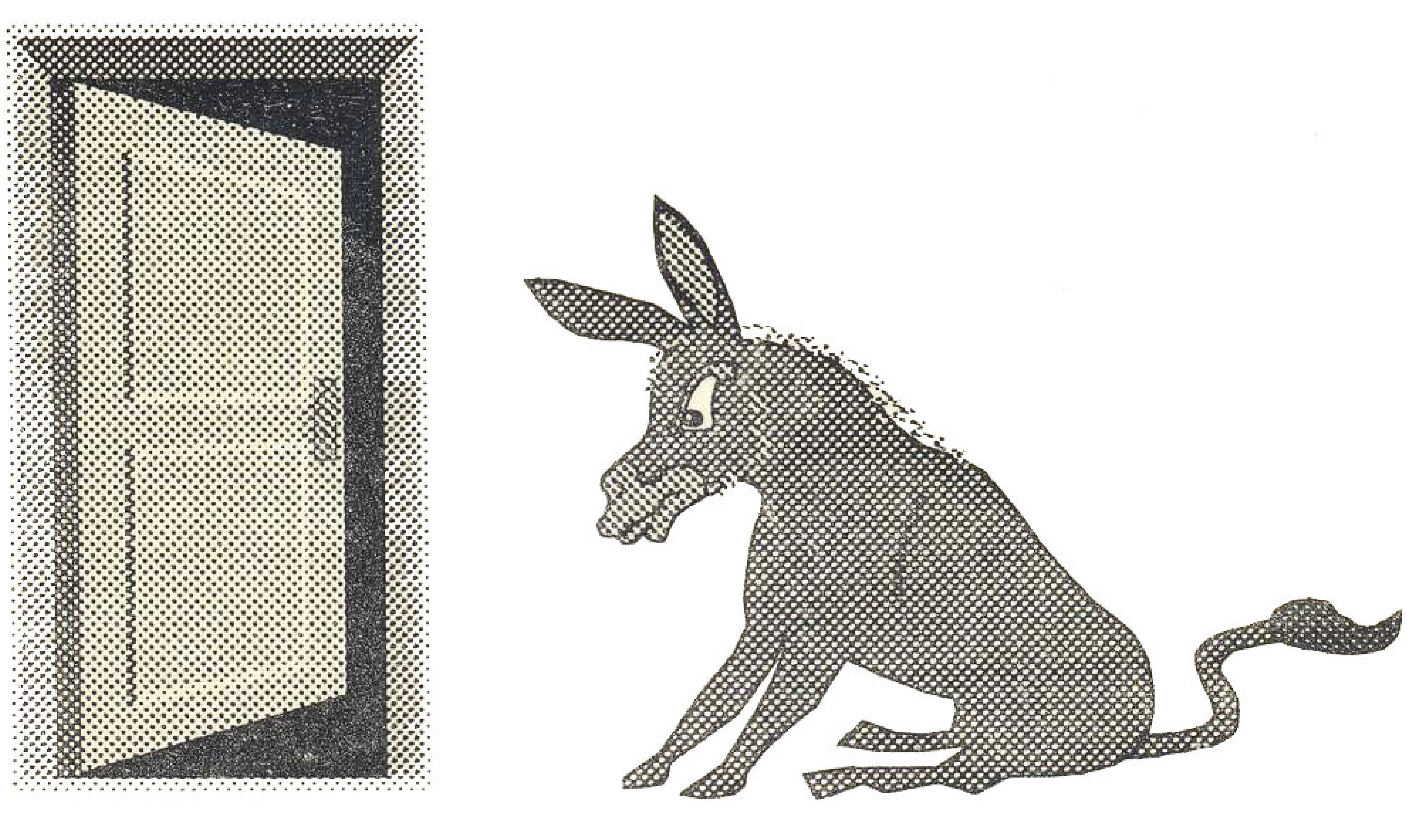
А.С. Уколов

ЛЕКЦИИ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ

Ч. I.

МЕХАНИКА



Министерство общего и профессионального образования
Российской Федерации
ТАГАНРОГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

А.С. Уколов

Лекции по общему курсу физики

Часть I

МЕХАНИКА

Учебное пособие

Таганрог 1998

УДК 53(075.8)+ 531/534(075.8)

Уколов А.С. Лекции по общему курсу физики. Ч.1. Механика: Учебное пособие. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 1998, 135с.

Учебное пособие содержит изложение основных вопросов курса, состоит из пяти глав: кинематика, динамика материальной точки, законы сохранения в механике, элементы динамики вращательного движения твердого тела и основы специальной теории относительности. Пособие соответствует рабочей программе курса физики для студентов технических специальностей ТРТУ, обучающихся по системе РИТМ.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Таганрогского государственного радиотехнического университета.

Рецензенты:

Кафедра прикладной электродинамики и компьютерного моделирования Ростовского-на-Дону государственного университета.

Ю.М. Вернигоров, д.т.н., профессор кафедры физики Донского государственного технического университета.

1. Кинематика

1.1. Основные вопросы механики

Механика изучает простейшие формы движения, встречающиеся в материальном мире, которые объединяются общим названием, механическое движение.

Под механическим движением мы будем понимать изменение взаимного расположения одного материального объекта по отношению к другому материальному объекту. В этом заключается одно из важнейших свойств механического движения: его относительность.

Главные вопросы, которые возникают при попытке характеризовать механическое движение данного материального объекта, следующие:

1. Как движется данный объект?, то есть каковы вид и характер его относительного движения?
2. Почему данный объект движется так, а не иначе?, то есть каковы причины, вызывающие именно данный вид и характер движения рассматриваемого объекта?

Поиском ответа на первый из этих вопросов занимается раздел механики - кинематика, на второй - динамика.

Выводы: ***Механическое движение относительно и является простейшей формой движения материи. Основные вопросы механики: Как и почему движется материальный объект?***

1.2. Основные физические модели и понятия механики

В зависимости от свойств материального объекта, характера и вида его движения в механике используются самые простые физические модели:

материальная точка (частица) - ***объект (тело), размерами которого можно пренебречь по сравнению с характерным размером движения, в котором этот объект участвует.***

Здесь следует обратить внимание на относительный характер понятия и его абстрактность. Любой реальный объект обладает конечными размерами, которыми в данной конкретной ситуации можно пренебречь или нельзя.

Например, рассматривая движение Земли вокруг Солнца, ее можно считать материальной точкой, так как радиус Земли $R_З$=6400 км, значительно меньше радиуса ее орбиты вокруг Солнца R_c=1.5·10^8 км. С другой стороны,

при рассмотрении суточного вращения Земли вокруг собственной оси применять для Земли модель "материальная точка" нельзя.

При изучении движения тела или системы тел, когда понятие материальной точки использовать нельзя, часто полезно применить другую физическую модель, которая называется ***система материальных точек.***

Суть этой модели заключается в том, что любое тело или систему тел, движение которых необходимо изучить, мысленно разбивают на малые участки (материальные точки), размеры которых значительно меньше размеров тела или системы тел. В этом случае изучение движения тела или системы тел сводится к изучению движения отдельных участков системы, то есть материальных точек, из которых состоит эта система. При этом следует, конечно, учитывать, взаимодействуют ли материальные точки между собой или нет.

Частным случаем модели "система материальных точек" в механике является модель под названием ***твердое тело:***

Твердое тело - ***это система материальных точек, взаимное расположение которых в процессе данного движения не изменяется.***

Обратите внимание на относительность этой модели.

Предельным случаем модели твердого тела является абсолютно твердое тело. В абсолютно твердом теле расстояние между любыми произвольными частицами ни при каких условиях не изменяется. Абсолютно твердое тело - это абстрактная модель, так как никакое реальное тело не обладает этим свойством.

Для описания движения материальной точки используют модель - ***траектория движения.***

Траекторией движения ***называется воображаемая линия, вдоль которой происходит движение данной материальной точки.***

Если эта линия представляет собой прямую или ее отрезок, то говорят, что движение материальной точки прямолинейное, в противном случае движение криволинейное. Для описания видов движения твердого тела используют модели поступательного и вращательного движения.

Поступательным ***называется такое движение твердого тела, при котором любая прямая, скрепленная с этим телом, при его движении остается параллельной самой себе.***

Характерной особенностью такого движения является то, что траектории всех материальных точек, составляющих твердое тело,

имеют одинаковую форму и размеры и при параллельном смещении могут быть совмещены друг с другом.

Вращательным ***называется такое движение твердого тела, при котором все его материальные точки движутся по окружностям. При этом центры этих окружностей расположены на одной прямой, называемой осью вращения.***

Произвольное движение твердого тела всегда можно представить в виде совокупности одновременных поступательного и вращательного движений.

Выводы: ***Основными физическими моделями механики являются материальная точка, система материальных точек и твердое тело. Движение материальной точки определяется понятием "траектория движения". Траектории бывают прямолинейными и криволинейными. Движение твердого тела может быть сведено к двум формам: поступательной и вращательной.***

1.3. Кинематика материальной точки

Как было уже указано выше, кинематика - раздел механики, изучающий механические формы движения без учета причин, вызывающих это движение. Поиск ответа на основной вопрос кинематики начнем с описания движения простейшей модели - материальной точки,

1.3.1. Система отсчета

Механическое движение как физическое понятие приобретает конкретный смысл при выполнении следующих двух требований:

а) необходимо указать, относительного какого тела (тела отсчета) перемещается объект, движение которого изучается;

б) важным является возможность сравнивать длительность рассматриваемого движения по сравнению с длительностью некоторого эталонного процесса (часов).

