебречь. Применяя закон Ома для этого элементарного объема, получим

$$j dS_{\perp} = \frac{1}{\rho} \frac{d\ell}{dS_{\perp}} [E_{\parallel} d\ell + E_{\parallel}^* d\ell].$$

Проводя элементарные преобразования и учитывая, что в изотропной среде векторы \vec{j}, \vec{E} и \vec{E}^* в данной точке направлены вдоль одной и той же прямой, получим *дифференциальный закон Ома в векторной форме*:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} (\vec{E} + \vec{E}^*) = \sigma (\vec{E} + \vec{E}^*). \quad (5.23)$$

Если в окрестности данной точки сторонние силы на заряженные частицы не действуют ($\vec{E}^* = 0$), то

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (5.24)$$

В заключение этого пункта вернемся к вопросу об электрическом сопротивлении электропроводящей среды. Поскольку свободные заряженные частицы при протекании тока одновременно участвуют как в направленном, так и в тепловом движении, при этом «сталкиваясь» между собой и с частицами, не участвующими в создании тока, то «механизм» возникновения сопротивления току достаточно ясен: при каждом «столкновении» свободный носитель заряда выбывает из направленного движения. Так как частота «столкновений», в основном, определяется средней скоростью теплового движения свободных носителей, то очевидно сопротивление должно существенным образом зависеть от температуры проводящей среды.

Опытным путем установлено, что в достаточно широком диапазоне для многих проводников их удельное сопротивление линейно возрастает с ростом температуры:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t), \quad (5.25)$$

где ρ и ρ_0 - удельные сопротивления проводника при температурах t и 0°C , соответственно, а α - *температурный коэффициент сопротивления*, для большинства чистых металлов примерно равный $1/273 \text{ K}^{-1}$. Характерный вид экспериментальной зависимости ρ от абсолютной температуры T представлен на рис. 5.5, из которого видно, что при низких температурах порядка нескольких кельвин имеется

отступление от линейной зависимости $\rho(T)$. Для большинства металлов при $T \rightarrow 0$ (кривая 1 на рис.5.5) удельное сопротивление стремится не к нулю, а к некоторому конечному значению $\rho_{ост}$, которое сильно зависит от наличия различных нарушений кристаллической решетки (дефектов, примесей и т.д.).

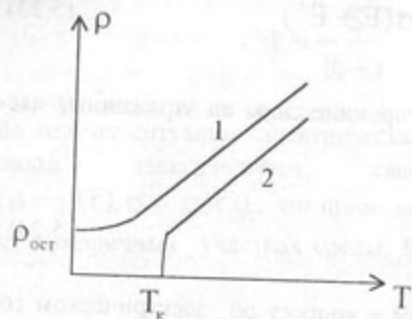


Рис.5.5

У некоторых металлов и сплавов удельное сопротивление при сверхнизких температурах резко скачком обращается в нуль (кривая 2 на рис.5.5). Температура, при которой происходит такой переход, называется *критической* - $T_{кр}$, а само явление - *сверхпроводимостью*. Это явление впервые было обнаружено Камерлинг-Оннесом для ртути в 1911 году. Таким образом, существует диапазон температур $0 < T < T_{кр}$, при котором может сохраняться сверхпроводящее состояние. Критическая температура для каждого *сверхпроводника* имеет свое специфическое значение, которое сильно зависит не только от самих свойств сверхпроводника, но и от напряженности магнитного поля: при определенном значении напряженности $H_{кр}$, которое называется *критическим полем*, сверхпроводящее состояние разрушается. Таким образом, если данный проводник может переходить в сверхпроводящее состояние, то оно существует в определенном диапазоне параметров

$$\begin{cases} 0 < T \leq T_{кр}, \\ H_{кр} > H \geq 0. \end{cases} \quad (5.26)$$

Заметим, что между $H_{кр}$ и T для данного сверхпроводника существует определенная характерная зависимость, изображенная на рис. 5.6.

Заметим, что между $H_{кр}$ и T для данного сверхпроводника существует определенная характерная зависимость, изображенная на рис. 5.6. Сверхпроводники, кроме нулевого сопротивления, обладают еще одним важнейшим свойством: внешнее магнитное поле с напряженностью $H < H_{кр}$ выталкивается из объема сверхпроводника. Этот физический эффект был открыт в 1933 году *Мейснером* и носит его имя.

Теоретическое обоснование явления сверхпроводимости было сделано только в 1957 году группой американских ученых: Дж Бардиным, Л.Купером и Дж. Шриффером. Такой сравнительно большой промежуток времени между открытием (1911) и теоретическим объяснением явления (1957) обусловлен тем, что сверхпроводимость как макроскопический эффект имеет существенно квантовую природу, понять которую можно только при соответствующем развитии общих квантовых представлений и аппарата квантовой физики. Отметим, что в настоящее время идет интенсивный поиск искусственных материалов со сравнительно высокой критической температурой (уже известны материалы с $T_{кр} \sim -70^\circ\text{C}$.), что позволило бы широко использовать сверхпроводимость в промышленных целях.