Первое из этих требований непосредственно связано с фундаментальным свойством природы: ***всякое движение относительно.***

Для выполнения второго требования можно в качестве часов использовать любой периодический процесс, период которого принимают за единицу отсчета времени.

Например: период вращения Земли вокруг Солнца - 1 год; период вращения Земли вокруг собственной оси - 1 сутки и т.д.

***Совокупность тела отсчета и часов, неподвижных относительно тела отсчета, называется* системой отсчета.**

Характер и вид движения существенным образом зависит от выбора системы отсчета.

Например: точка, лежащая на ободе колеса, катящегося по горизонтальной поверхности:

а) неподвижна относительно любой другой точки колеса;

б) вращается относительно оси колеса;

в) движется относительно горизонтальной поверхности по сложной кривой (по циклоиде).

Из этого примера ясно, какую важную роль играет удачный выбор системы отсчета для описания и понимания характера движения.

Выводы: ***Для описания движения рассматриваемого объекта необходима система отсчета (тело отсчета и часы). Так как всякое движение относительно, то его характер существенным образом зависит от выбора системы отсчета.***

Контрольные вопросы.

1.1. Попытайтесь качественно изобразить вид траектории точки экватора Земли при движении Земли вокруг собственной оси; вокруг Солнца.

1.3.2. Радиус-вектор, вектор перемещения

Для описания движения материальной точки в каждый момент времени необходимо указать ее положение относительно выбранной системы отсчета. Для этого с телом отсчета связывают ***систему координат*** - способ, с помощью которого задают числа (координаты точки), полностью определяющие положение материальной точки относительно тела отсчета. Важнейшими системами координат являются прямоугольные декартовы системы координат (рис 1.1), в которых положение точки А однозначно определяется ее координатами x,y,z по отношению к началу координат О, связанному с телом отсчета.

Поскольку тело отсчета и материальная точка определяют в пространстве ***физически*** выделенное направление ОА, то положение материальной точки в данной системе координат (XYZ) можно характеризовать одной векторной величиной $\vec{r}$ - ***радиус-вектором.*** Задать радиус-вектор положения материальной точки А-означает указать: на каком

расстоянии от тела отсчета (модуль радиус-вектора $|\vec{r}| = r$) и в каком направлении относительно выбранных координатных направлений (полярный - φ и азимутальный - θ углы) находится материальная точка А.

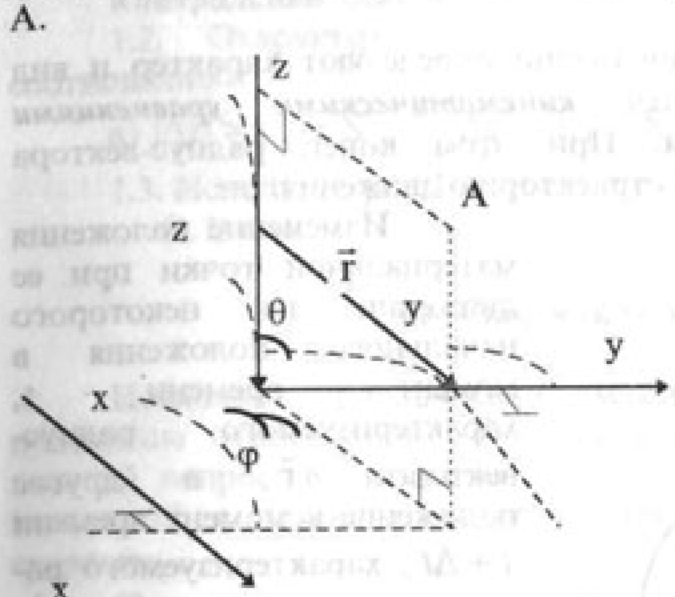


Рис 1.1

Из рис. 1.1 непосредственно видно, что проекции радиус-вектора $\vec{r}$ на оси координат определяют коорди-наты материальной точки x,y,z.

Преимущество векторного способа описания проявляется в том, что он компактнее координатного. Однако необходимо четко понимать, что векторный способ описания положения точки требует задания ***трех чисел***: r,φ,θ так же, как и координатный.

Зная координаты точки x,y,z, нетрудно получить значения r,φ,θ:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ ,\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\ ,$$

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\ , \qquad (1.1)$$

где cosφ, cosθ - ***направляющие косинуса*** **радиус-вектора** $\vec{r}$.

Если известны числа r,φ,θ, то координаты x,y,z частицы определяются соотношениями:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta. \end{cases} \qquad (1.2)$$

При движении материальной точки ее положение относительно начала координат с течением времени изменяется, а следовательно может изменяться как модуль, так и направление радиус-вектора $\vec{r}$.

Следовательно, радиус-вектор является функцией времени:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad \{z = z(t), \varphi = \varphi(t), \theta = \theta(t)\} \tag{1.3}$$

или

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).$$

Эти функции, которые однозначно определяют характер и вид движения частицы, называются ***кинематическими уравнениями движения*** материальной точки. При этом конец радиус-вектора описывает в пространстве линию - траекторию движения.

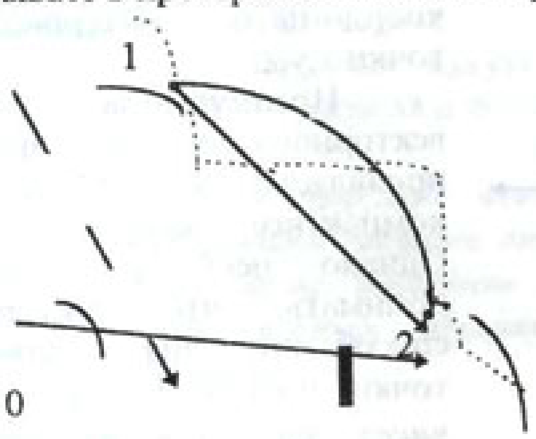


Рис 1.2.

Изменение положения материальной точки при ее движении из некоторого начального положения в момент времени t, характеризуемого радиус-вектором $\vec{r}$, в другое положение в момент времени $t + \Delta t$, характеризуемого радиус-вектором $\vec{r}(t + \Delta t)$, определяется вектором $\Delta\vec{r}$, который называется ***вектором перемещения*** (рис. 1.2).

Здесь следует четко понять, что вектор перемещения характеризует результирующее изменение положения материальной точки за промежуток времени Δt, и не содержит в себе информации ни о виде траектории, ни о характере движения по ней. Кроме этого, даже из рисунка следует, что величина перемещения $|\Delta\vec{r}|$, путь S_{12}, пройденный материальной точкой, и длина дуги траектории l_{12}, заключенной между положениями 1 и 2, в общем случае различны по величине, то есть

$$|\Delta\vec{r}| \neq S_{12} \neq l_{12}. \tag{1.4}$$

Выводы: ***Положение материальной точки в выбранной системе отсчета, характеризуется радиус-вектором. При движении частицы ее радиус-вектор изменяется. Закон этого изменения с течением времени полностью определяет вид траектории частицы и характер движения по ней. Вектор перемещения описывает изменение положения за данный промежуток времени.***

Контрольные вопросы.

1.2. Охарактеризуйте движения частицы, соответствующие соотношениям

а) $|\Delta\vec{r}| = l_{12} \neq S_{12}$, б) $|\Delta\vec{r}| \neq l_{12} = S_{12}$.

1.3. Используя рис.1.1, убедитесь в справедливости соотношений (1.1) и (1.2).

1.3.3. Скорость материальной точки

Поскольку при движении материальной точки изменяется ее положение относительно выбранной системы отсчета, то возникает важный вопрос: Как быстро это положение изменяется? Физической величиной, с помощью которой отвечают на этот вопрос, является ***скорость***.

Скоростью ***материальной точки*** $\vec{\upsilon}$ ***называется вектор, равный производной радиус-вектора*** $\vec{r}$ ***по времени:***

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \tag{1.5}$$

или в проекциях на декартовы координатные оси

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt},\ \upsilon_y = \frac{dy}{dt},\ \upsilon_z = \frac{dz}{dt}, \tag{1.6}$$

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}.$$

Так как хорда $\Delta\vec{r}$ (рис 1.2), стягивающая дугу траектории l_{12}, в пределе при $\Delta t \to 0$ $(\Delta\varphi \to 0)$ совпадает с касательной, то вектор скорости направлен по касательной к траектории в сторону движения материальной точки.

В частности, если модуль скорости $|\vec{\upsilon}| = \upsilon = \text{const}$, то такое движение называется ***равномерным***.

Если детальная характеристика движения за промежуток времени Δt несущественна, то используют средние величины:

средний вектор скорости

$$\rangle\vec{\upsilon}\langle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (1.7)$$

и его модуль

$$\left|\rangle\vec{\upsilon}\langle\right| = \left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}, \qquad (1.8)$$

а также среднюю скорость.

$$\upsilon_{ср} = \frac{\Delta S}{\Delta t}, \qquad (1.9)$$

где ΔS - путь, пройденный материальной точкой за время Δt. Обратите внимание на то, что $\upsilon_{ср}$ - скалярная величина. В общем случае произвольного движения материальной точки $\left|\rangle\vec{\upsilon}\langle\right| \neq \upsilon_{ср}$.