Выводы

Между током и напряжением на данном участке существует определенная взаимосвязь, которая в случае изотропного линейного проводника имеет вид закона Ома. Сопротивление проводника сильно зависит от его размеров, формы, свойств материала и его температуры. При сверхнизких температурах электрическое сопротивление различных материалов либо остается конечным, либо при $T < T_{кр}$ обращается в нуль.



Рис.5.6

Контрольные вопросы

- 5.7. Сформулируйте и запишите закон Ома в интегральной и дифференциальной формах? Для каких электропроводящих сред справедлив этот закон? Какие частные случаи этого закона Вы можете указать?
- 5.8. Каков основной механизм возникновения электрического сопротивления проводников? Какими факторами определяется величина сопротивления проводника? Какими физическими величинами характеризуется интегральное и дифференциальное сопротивления?
- 5.9. Объясните характер зависимости удельного сопротивления проводников от температуры.
- 5.10. Что такое явление сверхпроводимости? Укажите основные физические особенности и общие характеристики области существования этого явления.
- 5.11. Оцените среднюю тепловую скорость свободных электронов в металле при комнатной температуре, считая их распределение максвелловским. Сравните полученное значение с результатом ответа на контрольный вопрос 5.3.

5.3.2. Работа тока. Закон Джоуля-Ленца

При протекании постоянного тока по произвольному участку цепи совершается работа за счет действия на свободные носители заряда как электростатических, так и сторонних сил. Согласно определению (5.12), если известны заряд q , переносимый на данном участке, и напряжение на концах участка, то работа тока может быть вычислена по формуле

$$A_{12} = qU_{12}, \quad (5.27)$$

которой с помощью (5.2) и закона Ома (5.16) можно придать различные формы записи:

$$A_{12} = IU_{12}t = I^2 R_{12}t = \frac{U_{12}^2}{R_{12}}t. \quad (5.28)$$

Отметим, что все эти формулы равнозначны, но последние две удобнее применять при сравнении работы тока в последовательно и параллельно соединенных участках, соответственно.

Формулы (5.27) и (5.28) справедливы для любого участка цепи, содержащего проводники первого и второго рода, электродвигатели и т.д. Поэтому в общем случае работа тока обусловлена расходом энергии в результате нагревания проводников (Q), при протекании химических реакций ($\Delta W_{\text{хим}}$) и совершения механической работы ($A_{\text{мех}}$) при перемещении проводников с током, т.е.

$$A_{12} = Q + \Delta W_{\text{хим}} + A_{\text{мех}}. \quad (5.29)$$

Мощность, выделенную в участке цепи, можно получить, разделив работу тока на время его протекания:

$$P = \frac{A_{12}}{t} = \frac{qU_{12}}{t} = IU_{12} = I^2 R_{12} = \frac{U_{12}^2}{R_{12}}. \quad (5.30)$$

В случае *неоднородного проводника* из-за неравномерного распределения тока по его объему в различных его элементах объема dV выделяется разная мощность. Поэтому для характеристики распределения мощности тока по объему проводника вводится понятие удельной мощности тока:

$$P_{\text{уд}} = \frac{dP}{dV}, \quad (5.31)$$

которая при неравномерном распределении тока в неоднородном проводнике определяет мощность, выделяемую в единице объема в малой окрестности вокруг выбранной точки.

Для получения выражения удельной мощности тока в неоднородном изотропном проводнике выделим в нем элементарный объем dV , как это сделано в п.5.3.1 (рис.5.4). Запишем формулу мощности, выделяемой в этом объеме в виде

$$dP = \frac{\delta A}{dt} = (jdS_{\perp})^2 \rho \frac{d\ell}{dS_{\perp}} = \rho j^2 dV.$$

Откуда, учтя (5.31), для удельной мощности имеем

$$P_{уд} = \rho j^2 \quad (5.32)$$

или, используя (5.23), получим

$$P_{уд} = \rho(\vec{j}\vec{j}) = (\vec{j}(\vec{E} + \vec{E}^*)). \quad (5.33)$$

В частности, когда протекание тока в участке цепи не сопровождается химическими превращениями ($\Delta W_{хим} = 0$) и ($A_{мех} = 0$), вся работа тока расходуется на нагревание проводников, т.е.

$$A_{12} = Q. \quad (5.34)$$

В этом случае формулы (5.27), (5.28) и (5.32) записываются в виде:

- для количества теплоты, выделяемой на данном участке цепи

$$Q = qU_{12} = IU_{12}t = I^2 R_{12}t = \frac{U_{12}^2}{R_{12}}t, \quad (5.35)$$

- для удельной тепловой мощности

$$Q_{уд} = \frac{\delta Q}{dVdt} = \rho j^2 = (\vec{j}(\vec{E} + \vec{E}^*)). \quad (5.36)$$

Заметим, что формулы (5.35) и (5.36) справедливы как для однородного, так и для неоднородного участка цепи, если сторонние силы имеют нехимическую природу. Равенства (5.35) и (5.36) представляют собой *интегральную и дифференциальную формы записи закона Джоуля-Ленца*, который установлен этими учеными экспериментально независимо друг от друга.

Выводы

Протекание тока в участке цепи в общем случае сопровождается выделением джоулева тепла, затратами энергии на протекание химических превращений в проводниках и совершением механической работы по перемещению проводников. В частном случае выделение тепла описывается законом Джоуля-Ленца.

Контрольные вопросы

- 5.12. Запишите и поясните различные формулы для работы и мощности тока. Проведите сравнение этих формул.
- 5.13. Каковы причины необходимости введения понятия удельной мощности тока?
- 5.14. В каких случаях вся работа тока расходуется на выделение джоулева тепла?
- 5.15. Проанализируйте особенности применения закона Джоуля-Ленца в случае однородного и неоднородного участков цепи.

5.3.3. Расчет сложных цепей постоянного тока.

Правила Кирхгофа

В сложных (разветвленных) электрических цепях электрические токи, напряжения и ЭДС в различных участках таких цепей связаны между собой определенными соотношениями, которые по существу являются следствиями фундаментальных физических законов и называются *правилами Кирхгофа*. Эти правила во многих случаях позволяют значительно упростить расчет токов и напряжений в разветвленных цепях.

Первое правило Кирхгофа является следствием закона сохранения заряда и формулируется для каждого узла цепи. *Узлом называется точка соединения трех или более проводников.*

Алгебраическая сумма токов в любом узле разветвленной цепи равна нулю.

$$\sum_k I_k = 0. \quad (5.37)$$

Если разветвленная цепь содержит N узлов, то независимыми будут только равенства (5.37) для $N - 1$ узлов. Направление токов в неразветвленных участках выбирается произвольно. Однако следует при составлении уравнения (5.37) для каждого узла входящие в него и выходящие токи брать с противоположными знаками.

Второе правило является следствием закона сохранения энергии и формулируется следующим образом:

алгебраическая сумма падений напряжений для любого замкнутого контура, выделенного в сложной цепи, равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре:

$$\sum_k I_k R_k = \sum_i \mathcal{E}_i. \quad (5.38)$$

Среди уравнений, записанных для всех возможных замкнутых контуров сложной цепи, независимыми будут только те, которые не являются комбинацией других контуров.

При записи уравнения (5.38) для какого-либо выделенного контура следует руководствоваться определенными правилами знаков.

Вначале произвольно выбирается направление положительного обхода контура. Если выбранное направление тока в данном элементе контура совпадает с направлением обхода контура, то произведение $I_k R_k$ для данного элемента записывается в уравнение (5.38) со знаком

«плюс», в противном случае - со знаком «минус». Если направление действия какой-либо ЭДС из этого контура совпадает с выбранным для этого контура положительным направлением обхода, то эта ЭДС в правой части (5.38) записывается со знаком «плюс», в противном случае - со знаком «минус». Для

пояснения применения правил Кирхгофа запишем уравнение (5.37) для узла 3 на рис. 5.7 при выбранных направлениях токов:

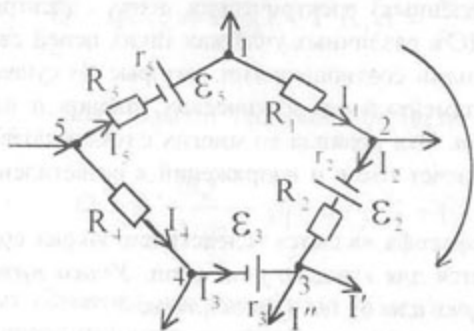


Рис. 5.7

$$I_2 - I' - I'' + I_3 = 0.$$

Для контура 123451, выделенного из какой-то сложной цепи, выберем направление положительного обхода по часовой стрелке. Уравнение (5.38) для этого контура примет вид

$$I_1 R_1 + I_2 r_2 + I_2 R_2 - I_3 r_3 - I_4 R_4 + I_5 R_5 + I_5 r_5 = \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_5.$$

В заключение отметим, что при решении полной системы уравнений (5.37)-(5.38) относительно I_k , значения каких-либо токов могут оказаться отрицательными. Это означает, что действительные направления токов в соответствующих неразветвленных участках противоположны выбранным.

Выводы

Расчет токов в сложных цепях значительно упрощается при применении правил Кирхгофа, которые являются следствиями закона сохранения заряда и закона сохранения энергии.

Контрольные вопросы

- Докажите первое правило Кирхгофа, опираясь на уравнение непрерывности для плотности тока.
- Докажите справедливость уравнения (5.38), исходя из (5.12) и закона Ома.

5.4. Элементы классической электронной теории металлов

5.4.1. Природа электрического тока в металлах

Физическая природа свободных носителей заряда в большинстве металлов установлена в результате многочисленных опытов. Кратко опишем наиболее примечательные из них.