Часто полезно бывает знать, с какой скоростью изменяется со временем расстояние между материальной точкой и началом координат(как быстро изменяется модуль радиус-вектора $|\vec{r}| = r$), и с какой скоростью изменяется направление радиус-вектора относительно осей координат системы отсчета? Ответить на эти вопросы проще всего, если воспользоваться естественной формой представления радиус-вектора

$$\vec{r} = |\vec{r}|\vec{e}_r = r\vec{e}_r, \qquad (1.10)$$

которая учитывает тот факт, что у любого вектора есть две естественные характеристики: ***величина и направление***. Здесь $\vec{e}_r$ - орт вектора $\vec{r}$, то есть вектор, модуль которого равен единице $\left(|\vec{e}_r| = 1\right)$, а направление совпадает с направлением радиус-вектора $(\vec{e}_r \uparrow\uparrow \vec{r})$.

Используя (1.5) и (1.10), получим

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\cdot\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}. \qquad (1.11)$$

В соотношении (1.11) вектор $\vec{\upsilon}$ представлен в виде двух составляющих, первая из которых

$$\vec{\upsilon}_r = \frac{dr}{dt}\cdot\vec{e}_r \qquad (1.12)$$

характеризует скорость изменения модуля радиус-вектора и направлена вдоль $\vec{r}$. Вторая составляющая вектора скорости

$$\vec{\upsilon}_\varphi = r\frac{d\vec{e}_r}{dt} \qquad (1.13)$$

характеризует скорость изменения радиус-вектора по направлению и направлена перпендикулярно $\vec{r}$, в сторону его поворота. Действительно, так как

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{e}_r(t+\Delta t) - \vec{e}_r(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{e}_r}{dt}, \vec{e}_r(t)$$

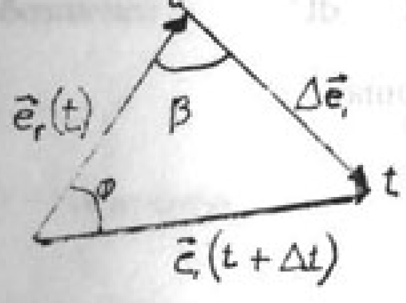


Рис 1.3

то из рис. 1.3 следует, что при $\Delta t \to 0$ $\Delta\varphi \to 0$ (угол поворота радиус-вектора $\vec{r}$ за время Δt). При этом $\beta \to \pi/2$, значит при $\Delta t \to 0$ $\frac{d\vec{e}_r}{dt}\perp\vec{e}_r$. Поэтому $\vec{\upsilon}_\varphi\perp\vec{r}$. Здесь надо учесть, что $|\vec{e}_r(t)| = |\vec{e}_r(t+\Delta t)| = 1$. Таким образом,

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_r + \vec{\upsilon}_\varphi;\ \upsilon = \sqrt{\upsilon_r^2 + \upsilon_\varphi^2}.$$

Выводы: ***Скорость материальной точки - есть производная радиус-вектора по времени, характеризует быстроту изменения радиус-вектора как по модулю, так и по направлению, направлена по касательной к траектории движения.***

Контрольные вопросы.

1.4. Покажите, что $|\vec{\upsilon}| = \dfrac{dS}{dt}$.

1.5. Может ли при прямолинейном движении выполняться условие $\rangle\vec{\upsilon}\langle \neq \upsilon_{ср}$. При каком движении выполняется равенство между этими величинами?

1.6. Что вы можете сказать о характере движения и виде траектории, если:

а) $\vec{e}_r = \text{const}$; б) $\vec{\upsilon} = \text{const}$; в) $\upsilon_r = 0$, $\upsilon_\varphi \neq 0$; г) $\upsilon_r \neq 0$, $\upsilon_\varphi = 0$;

д) $\upsilon_{r=0}$, $\upsilon_\varphi = \text{const}$.

1.3.4. Ускорение материальной точки

При движении материальной точки ее скорость $\vec{\upsilon}$ может изменяться со временем. Для характеристики изменения скорости вводят ***ускорение*** как производную по времени вектора скорости:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\upsilon}(t+\Delta t) - \vec{\upsilon}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (1.14)$$

или в проекциях на декартовы оси координат

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2},\ a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},$$

$$a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \qquad (1.15)$$

Ускорение $\vec{a}$, в отличие от скорости $\vec{\upsilon}$, может иметь любую ориентацию по отношению к направлению движения материальной точки. Очевидно, что модуль ускорения связан с его проекциями соотношением

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (1.16)$$

По аналогии с п.1.3.3 вводят средний вектор ускорения $\rangle\vec{a}\langle = \dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$, его модуль $|\rangle\vec{a}\langle| = \left|\dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}\right|$ и среднее ускорение $a_{ср} = \dfrac{\Delta|\vec{\upsilon}|}{\Delta t} = \dfrac{\Delta\upsilon}{\Delta t}$.

В общем случае, когда изменяется как модуль скорости $\vec{\upsilon}$, так и ее направление (случай неравномерного криволинейного движения), движение характеризуют с помощью естественных составляющих вектора $\vec{a}$, который называется ***полным ускорением***.

Представим вектор скорости в естественном виде:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon \cdot \vec{\tau}, \qquad (1.17)$$

где υ -модуль скорости, а $\vec{\tau}$ -орт скорости.

Используя определение (1.14), получим

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \vec{\tau} + \upsilon \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \qquad (1.18)$$

Первую составляющую $\vec{a}$ в правой части равенства (1.18) обозначим

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} \cdot \vec{\tau}, \qquad (1.19)$$

а вторую

$$\vec{a}_n = \upsilon \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \qquad (1.20)$$

Смысл составляющей $\vec{a}_\tau$ достаточно очевиден: она характеризует быстроту изменения со временем модуля скорости. Модуль этой составляющей равен $a_\tau = |\vec{a}_\tau| = \dfrac{d\upsilon}{dt}$, а направлена она по касательной к траектории в направлении движения $(\vec{a}_\tau \uparrow\uparrow \vec{\upsilon})$, если скорость по модулю возрастает ($\frac{d\upsilon}{dt} > 0$), и в противоположном движению направлении $\left(\vec{a}_\tau \uparrow\downarrow \vec{\upsilon}\right)$, если скорость по модулю убывает $\left(\frac{d\upsilon}{dt} < 0\right)$.

Поэтому эта естественная составляющая ускорения называется ***тангенциальным (касательным) ускорением.***

Вторая составляющая $\vec{a}_n$ характеризует быстроту изменения вектора скорости по направлению (см. (1.13) из п. 1.3.3 и ниже).

Для выяснения величины и направления составляющей $\vec{a}_n$ рассмотрим для простоты плоское криволинейное движение (рис 1.4). Будем считать, что точки 1 и 2, соответствующие моментам времени t и t+Δt, лежат на траектории достаточно близко друг к другу. В этом случае длину дуги траектории ΔS между точками 1 и 2 можно считать приближенно дугой окружности радиуса R. Перенесем параллельно орт $\vec{\tau}_2$ в точку 1. Из рис. 1.4 видно, что треугольник 12C и треугольник, образованный ортами $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_2$ и приращением $\Delta\vec{\tau} = \vec{\tau}_2 - \vec{\tau}_1$, подобны. Следовательно,

$$\frac{|\Delta\vec{\tau}|}{|\vec{\tau}_1|} = \frac{|\Delta\vec{R}|}{R} = \frac{|\vec{R}_2 - \vec{R}_1|}{R}.$$

Поэтому с учетом $|\vec{\tau}_1| = 1$ получим $|\Delta\vec{\tau}| = \frac{|\Delta\vec{R}|}{R}$.

Величину составляющей $\vec{a}_n$ найдем из (1.20) с помощью ряда равенств:

$$a_n = |\vec{a}_n| = \upsilon\cdot\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = \upsilon\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{\tau}|}{\Delta t} = \frac{\upsilon}{R}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{R}|}{\Delta t} = \frac{\upsilon}{R}\cdot\left|\frac{d\vec{R}}{dt}\right| = \frac{\upsilon^2}{R},$$

то есть

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R}. \qquad (1.21)$$

Легко видеть, что при $\Delta t \to 0$ вектор $\Delta\vec{\tau}$, а значит и $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$, направлены перпендикулярно касательной к траектории $\left(\frac{d\vec{\tau}}{dt}\perp\vec{\tau}\right)$ к центру дуги ΔS окружности. Введя единичный вектор нормали $\vec{n}$ $\left(|\vec{n}| = 1, \vec{n}\uparrow\downarrow\vec{R}, \vec{n}\perp\vec{\tau}\right)$, выражению (1.21) можно придать вид

$$\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{R}\cdot\vec{n}. \qquad (1.22)$$

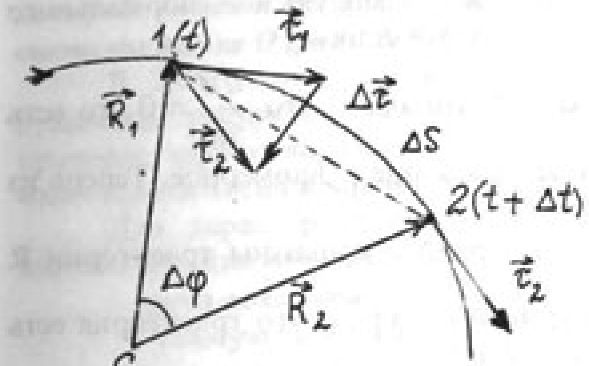


Рис 1.4

В случае произвольной криволинейной траектории R означает радиус кривизны траектории в данной ее точке:

$$R = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta\varphi} = \frac{dS}{d\varphi}. \qquad (1.23)$$

Из-за своего направления составляющая $\vec{a}_n$ называется ***нормальным (центростреми-тельным) ускорением.***

Теперь соотношению (1.18) можно придать вид (рис 1.5)

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \qquad (1.24)$$

а так как $\vec{a}_n \perp \vec{a}_\tau$, то

$$\begin{cases} a = |\vec{a}| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon^2}{R}\right)^2}, \\ \text{и} \\ tg\alpha = \frac{a_n}{a_\tau}. \end{cases} \qquad (1.25)$$

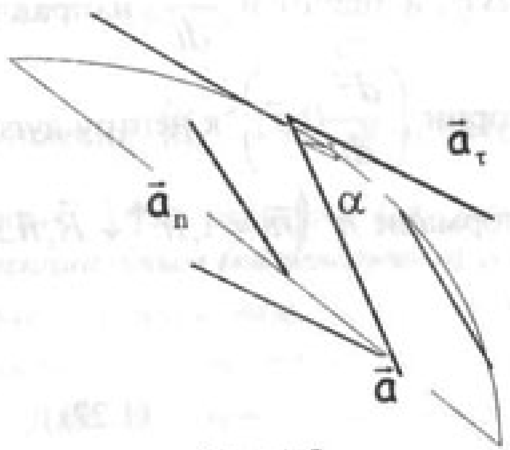


Рис. 1.5

Соотношения (1.25) определяют величину и направление полного ускорения $\vec{a}$.