Опыт К. Рикке. В данном опыте были использованы три цилиндрических проводника: алюминиевый и два медных, с отшлифованными торцами. Через составленный в последовательности Cu-Al-Cu

проводник в течение года пропускать слабый ток (при сильном токе возможно разогревание проводников в местах контактов и как результат - их сваривание). За время опыта по проводникам прошел суммарный заряд, равный $3,5 \cdot 10^6$ Кл. Взвешиванием до начала опыта и после его окончания не отмечено изменения массы проводников, также визуально не было обнаружено взаимного проникновения вещества из одного проводника в другой.

В результате этого опыта установлено, что *частицы вещества (атомы или ионы) не являются свободными носителями заряда в металлах.*

Для установления природы носителей тока необходимо каким-либо образом измерить их удельный заряд (отношение заряда носителя к его массе), что позволит идентифицировать носители заряда с конкретными частицами.

Идея соответствующего опыта основана на том, что при резком ускорении или торможении металлического проводника имеющиеся в нем *свободные* носители заряда в силу инерции должны отставать или, соответственно, опережать сам проводник, создавая во внешней цепи импульс тока. Измеряя полный заряд, прошедший по цепи за время ускорения или торможения проводника, можно вычислить удельный заряд отдельного носителя. По направлению импульса тока можно судить о знаке носителей заряда.

Впервые опыт, качественно подтверждающий правильность этой идеи, был поставлен в 1913 году русскими физиками Л.И. Мандельштамом и Н.Д. Папалекси.

Количественные измерения в подобном опыте произведены в 1916 году Р.Толменом и Т. Стюартом, в результате которых было показано, что свободные носители в металлах имеют отрицательный удельный заряд, близкий по значению к удельному заряду электрона e/m .

Выводы

Свободными носителями заряда в большинстве металлов являются электроны, которые называются электронами проводимости.

Контрольные вопросы

5.18. Каковы сущность опытов и основные их результаты по выяснению природы носителей тока в металлах?

5.19. Считая, что на каждый атом металла приходится один свободный электрон, оцените их концентрацию. Отношение плотности ρ к молярной массе μ практически для всех металлов

заклучено в диапазоне $20 \frac{\text{кмоль}}{\text{м}^3} \leq \frac{\rho}{\mu} \leq 200 \frac{\text{кмоль}}{\text{м}^3}$.

5.4.2. Основные положения классической электронной теории. Вывод законов Ома и Джоуля-Ленца

Классическая электронная теория металлов - теория Друде-Лоренца - базируется на нескольких основных положениях, обобщающих некоторые опытные данные об электропроводности металлов.

а) *В металлах существуют свободные электроны - электроны проводимости.*

Свободные электроны в металлах появляются при образовании кристаллической решетки. В результате достаточно сильного взаимодействия между атомами слабо связанные валентные электроны «отрываются» от своих атомов, становясь «свободными» в пределах металлического образца.

б) *Электроны проводимости представляют собой своеобразный «идеальный» газ.*

Электроны проводимости при равновесии подчиняются распределению Максвелла. Своеобразие «идеальности» электронного газа проявляется в том, что максвелловское распределение по скоростям устанавливается при равновесии не в результате «столкновений» «молекул» - электронов между собой (как в настоящем идеальном газе), а из-за «столкновений» с ионами, находящимися в узлах кристаллической решетки. Другими словами, взаимодействием электронов проводимости между собой в рамках электронной теории пренебрегают по сравнению с взаимодействием с ионами кристаллической решетки.

в) *В отсутствие электрического тока «столкновения» электрона проводимости с ионами кристаллической решетки имеют абсолютно упругий характер.*

Это положение основано на том, что при тепловом равновесии в среднем обмена энергией между электронным газом и кристаллической решеткой не происходит. Следовательно, свободные электроны между последовательными столкновениями движутся со средней тепловой скоростью

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \quad (5.39)$$

которая при комнатной температуре ($T \sim 300$ К) имеет значение порядка

$$\langle v \rangle \sim 10^5 \text{ м/с.}$$

Заметим, что оценка средней скорости упорядоченного движения электронов проводимости (смотри ответ к контрольному вопросу 5.3) дает значение порядка

$$\langle u \rangle \sim 10^{-3} \text{ м/с.}$$

г) При наличии электрического тока «столкновения» становятся частично неупругими. В результате столкновения электрон передает иону в среднем только ту часть своей кинетической энергии, которая обусловлена упорядоченным движением.

«Разумность» этого положения обусловлена тем, что при протекании тока по неподвижному проводнику вся работа тока идет на выделение джоулева тепла. Это и означает, что дополнительная кинетическая энергия электронов, связанная с упорядоченным движением, в результате «столкновений» передается при равновесии ионам кристаллической решетки. Вследствие «столкновения» скорость упорядоченного движения электрона проводимости обращается в нуль.

Перечисленные положения классической электронной теории позволяют качественно объяснить справедливость экспериментальных законов Ома и Джоуля-Ленца.

Вывод закона Ома.

Легко сообразить, что между двумя последовательными соударениями при протекании тока электрон в среднем проходит расстояние, равное

$$\langle \lambda \rangle = \tau \langle v \rangle, \quad (5.40)$$

где τ - среднее время пробега между двумя последовательными «столкновениями», $\langle v \rangle$ - средняя скорость теплового движения. При записи равенства (5.40) учтено, что $\langle v \rangle \gg \langle u \rangle$, поэтому вместо $\langle |\vec{v} + \vec{u}| \rangle$ использовано $\langle v \rangle$. Отметим, что введенное с помощью равенства (5.40) расстояние $\langle \lambda \rangle$ называется *длиной свободного пробега* электронов.

Двигаясь между последовательными соударениями *равноускоренно* под действием результирующей силы $F = e(E + E^*)$, электрон достигает в среднем максимальной скорости упорядоченного движения при ($u_0 = 0$).

$$u_{\max} = \frac{e(E + E^*)}{m} \tau = \frac{e\langle \lambda \rangle}{m\langle v \rangle} (E + E^*). \quad (5.41)$$

Приобретаемая при этом средняя за время свободного пробега скорость равна

$$\langle u \rangle = \frac{u_{\max}}{2} = \frac{e\langle \lambda \rangle}{2m\langle v \rangle} (E + E^*).$$

Подставляя это значение в (5.4), получим ($q = e$)

$$j = \frac{ne^2\langle \lambda \rangle}{2m\langle v \rangle} (E + E^*). \quad (5.42)$$

Сравнение этой формулы с (5.23) свидетельствует о ее совпадении с дифференциальной формой закона Ома. Кроме того, получено выражение для удельной электропроводности

$$\sigma = \frac{ne^2\langle \lambda \rangle}{2m\langle v \rangle}, \quad (5.43)$$

связывающее макроскопический параметр металлического проводника σ с усредненными микропараметрами электронов проводимости.

Вывод закона Джоуля-Ленца.

За время свободного пробега результирующая сила $F = e(E + E^*)$, действующая на электрон проводимости, совершает в среднем работу δA , которая идет на приращение его средней кинетической энергии

$$\begin{aligned} \delta A = \Delta \langle \varepsilon_k \rangle &= \Delta \left\langle \frac{m(\bar{v} + \bar{u})^2}{2} \right\rangle = \Delta \left\langle \frac{mu^2}{2} \right\rangle = \\ &= \Delta \frac{m \langle u^2 \rangle}{2} = \frac{mu_{\max}^2}{2}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Здесь использовано равенство $\langle (\bar{v} + \bar{u})^2 \rangle = \langle v^2 \rangle + \langle u^2 \rangle$. Из (5.44) следует, что приращение средней кинетической энергии электрона проводимости обусловлено дополнительной кинетической энергией, которую он получает между двумя последовательными соударениями в результате направленного движения. Учитывая (5.41), для приращения средней кинетической энергии получим равенство

$$\Delta \langle \varepsilon_k \rangle = \frac{e^2 \langle \lambda \rangle^2}{2m \langle v \rangle} (E + E^*)^2. \quad (5.45)$$

Согласно положению г), электрон при столкновении с ионом кристаллической решетки отдает последнему эту дополнительную энергию (5.45), которая приводит к увеличению внутренней энергии металла, т.е. к его нагреванию. Полная энергия (количество теплоты), выделяемая в единице объема в единицу времени (удельная тепловая мощность), равна

$$Q_{уд} = n \frac{1}{\tau} \Delta \langle \varepsilon_k \rangle, \quad (5.46)$$

где n - концентрация электронов проводимости, $\frac{1}{\tau}$ - среднее число столкновений электрона с ионами в единицу времени (частота столкновений). Заменяя в (5.46) $\Delta \langle \varepsilon_k \rangle$ его выражением (5.45), для удельной тепловой мощности получим формулу

$$Q_{уд} = \frac{ne^2 \langle \lambda \rangle}{2m \langle v \rangle} (E + E^*)^2, \quad (5.47)$$

где использовано (5.40). Формулу (5.47) можно переписать в другом виде, учитывая (5.43) и (5.42):

$$Q_{уд} = j(E + E^*). \quad (5.48)$$

Последнее равенство совпадает с выражением закона Джоуля-Ленца в дифференциальной форме.

Таким образом, классическая электронная теория электропроводности металлов дает качественно правильную зависимость плотности тока и удельной тепловой мощности от напряженностей электростатического поля и поля сторонних сил. Однако наряду с указанными положительными результатами имеются существенные расхождения с некоторыми опытными данными.

Укажем здесь только самые важные. Первое из них заключается в неверной зависимости удельного сопротивления металла от температуры, которую дает электронная теория. Действительно, из формулы (5.43) следует

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \sim \langle v \rangle \sim \sqrt{T},$$

что противоречит опытным данным: $\rho \sim T$ (см. (5.25)).