В качестве примера рассмотрим один из результатов, вытекающих из соотношений (1.19), (1.22) и (1.24).

Пусть тангенциальное ускорение равно нулю $(a_\tau = 0)$, а модуль нормального ускорения постоянен $(a_n = const)$. Условие $a_\tau = 0$ означает, что $\dfrac{d\upsilon}{dt} = 0$, то есть модуль скорости $\upsilon = const$. Поэтому движение равномерное. Теперь из условия $a_n = \dfrac{\upsilon^2}{R} = const$ следует, что радиус кривизны траектории R тоже постоянен, что для плоской кривой означает, что траектория есть окружность (в общем случае - винтовая линия).

Выводы: ***Ускорение характеризует быстроту изменения вектора скорости и равно производной скорости по времени. При криволинейном движении вектор ускорения имеет две составляющие: тангенциальное и нормальное ускорение. Тангенциальное ускорение характеризует скорость изменения модуля скорости и направлено по касательной к траектории движения. Нормальное ускорение характеризует скорость изменения вектора скорости по направлению и направлено по нормали к касательной к центру кривизны траектории точки.***

Контрольные вопросы.

1.7. Опишите движения материальной точки, исходя из условий а) $a_\tau=0$, $a_n=0$; б) $a_\tau=const$, $a_n=0$; в) $a_\tau=a_\tau(t)$, $a_n=0$; г) $a_\tau=0$, $a_n=const$.

1.8. Возможно ли движение при условии $\vec{a}_n = \overrightarrow{const}$?

1.3.5. Вращательное движение материальной точки

Различают два вида вращательного движения материальной точки:

- вращательное движение вокруг неподвижной оси - это движение материальной точки по окружности радиуса R, центр которой лежит на неподвижной относительно данной системы отсчета прямой (ось вращения), перпендикулярной плоскости, в которой лежит траектория точки (рис 1.6, а).

- вращательное движение около неподвижной точки - это движение материальной точки по поверхности сферы радиуса R, центр которой лежит в некоторой неподвижной относительно данной системы точке О (рис 1.6, б).

В этом случае в каждый момент времени материальная точка вращается вокруг так называемой ***мгновенной оси вращения,*** которая проходит через точку О и изменяет с течением времени свою ориентацию относительно осей координат системы отсчета.

Для характеристики вращательного движения вводят угловые кинематические величины:

угол поворота;

угловую скорость;

угловое ускорение.

Пусть материальная точка вращается по окружности радиуса R с центром в точке С (рис 1.7). Положение материальной точки на окружности в произвольный момент времени t можно охарактеризовать радиус-вектором $\vec{r}$, проведенным из некоторой точки О, лежащей на мгновенной оси вращения и выбранной в качестве точки отсчета. Изменение положения материальной точки за промежуток времени dt, то есть ее перемещение $d\vec{r}$, связано с углом поворота $d\varphi$ радиуса окружности $R = \left|\vec{R}(t)\right|$, скрепленного с материальной точкой. Из рисунка 1.7 видно, что

$$|d\vec{r}| = \left|\vec{R}\right| \cdot d\varphi = R d\varphi,$$

где $R = |\vec{r}| \sin\alpha$, то есть

$$|d\vec{r}| = |\vec{r}| \sin\alpha \cdot d\varphi. \quad (1.26)$$

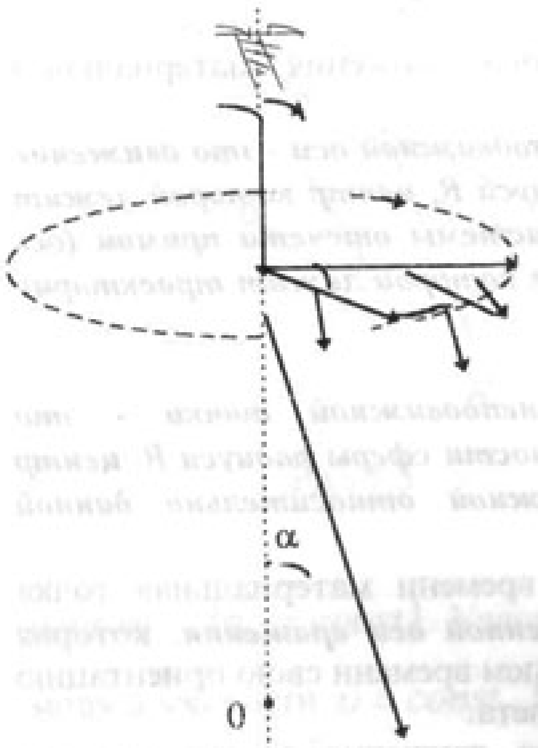


Рис 1.7.

Этому соотношению можно придать векторную форму, если ввести вектор $d\vec{\varphi}$ -вектор угла поворота, направление которого связано с направлением вращения материальной точки **определенным правилом.**

Условились для определения этой связи применять **правило правого винта:** вектор $d\vec{\varphi}$ направлять по мгновенной оси вращения в ту сторону, куда будет двигаться винт с правой нарезкой, при вращении его головки в сторону вращения материальной точки (рис 1.7).

Теперь

$$d\vec{r} = [d\vec{\varphi} \times \vec{r}] = \left[d\vec{\varphi} \times \vec{R}\right]. \quad (1.27)$$

Здесь и ниже скобками [] обозначено векторное произведение векторов.

Следует отметить, что из-за условности выбора направления угла поворота $d\vec{\varphi}$ свойства этого вектора (и ему подобных) существенным образом отличаются от обычных векторов. Поэтому их называют **псевдовекторами** или **аксиальными векторами.**

В частности последовательные бесконечно малые повороты, характеризуемые векторами $d\vec{\varphi}_1$ и $d\vec{\varphi}_2$, при их сложении дают результирующий поворот $d\vec{\varphi}$, равный

$$d\vec{\varphi} = d\vec{\varphi}_1 + d\vec{\varphi}_2,$$

то есть подчиняются обычному правилу сложения векторов. Для поворотов, характеризуемых конечными углами $\Delta\vec{\varphi}_1$ и $\Delta\vec{\varphi}_2$, их геометрическая сумма не равна результирующему повороту $\Delta\vec{\varphi}$, то есть

$$\Delta\vec{\varphi} \neq \Delta\vec{\varphi}_1 + \Delta\vec{\varphi}_2.$$

Более того, из наглядного примера, изображенного на рис 1.8, видно, что

$$\Delta\vec{\varphi}_1 + \Delta\vec{\varphi}_2 \neq \Delta\vec{\varphi}_2 + \Delta\vec{\varphi}_1.$$

Скорость поворота характеризуется с помощью понятия **угловой скорости** $\vec{\omega}$ в данный момент времени t (мгновенной угловой скорости):

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \quad (1.28)$$

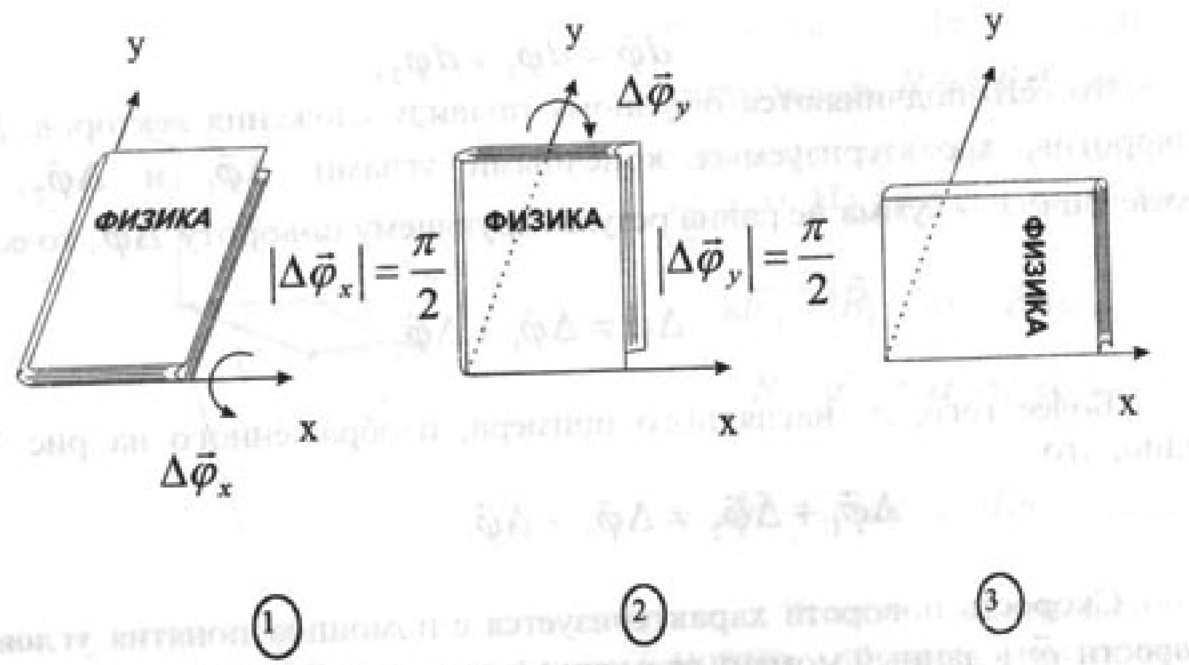
Вектор мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$ ориентирован, так же как и $d\vec{\varphi}$, вдоль мгновенной оси вращения и связан правилом правого винта с направлением вращения в данный момент времени. Поэтому $\vec{\omega}$ является аксиальным вектором (рис 1.9, а, б).При вращении вокруг неподвижной оси вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль этой оси. При вращении вокруг неподвижной точки $\vec{\omega}$ изменяет свое направление вместе с изменением ориентации мгновенной оси.

Если в процессе вращения угловая скорость $\vec{\omega}$ является функцией времени, то для характеристики быстроты изменения $\vec{\omega}$ как по величине, так и по направлению, вводят **угловое ускорение**:

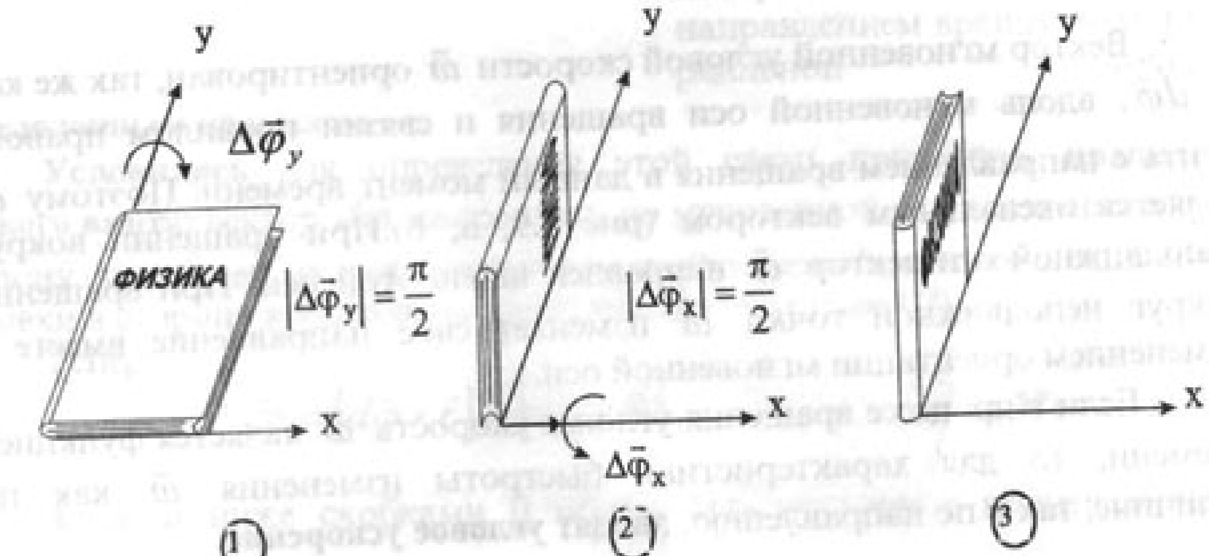
$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (1.29)$$

Направление вектора $\vec{\varepsilon}$ определяется направлением $d\vec{\omega}$ в данный момент времени.

При вращении материальной точки вокруг неподвижной оси угловое ускорение направлено вдоль этой оси.



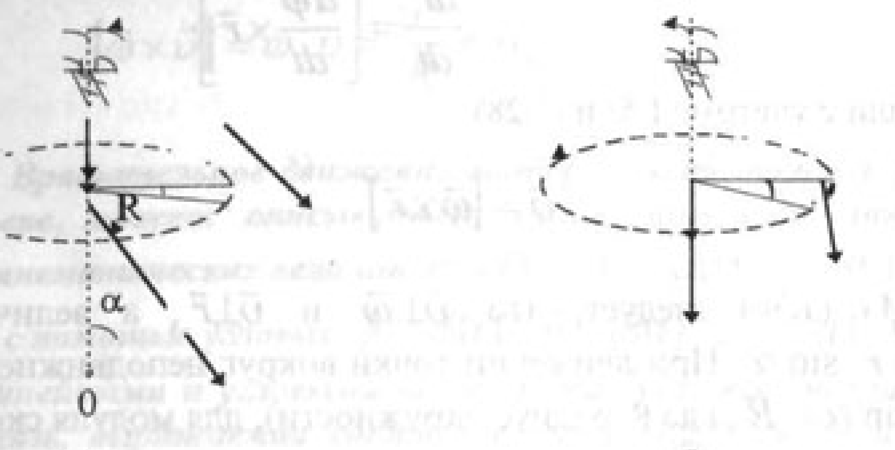
а



$$\Delta\vec{\varphi}_x + \Delta\vec{\varphi}_y \neq \Delta\vec{\varphi}_y + \Delta\vec{\varphi}_x$$

б

Рис. 1.8



а) б)

Рис. 1.9.

При этом $\vec{\varepsilon} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$, $\dfrac{d\omega}{dt} > 0$, $\vec{\varepsilon} \uparrow\downarrow \vec{\omega}$, если $\dfrac{d\omega}{dt} < 0$.

Выводы: ***При вращении материальной точки ее движение может описываться с помощью угловых кинематических величин: угла поворота $d\vec{\varphi}$, угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$, которые являются аксиальными векторами. При вращении вокруг неподвижной оси $d\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ направлены вдоль этой оси. При вращении вокруг неподвижной точки $d\vec{\varphi}$ и $\vec{\omega}$ направлены вдоль мгновенной оси вращения, а $\vec{\varepsilon}$ сонаправлен с приращением $d\vec{\omega}$ в данный момент времени.***

Контрольные вопросы.

1.9. Каков смысл вектора $\vec{R}$ в соотношении (1.27), если ось вращения изменяет с течением времени свою ориентацию?

1.10. Охарактеризуйте вращательное движение материальной точки, соответствующее условиям:

а) $\vec{\varepsilon} = 0$; б) $\left|\vec{\varepsilon}\right| = const$; в) $\vec{\varepsilon} = \overrightarrow{const}$; г) $\vec{\omega} \perp \vec{\varepsilon}$, $\left|\vec{\varepsilon}\right| = const$.

1.3.6. Взаимосвязь между линейными и угловыми кинематическими величинами

Из соотношения (1.27) непосредственно следует, что

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r}\right]$$

или с учетом (1.5) и (1.28)

$$\vec{\upsilon} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]. \qquad (1.30)$$

Из (1.30) следует, что $\vec{\upsilon} \perp \vec{\omega}$ и $\vec{\upsilon} \perp \vec{r}$, а величина скорости $\upsilon = \omega \cdot r \cdot \sin\alpha$. При движении точки вокруг неподвижной оси (рис 1.9, а) ($r \cdot \sin\alpha = R$, где R-радиус окружности), для модуля скорости имеем

$$\upsilon = \omega \cdot R. \qquad (1.31)$$

Дифференцируя соотношение (1.30) по времени, получим

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right]$$

или, используя (1.14), (1.29) и (1.5),

$$\vec{a} = [\vec{\varepsilon} \times \vec{r}] + [\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}]. \qquad (1.32)$$

Первое слагаемое представляет собой тангенциальную составляющую ускорения:

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon} \times \vec{r}], \qquad (1.33)$$

а второе слагаемое - нормальную составляющую ускорения

$$\vec{a}_n = [\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}]. \qquad (1.34)$$

Чтобы убедиться в справедливости (1.33) и (1.34), рассмотрим вращение точки вокруг неподвижной оси. В этом случае

$$|[\vec{\varepsilon} \times \vec{r}]| = \varepsilon \cdot r \cdot \sin\alpha = \varepsilon \cdot R = \frac{d\omega}{dt} \cdot R = \frac{d(\omega \cdot R)}{dt} = \frac{d\upsilon}{dt} = a_\tau .$$

Здесь использованы формулы (1.26), (1.29), (1.31), (1.19) и учтено, что R=const. Для (1.34) с учетом $\vec{\omega} \perp \vec{\upsilon}$ и (1.31), (1.21) получим

$$|[\vec{\omega} \times \vec{\upsilon}]| = \omega \cdot \upsilon = \frac{\upsilon^2}{R} = a_n .$$

Выводы: ***Вращательное движение материальной точки в равной мере может описываться как с помощью линейных кинематических величин $\vec{r} = \vec{r}(t)$, $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t)$, $\vec{a} = \vec{a}(t)$, так и с помощью угловых $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(t)$, $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$, $\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}(t)$. Между линейными и угловыми величинами существует взаимная связь, выражаемая соотношениями (1.27), (1.30) и (1.32-1.34).***

1.4. Кинематическое уравнение движения. Прямая и обратная задачи кинематики

Как было указано выше в п.1.3, характер движения точки и вид ее траектории описывают кинематическими уравнениями движения $\vec{r} = \vec{r}(t)$, {x(t), y(t), z(t)}, которые однозначно определяют положение материальной точки в любой момент времени t относительно выбранной системы отсчета.