Второе важное расхождение связано с неверными результатами по вычислению молярной теплоемкости металлического проводника. Поскольку в электронной теории электроны проводимости представляют собой «свободный идеальный газ», то они должны обладать молярной

теплоемкостью, равной $3/2 R$, что в сумме с молярной теплоемкостью кристаллической решетки $3R$ дает значение, равное $\frac{9}{2} R$.

Опытные данные свидетельствуют, что молярная теплоемкость металлов мало отличается от значения $3R$.

Различие между теоретическими и экспериментальными данными позволяет предположить, что электроны проводимости не вносят заметного вклада в теплоемкость металлов.

Как показало дальнейшее развитие науки, несоответствия между выводами классической электронной теории и опытными данными может быть устранено только в рамках квантовых представлений.

Выводы

Классическая электронная теория электропроводности металлов дает правильное качественное объяснение некоторых опытных законов (например, законов Ома и Джоуля-Ленца), но имеет существенные затруднения при объяснении других опытных данных.

Контрольные вопросы

- 5.20. Сформулируйте и дайте обоснования основных положений классической электронной теории.
- 5.21. Какие усредненные микропараметры электронов проводимости определяют удельную электропроводность металлов в рамках электронной теории?
- 5.22. Докажите равенство $\langle (\vec{v} + \vec{u})^2 \rangle = \langle v^2 \rangle + \langle u^2 \rangle$, использованное при записи (5.44).
- 5.23. Укажите основные недостатки классической электронной теории металлов.

6. Ответы на контрольные вопросы

Электростатическое поле в вакууме

1.9. Нет, так как хотя линии вектора \vec{E} параллельны, густота их в поперечном направлении различна.

1.10. Плоскости, перпендикулярные линиям вектора \vec{E} .

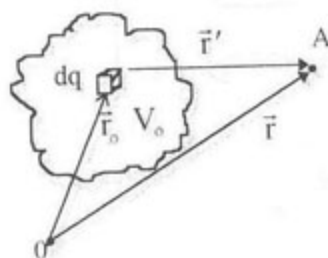


Рис.6.1

1.15. Пусть заряд распределен непрерывно по некоторому объему V_0 с объемной плотностью $\rho_0 = \rho_0(\vec{r}_0)$ (рис.6.1). Напряженность в точке наблюдения A согласно (1.7)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_{пр}} =$$

$$\frac{1}{q_{пр}} \int d\vec{F}(\vec{r} - \vec{r}_0) = k \int_{V_0} \frac{\rho_0(\vec{r}_0) dV_0}{(|\vec{r} - \vec{r}_0|)^3} (\vec{r} - \vec{r}_0) = \int_{V_0} d\vec{E}(\vec{r}_0, \vec{r} - \vec{r}_0),$$

где интегрирование ведется по координатам \vec{r}_0 точек в объеме заряженной системы.

1.18. Только для электростатического поля, так как оно потенциально.

1.19. $\Phi_E = -\frac{1}{2} ES.$

1.20. $\Phi_E = 0.$

Расчет электростатических полей

$$2.3. \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -\frac{\rho(r, \theta, \varphi)}{\epsilon_0},$$

где Φ - потенциал электростатического поля, r, θ, φ - сферические координаты.

2.4. Равенства (2.20)-(2.22) доказываются, исходя из формулы (1.27)

$$\varphi - \varphi_0 = - \int_0^x (\vec{E} d\vec{\ell}) = - \int_0^x E_x dx.$$

Для области ($x \leq 0$), с использованием (2.17)

$$\varphi = \varphi_0 - \int_0^x E_{lx} dx = \varphi_0 + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} x.$$

Для области ($0 \leq x \leq d$), с использованием (2.18)

$$\varphi = \varphi_0 - \int_0^x E_{lx} dx = \varphi_0 - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\epsilon_0} x.$$

Для области ($x > d$)

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 - \int_0^x E_x dx = \varphi_0 - \int_0^d E_{lx} dx - \int_d^x E_{llx} dx = \\ &= \varphi_0 + \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} d - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\epsilon_0} x. \end{aligned}$$

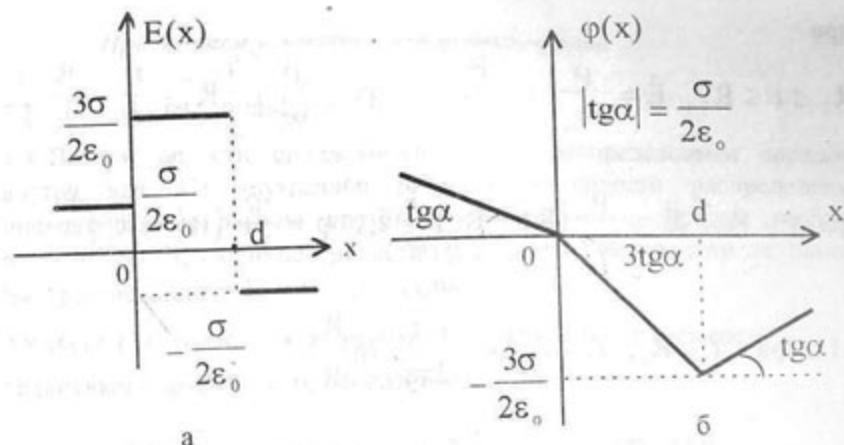


Рис.6.2

2.6. При $x < 0$, $\vec{E} = -\frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\rho_2 + \rho_1}{2} d\vec{e}_x$,