При решении конкретных задач кинематики могут возникать две принципиально различные ситуации в зависимости от того, какая информация известна о движении точки.

1. ***Прямая задача кинематики.*** Известен математический вид кинематического уравнения движения. Необходимо найти кинематические характеристики $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t)$ и $\vec{a} = \vec{a}(t)$. В этом случае задача однозначно решается с помощью (1.5), (1.6), (1.14), (1.15).
2. ***Обратная задача кинематики.*** Известна одна из кинематических характеристик движения как функция времени (например, $\vec{a} = \vec{a}(t)$). Необходимо определить остальные кинематические величины: $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t)$ и кинематическое уравнение движения $\vec{r} = \vec{r}(t)$. В этом случае ***однозначное*** решение задачи может быть найдено ***только*** при наличии дополнительной информации. Должны быть известны кинематические величины $\vec{\upsilon}_0$ и $\vec{r}_0$ в некоторый момент времени t_0, условно принятый за начальный. Величины $\vec{\upsilon}_0$ и

$\vec{r}_0$ называются ***начальными условиями*** задачи. Тогда с помощью (1.14) будем иметь

$$d\vec{\upsilon} = \vec{a}(t)dt.$$

Интегрируя в пределах от t_0 до t, получим

$$\int_{\upsilon_0}^{\vec{\upsilon}} d\vec{\upsilon} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt \Rightarrow \vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt,$$

то есть

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt. \qquad (1.35)$$

Кинематическое уравнение движения найдем на основании (1.5) с учетом (1.35)

$$d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt \Rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \left(\vec{\upsilon}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt \right) dt \Rightarrow$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 \cdot (t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \left(\int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)dt \right) dt. \qquad (1.36)$$

В качестве примера рассмотрим решение обратной задачи о движении точки с постоянным ускорением $\vec{a}(t) = \vec{a} = const$. В этом случае из (1.32) имеем

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a} \cdot (t - t_0), \qquad (1.37)$$

а из (1.36)

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 (t - t_0) + \frac{\vec{a}(t - t_0)^2}{2}, \qquad (1.38)$$

Выводы: ***В кинематике встречаются два типа задач: прямая и обратная. Прямая задача имеет однозначное решение. Обратная задача для однозначности решения требует знания начальных условий.***

Контрольные вопросы.

1.11. Покажите, что движение с $\vec{a} = const$ происходит в одной плоскости, а траектория точки в этой плоскости представляет ветвь параболы.

1.12. Покажите, что вращательное движение материальной точки вокруг неподвижной оси с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = const$ описывается кинематическими уравнениями

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \varepsilon(t - t_0), & (1.39) \\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \dfrac{\varepsilon(t - t_0)^2}{2}, & (1.40) \end{cases}$$

где φ_0 и ω_0 значения φ и ω при $t = t_0$.

1.5. Кинематика твердого тела

Всякое сложное движение твердого тела можно представить как результат наложения друг на друга двух простых типов движения: ***поступательного*** и ***вращательного***.

Поступательное движение - это движение, когда прямая, проведенная через *любые* две точки тела, остается параллельной самой себе (рис 1.10).

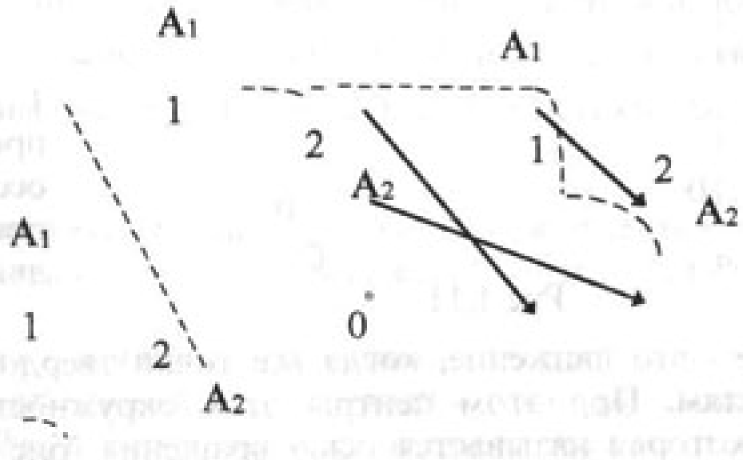


Рис 1.10

Особенностью такого движения является то, что все точки твердого тела в любой момент времени имеют *одинаковые скорости и ускорения*. Поэтому при поступательном движении твердого тела достаточно описать движение только одной какой-либо точки тела.

Действительно, пусть в некоторый момент времени t положения двух произвольных точек тела 1 и 2 относительно точки отсчета О (рис 1.10) определяются радиус-векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Тогда взаимное их расположение в теле описывается вектором $\vec{r}_{12}$. При этом

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_{12} = \vec{r}_2, \tag{1.41}$$

а так как тело твердое, то $|\vec{r}_{12}| = const$. При поступательном движении прямая, проходящая через точки 1 и 2, перемещается параллельно самой себе. Поэтому направление вектора $\vec{r}_{12}$ при движении тела не изменяется. Дифференцируя равенство (1.41) по времени с учетом постоянства $\vec{r}_{12}$, получим

$$\frac{d\vec{r}_1}{dt} = \frac{d\vec{r}_2}{dt}, \text{или } \vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_2.$$

Дифференцируя последние равенства еще раз по времени, получим равенство ускорений:

$$\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}, \text{или}$$

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2.$$

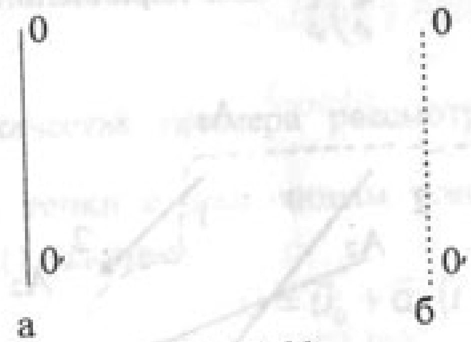


Рис 1.11

Поскольку точки 1 и 2 выбраны произвольно, то особенность поступательного движения доказана.

Вращательное движение - это движение, когда все точки твердого тела движутся по окружностям. При этом центры этих окружностей лежат на одной прямой, которая называется осью вращения (рис 1.11). Ось вращения может пронизывать тело (рис 1.11, а) или находиться вне тела (рис 1.11, б).

Особенностью вращательного движения является то, что все точки тела в любой момент времени t имеют относительно оси вращения ***одинаковые угловые скорости и угловые ускорения.***

Описание вращательного движения с помощью угловых кинематических характеристик $\vec{\varphi}(t), \vec{\omega}(t), \vec{\varepsilon}(t)$ имеет громадное преимущество перед описанием с помощью линейных кинематических вели-

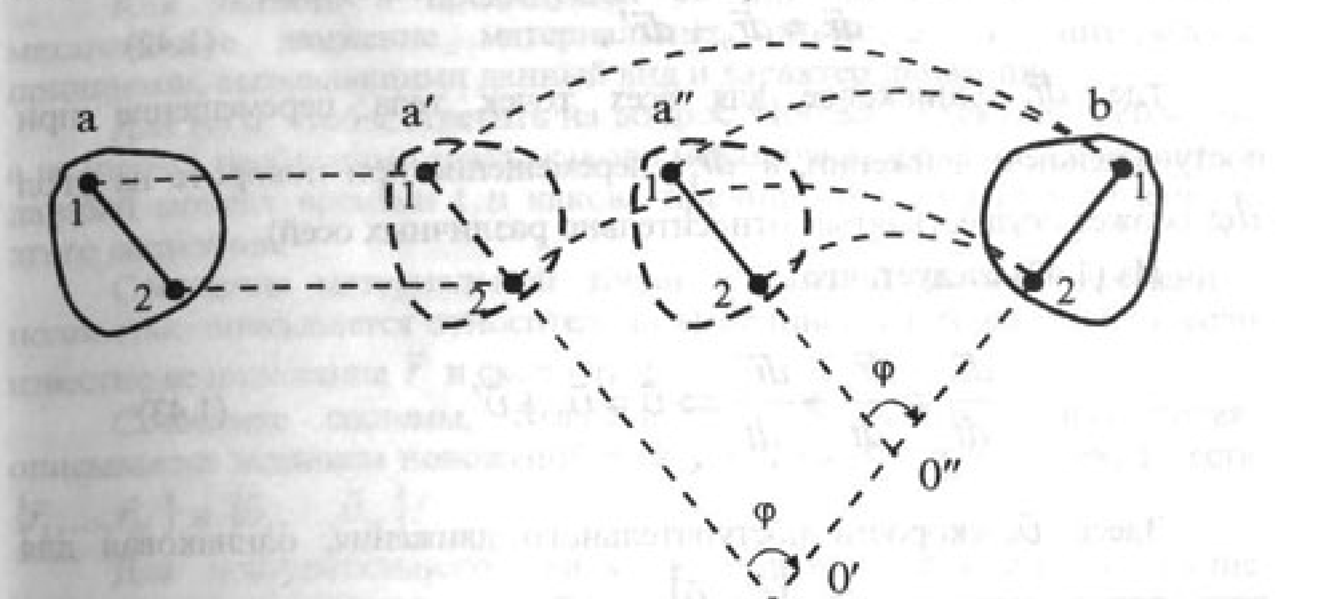


Рис. 1.12

чин именно в силу указанной особенности вращательного движения.

Если известно кинематическое уравнение вращательного движения $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(t)$, то, зная радиус окружности, по которой вращается данная точка тела, с помощью (1.27), (1.30) и (1.32) можно легко определить ее линейные кинематические характеристики $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}(t)$ и $\vec{a} = \vec{a}(t)$.

Теперь можно показать, что произвольное движение твердого тела представимо в виде наложения поступательного и вращательного движений.

Покажем это для случая плоского движения твердого тела.

Рассмотрим два произвольных положения тела при сложном его движении (рис 1.12). Результирующее перемещение тела из положения (a) в положение (b) можно осуществить бесконечным множеством способов. Например, поступательно переместить из положения (a) в положение (a'), а затем повернуть вокруг оси $0'$ на угол φ по часовой стрелке; или поступательно переместить из положения (a) в положение (a''), и повернуть на тот же угол φ относительно оси $0''$.

Таким образом, элементарное перемещение $d\vec{r}$ какой-либо точки твердого тела за время dt можно представить в виде суммы

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}\,', \tag{1.42}$$

где $d\vec{r}_0$-одинаковое для всех точек тела перемещение при поступательном движении, а $d\vec{r}_1$- перемещение при повороте на угол $d\varphi$ (может осуществляться относительно различных осей).

Из (1.42) следует, что

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}\,'}{dt} \Rightarrow \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{\upsilon}\,'. \tag{1.43}$$

Здесь $\vec{\upsilon}_0$-скорость поступательного движения, одинаковая для всех точек тела, а $\vec{\upsilon}\,' = \left[\vec{\omega} \times \vec{R}\right]$-линейная скорость точки при ее поворотах с угловой скоростью $\vec{\omega}$ по окружности радиуса $R = \left|\vec{R}\right|$ вокруг мгновенной оси. Отметим, что все точки тела имеют одинаковую угловую скорость $\vec{\omega}$. Таким образом,

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \left[\vec{\omega} \times \vec{R}\right]. \tag{1.44}$$

Выводы: ***Любое сложное движение твердого тела является результатом сложения поступательного и вращательного движений.***

Контрольные вопросы.

1.13. Можно ли произвольное перемещение твердого тела представить как результат а) только одних поворотов? б) только одного поступательного перемещения?

1.14. Может ли быть поступательным такое движение, при котором все точки твердого тела движутся по окружностям?

2. Динамика материальной точки

2.1. Ньютоновская динамика и границы ее применимости

Как указано в предыдущем разделе, кинематика описывает механическое движение материальных объектов, не интересуясь причинами, вызывающими данный вид и характер движения.

Для того, чтобы ответить на вопрос: Почему объект движется так, а не иначе?, необходимо знать, каково механическое состояние объекта в данный момент времени t и какова причина, вызывающая изменение этого состояния.

Состояние материальной точки в данный момент времени t полностью описывается относительно выбранной системы отсчета, если известно ее положение $\vec{r}$ и скорость $\vec{\upsilon}$.

Состояние системы, состоящей из N материальных точек, описывается заданием положений и скоростей каждой из точек, то есть $\{\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N\}$ и $\{\vec{\upsilon}_1, ..., \vec{\upsilon}_N\}$.

Для поступательного движения твердого тела его состояние полностью определяется в момент времени t положением каждой его точки и скоростью любой из них.

Ответ на вопрос: Каковы причины, вызывающие изменение механического состояния объекта? с точки зрения "здравого смысла" достаточно очевиден: объект должен испытывать какие-то воздействия извне. Это не означает, конечно, что любые внешние воздействия изменяют механическое состояние. В динамике изучаются те воздействия, которые могут изменять только механическое состояние объекта.

В качестве количественной меры подобных воздействий в динамике вводят физическую величину, которая называется ***механической силой***, или просто ***силой***. Очевидно, что сила обладает свойством направленности, то есть является векторной величиной.

В реальных ситуациях воздействие на данный объект осуществляется со стороны какого-то другого материального объекта. Поэтому правильно говорить о взаимодействии двух объектов между собой. Во многих случаях, однако, изменение состояния этого другого объекта нас не интересует, что и позволяет взаимодействие заменить эквивалентным действием на рассматриваемый объект механической силы.

В динамике различают два типа взаимодействия: ***контактное*** (когда две частицы взаимодействуют между собой при непосредственном соприкосновении) и через посредство силовых полей (гравитационного, электромагнитного, и так далее) - ***полевое взаимодействие.***

Особенностью ***полевого взаимодействия*** является конечность скорости распространения возмущений в силовых полях, эта скорость не может превышать скорость света в пустоте $c\approx300000$км/с. Отсюда следует тот факт, что при полевом взаимодействии двух частиц любое изменение в состоянии одной из частиц вызывает соответствующее возмущение его силового поля. Это возмущение из-за конечной скорости распространения достигает другой взаимодействующей частицы не мгновенно, а через определенный промежуток времени, то есть происходит эффект запаздывания взаимодействия.

Эффектом запаздывания взаимодействия можно пренебречь, если рассматривать движения со скоростями малыми, по сравнению со скоростью распространения возмущений силовых полей:

$$\upsilon << c\,. \tag{2.1}$$

Это условие является одним из основных, которые определяют возможность применения ньютоновской или классической механики. Другими словами, условие (2.1) означает мгновенность в передаче взаимодействий в физических моделях классической механики.

Вторым условием возможности применения принципов классической механики является требование

$$m\upsilon r >> \hbar\,, \tag{2.2}$$

где m - масса частицы, υ - характерная скорость ее движения, r - характерный размер области пространства, в которой происходит рассматриваемое движение, $\hbar = 1.054\cdot10^{-34}$ Дж с - постоянная Планка. Обоснование условия (2.2) и его физическое содержание будет обсуждаться в разделе "Квантовая механика".

В качестве примера рассмотрим возможность классического описания движения электрона в двух случаях.

1)<u>Движение электрона в электронно-лучевой трубке телевизора.</u> В этом случае характерная скорость $\upsilon\approx10^7\div10^8$ м/с (соответствует ускоряющему напряжению ~10 кВ), а характерный размер области движения r ~ 10 см. При этих значениях величина $m\upsilon r$ имеет значения порядка 10^{-24} Дж с, то есть условие (2.2) заведомо выполняется. Таким образом, движение электрона в электронно-лучевой трубке можно описывать на основе законов классической механики.

2)<u>Движение электрона в атоме водорода.</u> В этом случае величина $m\upsilon r$ имеет тот же порядок, что и $\hbar$. Поэтому применять классическую механику для описания движения электрона в атоме водорода нельзя.

$\int \upsilon(t)\,dt$

Вывод: ***Причиной, вызывающей изменение механического состояния системы, является взаимодействие ее с окружающими объектами. Количественной мерой такого взаимодействия является механическая сила. Законы классической (ньютоновской) механики имеют ограниченную область применимости, определяемую условиями: $\upsilon << c$, $m\upsilon r >> \hbar$.***

2.2. Законы Ньютона

Как и любая область человеческих знаний, классическая механика содержит в своей основе некоторое количество основных утверждений (законов), из которых логическим образом вытекают многочисленные следствия. Впервые основные законы динамики были сформулированы И.Ньютоном в 1687 г., как результат обобщения огромного общечеловеческого опыта. Несмотря на определенную ограниченность этих законов, они играют огромную и исключительную роль в механике. Основных законов динамики три.

Первый закон Ньютона - устанавливает условия, при которых механическое состояние материальной точки остается неизменным с течением времени.

Материальная точка *(тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, если она не взаимодействует с другими телами или ее взаимодействие с другими телами скомпенсировано.*

Поскольку механическое движение относительно и его характер существенным образом определяется выбором системы отсчета, становится понятным, что первый закон Ньютона выполняется только в тех системах отсчета, которые движутся относительно друг друга равномерно и прямолинейно либо относительно друг друга покоятся. Такие системы отсчета называют ***инерциальными***. Системы отсчета, в которых первый закон Ньютона не выполняется, называются ***неинерциальными***. В дальнейшем будет показано, что во всех инерциальных системах отсчета ускорение материальной точки имеет одно и то же значение, а в различных неинерциальных системах ускорения одной и той же материальной точки различны.

Здесь следует четко понимать, что инерциальные системы отсчета являются в определенной степени идеализацией реальных систем отсчета. Реальную систему отсчета можно считать инерциальной с той точностью, с какой в ней выполняется первый закон Ньютона.

Из многочисленных опытных данных известно, что ***гелиоцентрическая*** система отсчета, то есть система отсчета, связанная с

Солнцем, оси которой ориентированы в направлении определенных звезд, является инерциальной.

Многие задачи механики можно решать, считая инерциальной систему отсчета, связанную с Землей.

Второй закон Ньютона - устанавливает условия, при которых механическое состояние материальной точки изменяется.

Во втором законе содержится утверждение, что изменение механического состояния материальной точки может произойти только в результате взаимодействия этой точки с другими телами.

Введем физические величины, с помощью которых устанавливается математическая форма второго закона.

Как уже указывалось, в качестве количественной меры изменения механического состояния материальной точки принимается ее ускорение $\vec{a}$, а количественной меры взаимодействия - сила $\vec{F}$.

Определим некоторые свойства механической силы.

1) Если на материальную точку *поочередно* действуют силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, которые вызывают равные ускорения этой точки $\vec{a}_1 = \vec{a}_2$, то силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ называются *равными*, то есть $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$.