при $0 \leq x \leq d$, $\vec{E} = \frac{1}{2\epsilon_0} \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{d} x^2 + 2\rho_1 x - \frac{\rho_2 + \rho_1}{2} d \right) \vec{e}_x$,

при $x > d$, $\vec{E} = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\rho_2 + \rho_1}{2} d\vec{e}_x$.

2.8. При $r < R_1$, $E = 0$, $\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$.

при $R_1 \leq r \leq R_2$, $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r}$, $\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right)$.

при $r > R_2$, $E = 0$, $\varphi = 0$.

2.9. При $r < R_1$, $E = 0$, $\varphi = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (R_2^2 - R_1^2)$,

при

$$R_1 \leq r \leq R_2, \quad \vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) \vec{e}_r, \quad \varphi = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{3}{2} R_2^2 - \frac{r^2}{2} - \frac{R_1^3}{r} \right),$$

$$\text{при } r > R_2, \quad \vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (R_2^3 - R_1^3) \frac{1}{r^2} \vec{e}_r, \quad \varphi = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (R_2^3 - R_1^3) \frac{1}{r}.$$

$$2.13. \text{ При } r < R_1, \quad E = 0, \quad \varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1},$$

$$\text{при } R_1 \leq r \leq R_2, \quad \vec{E} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r, \quad \varphi = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{r},$$

$$\text{при } r > R_2, \quad E = 0, \quad \varphi = 0.$$

$$2.15. 1) \text{ На оси (при } \theta = 0 \text{ или } \pi), \quad E = \frac{l}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\rho}{r^3},$$

$$2) \text{ при } \theta = \pm \frac{\pi}{2}, \quad E = \frac{l}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho}{r^3}.$$

Описание электростатического поля в диэлектриках

3.7. Может, если в объеме диэлектрика имеются сторонние заряды

$$\rho' = -\nabla \vec{P} = -\nabla(\chi\epsilon_0 \vec{E}) = -\chi\epsilon_0 \nabla \vec{E} = -\chi\epsilon_0 (\rho + \rho'). \text{ Откуда}$$

$$\rho' = -\frac{\chi}{1+\chi} \rho.$$

3.14. Так как на поверхности раздела отлична от нуля поверхностная плотность связанных зарядов.

3.15. При отсутствии на границе раздела сторонних зарядов.

Проводники и электростатическое поле

$$4.2. E = 0, \quad \varphi = \text{const}, \quad \rho = 0.$$

4.3. Внутри полости определяется только распределением зарядов внутри нее. На внутренней поверхности полости распределены индуцированные заряды противоположного знака зарядам внутри полости; на наружной поверхности проводника - заряды того же знака. Внутри проводника $E = 0, \varphi = \text{const}, \rho = 0.$

4.8. Из (4.14) при $R_2 \rightarrow \infty$ имеем $C = 4\pi\epsilon_0 \epsilon R_1$, т.е. емкость уединенного сферического проводника.

$$4.9. C = \frac{2\pi\epsilon_0 \epsilon l}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi\epsilon_0 \epsilon l}{\ln \frac{R_1+d}{R_1}} = \frac{2\pi\epsilon_0 \epsilon l}{\ln \left(1 + \frac{d}{R_1} \right)} \approx \frac{2\pi\epsilon_0 \epsilon l R_1}{d} = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d} \text{ (Использовано } \ln \left(1 + \frac{d}{R_1} \right) \approx \frac{d}{R_1} \text{ при } d \ll R_1).$$

4.10. Из-за парного взаимодействия зарядов.

4.11, а) Для сферического конденсатора (использован ответ контрольного вопроса 2.8) имеем

$$w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \frac{1}{r^4} \quad (R_1 \leq r \leq R_2)$$

$$W = \int_V w dV = \frac{Q^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} = \frac{Q^2}{2C}$$

б) Для цилиндрического конденсатора (использован ответ контрольного вопроса 2.13)

$$w = \frac{\tau^2}{8\pi^2 \epsilon_0} \frac{1}{r^2}, \quad (R_1 \leq r \leq R_2).$$

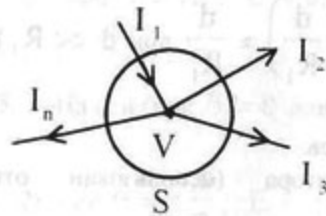
$$W = \frac{\tau^2}{8\pi^2 \epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} 2\pi r l dr = \frac{\tau^2 l}{4\pi \epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1} = \frac{Q^2}{2C}$$

Постоянный электрический ток

5.3. $\langle u \rangle = \frac{j}{ne} = \frac{j\mu}{\rho N_a e} \approx 10^{-3} \text{ м/с.}$

5.11. $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \approx 10^5 \text{ м/с} \gg \langle u \rangle.$

5.16. $(\nabla \cdot \vec{j}) = 0$, так как заряд в узле не накапливается и не исчезает



$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\right)$. Выберем замкнутую поверхность S , окружающую только один узел цепи (рис.6.3). Для этой поверхности

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{j}) dV = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Рис.6.3

(теорема Остроградского-Гаусса).

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \sum_{k=1}^n I_k = 0, \text{ что и доказывает 1-е правило.}$$

5.19. $n \sim 10^{28} \div 10^{29} \text{ м}^{-3}$

5.22. $\langle (\vec{v} + \vec{u})^2 \rangle = \langle v^2 + 2(\vec{v}\vec{u}) + u^2 \rangle = \langle v^2 \rangle + 2\langle (\vec{v}\vec{u}) \rangle + \langle u^2 \rangle = \langle v^2 \rangle + \langle u^2 \rangle$. Здесь учтено, что $\langle (\vec{v} \cdot \vec{u}) \rangle = \langle (\vec{v}) \cdot (\vec{u}) \rangle = 0$, так как значения \vec{v} и \vec{u} статистически независимы (теорема об умножении вероятностей) и $\langle \vec{v} \rangle = 0$ из-за хаотичности теплового движения.

Оглавление

	стр.
Введение	3
1. Электростатическое поле в вакууме	3
1.1. Электрический заряд и его свойства	3
1.2. Электростатическое поле. Напряженность поля	7
1.3. Потенциал электростатического поля	11
1.4. Принцип суперпозиции электрических полей	16
1.5. Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля	20
1.6. Поток вектора напряженности электростатического поля	22
1.7. Теорема Гаусса для вектора напряженности электростатического поля в вакууме	27
1.8. Циркуляция вектора напряженности электростатического поля	31
2. Расчет электростатических полей	35
2.1. Прямая задача электростатики. Уравнение Пуассона	35
2.2. Примеры расчета электростатических полей простейших симметрий	39
2.2.1. Поля с плоской симметрией	40
2.2.2. Поля со сферической симметрией	46
2.2.3. Поля с цилиндрической симметрией	52
2.3. Электрическое поле диполя	57
3. Описание электростатического поля в диэлектриках	60
3.1. Общие проблемы описания поля в веществе	60
3.2. Поляризация диэлектриков. Виды поляризации	62
3.3. Поляризованность диэлектрика и ее связь с распределением связанных зарядов	65
3.4. Электрическое поле в диэлектрике и его описание. Вектор электрического смещения	69
3.5. Относительная диэлектрическая проницаемость. Материальное уравнение	72
3.6. Электрическое поле вблизи границы раздела двух диэлектриков	75
4. Проводники и электростатическое поле	82
4.1. Проводники во внешнем электростатическом поле	85
4.2. Электростатическое поле заряженного проводника	88
4.3. Электроемкость. Конденсаторы	90
4.4. Примеры вычисления электроемкости	90

4.5. Энергия системы точечных зарядов ..	95
4.6. Энергия уединенного заряженного проводника, конденсатора. Энергия электрического поля	97
5. Постоянный электрический ток	101
5.1. Электрический ток и его характеристики	101
5.2. Условия существования электрического тока	106
5.3. Законы постоянного тока	109
5.3.1. Закон Ома. Электрическое сопротивление	109
5.3.2. Работа тока. Закон Джоуля-Ленца	116
5.3.3. Расчет сложных цепей постоянного тока. Правила Кирхгофа	119
5.4. Элементы классической электронной теории металлов	121
5.4.1. Природа электрического тока в металлах	121
5.4.2. Основные положения классической электронной теории. Вывод законов Ома и Джоуля-Ленца	123
6. Ответы на контрольные вопросы.	129
Оглавление	135

Уколов Александр Сергеевич

Лекции по общему курсу физики
Часть III

Стационарное электрическое поле

Учебное пособие

Ответственный за выпуск Уколов А.С.

Редактор Кочергина Т.Ф.

Корректор Пономарева Н.В.

ЛР № 020565

Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная.

Печать офсетная.

Подписано к печати 20.12.99

Усл.п.л. -8,5 Уч.-изд.л. 8,3

Заказ № 469

Тираж 1500 экз.

«С»

Издательство Таганрогского государственного радиотехнического
университета
ГСП17А, Таганрог, 28, Некрасовский, 44
Типография Таганрогского государственного радиотехнического
университета
ГСП17А, Таганрог, 28, Энгельса, 1