2) Если на точку *одновременно* действуют две силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, в результате чего точка приобретает ускорение $\vec{a}$, то всегда можно действие этих сил заменить действием одной силы $\vec{F}$, вызывающей точно такое же ускорение $\vec{a}$ этой точки. В этом случае сила $\vec{F}$ называется *равнодействующей* сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$.

Утверждения 1) и 2) легко обобщаются на случай произвольного количества сил, действующих на одну материальную точку, и, по сути, устанавливают способы количественного сравнения механических сил.

Из опыта хорошо известно, что при действии одинаковых сил на разные материальные точки 1 и 2 изменения их механического состояния, вообще говоря, различны, то есть $\vec{a}_1 \neq \vec{a}_2$. В этом проявляется различная "сопротивляемость" материальных точек по отношению к внешнему воздействию. Это "стремление" материальных точек сохранить свое механическое состояние называется ***инертностью***. Физическая величина, характеризующая это свойство инертности, называется ***массой*** материальной точки.

На основании опыта устанавливаются следующие способы количественного сравнения масс различных материальных точек:

1) Если при действии одинаковых по величине сил $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ на различные материальные точки 1 и 2 их ускорения оказываются равными $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2|$, то принимается, что массы этих точек так же равны, то есть

$$m_1 = m_2;$$

2) Если при действии одинаковых сил $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$, $|\vec{a}_1| > |\vec{a}_2|$, то $m_1 < m_2$.

Рассмотрим теперь идеализированную физическую модель, когда механическая система состоит из двух *взаимодействующих* материальных точек 1 и 2. Окружающие их тела будем считать настолько удаленными, что воздействием на эти точки можно пренебречь по сравнению с взаимодействием этих точек между собой. Такая система материальных точек, не взаимодействующая с окружающими телами, называется ***замкнутой***. В этом случае, многочисленные опытные данные свидетельствуют о том, что, независимо от природы взаимодействия между точками, всегда выполняется равенство

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}. \qquad (2.3)$$

В равенстве (2.3) величина

$$\vec{p} = m \cdot \vec{\upsilon} \qquad (2.4)$$

называется ***импульсом материальной точки.***

Другими словами, равенство (2.3) означает, что в замкнутой системе при взаимодействии двух материальных точек между собой скорости изменения их импульсов равны по величине и противоположны по направлению в каждый момент времени. Из (2.3) следует важное следствие:

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 \;\Rightarrow\; \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const, \qquad (2.5)$$

которое означает, что в замкнутой системе двух материальных точек их суммарный импульс остается постоянным. Это следствие является частным проявлением более общего ***закона сохранения импульса.***

В случае, если в процессе взаимодействия массы материальных точек остаются постоянными, то равенству (2.3) с учетом (2.4) можно придать вид

$$m_1\vec{a}_1 = -m_2\vec{a}_2 . \qquad (2.6.)$$

Поскольку одним из результатов взаимодействия двух точек является скорость изменения импульса одной из них, то в качестве количественной меры механической силы, действующей на материальную точку, примем именно скорость изменения импульса этой материальной точки, то есть

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = k\vec{F} . \qquad (2.7)$$

Здесь мы, конечно, отвлекаемся от того факта, что сила $\vec{F}$ есть результат действия другой материальной точки на данную.

Для m = const соотношению (2.7) можно придать вид

$$\vec{a} = k\frac{\vec{F}}{m} . \qquad (2.8)$$

В соотношениях (2.7) и (2.8) k - это коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц измерения физических величин. В системе СИ k = 1, единица силы Ньютон (Н): 1Н = 1 кг·м/с^2.

Соотношения (2.7) и (2.8) выражают в математической форме содержание второго закона Ньютона и отражают связь между причиной изменения движения $(\vec{F})$, результатом этого изменения $(\vec{a})$ и инертными свойствами материальной точки (m). Эти соотношения позволяют предсказать состояние материальной точки в момент времени t + dt, если известны ее состояние и сила, действующая на материальную точку в момент времени t. Действительно, из (2.7) следует, что

$$d\vec{p} = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = \vec{F}\cdot dt \Rightarrow$$
$$\vec{p}(t+dt) = \vec{p}(t) + \vec{F}\cdot dt .$$

Поэтому (2.7) и (2.8) являются математическими выражениями ***принципа причинности*** в классической механике и носят название ***"основное уравнение динамики материальной точки"*** (динамики поступательного движения твердого тела).

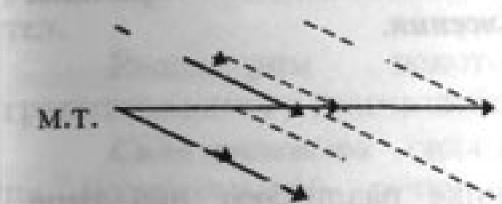
В классической механике большую роль играет так называемый ***принцип независимости действия сил***, который имеет следующее содержание.

При действии на материальную точку нескольких сил одновременно каждая из этих сил независимо друг от друга сообщает материальной точке такое ускорение, которое было бы у точки в отсутствии других сил (рис. 2.1).

Поэтому, на основании второго закона Ньютона,

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m},\ \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m},$$

так как $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$, то



$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1}{m} + \frac{\vec{F}_2}{m} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{m} = \frac{\vec{F}}{m}, \qquad (2.9)$$

рис. 2.1

где $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ -равнодействующая сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$.

Случай действия двух сил на частицу легко обобщается на любое количество сил. Использование этого принципа позволяет складывать силы, действующие на материальную точку, а также разлагать силу на составляющие по любым двум или более направлениям. При этом необходимо четко себе представлять, что сила количественно описывает взаимодействие двух тел (точек) между собой, составляющие же силы не соответствуют никакому взаимодействию, поэтому физического смысла не имеют.

Третий закон Ньютона - фактически устанавливает равноправие объектов, взаимодействующих между собой.

Силы взаимодействия между материальными точками 1 и 2 направлены вдоль прямой, соединяющей эти точки, равны по величине и противоположны по направлению (рис. 2.2).

То есть

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}, \qquad (2.10)$$

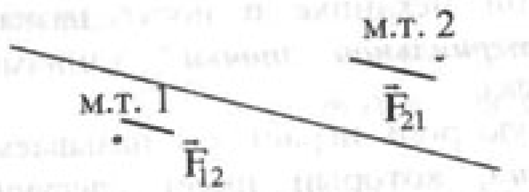


Рис. 2.2

здесь $\vec{F}_{12}$ - сила, действующая на первую точку со стороны второй, $\vec{F}_{21}$ - на вторую со стороны первой.

Следует обратить внимание, что равенство $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$ совсем не означает, что равнодействующая этих сил равна нулю. Равнодействующей сил взаимодействия не существует, так как эти силы действуют на разные материальные точки.

В заключение обсуждения законов Ньютона отметим, что они являются не отдельными независимыми друг от друга законами, а представляют собой единый комплекс взаимосвязанных законов.

Вывод: ***Законы Ньютона являются опытными постулатами классической механики и устанавливают причины возникновения механического движения.***

2.3. Силы

Как уже указывалось в 2.1, в механике различают два типа взаимодействий: полевые и контактные.

К полевым взаимодействиям относятся три вида фундаментальных взаимодействий, известных в современной физике: гравитационное, электромагнитное, сильное. В классической механике основную роль играют первые два вида взаимодействия, которые будут рассмотрены ниже.

2.3.1. Гравитационное взаимодействие

Гравитационное взаимодействие описывается опытным законом Ньютона - ***законом всемирного тяготения***: две материальные точки с массой m_1 и m_2, находящиеся на расстоянии r друг от друга, ***притягиваются*** с силой

$$F_{гр} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (2.11)$$

где $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² - гравитационная постоянная. Масса m_1 и m_2 материальных точек, входящих в закон всемирного тяготения, называется гравитационной массой.

Современные опытные данные свидетельствуют о том, что *инертная* масса m, входящая во второй закон Ньютона, и *гравитационная масса* m, входящая в закон всемирного тяготения, равны между собой с относительной точностью 10^{-12}. Эти опытные данные положены в основу так называемого ***принципа эквивалентности*** гравитационных и неинерциальных сил, возникающих в неинерциальных системах отсчета.

Закон всемирного тяготения в форме (2.11) строго справедлив для неподвижных друг относительно друга материальных точек и приближенно при движении с относительной скоростью $\upsilon_{отн} << c$. Его можно применять в виде (2.11) для однородных правильной геометрической формы тел. В этом случае r означает расстояние между геометрическими центрами тел.

Для неоднородных тел любой формы (2.11) можно использовать, если известны положения центров масс этих тел, тогда r означает расстояние между центрами масс гравитационно взаимодействующих тел.

Рассмотрим некоторые частные случаи проявления гравитационного взаимодействия.

Сила тяжести - сила гравитационного притяжения, действующая на материальную точку (тело) со стороны некоторой планеты (например, Земли). В результате действия этой силы тело движется с ускорением. На основании второго закона Ньютона имеем

$$ma = \gamma \frac{mM}{R^2},$$

где m - масса материальной точки, M - масса планеты, R - расстояние от центра планеты до материальной точки, или

$$a = \gamma \frac{M}{R^2}.$$

Здесь учтено, что инертная и гравитационная массы равна в соответствии с принципом эквивалентности.

Этот результат означает, что ускорение, с которым материальная точка движется под действием силы гравитационного притяжения к планете, не зависит от массы m материальной точки, то есть для всех материальных точек одинаково, и называется ускорением *свободного* *падения*.

$$g = a = \gamma \frac{M}{R^2} = \gamma \frac{M}{(R_0 + h)^2}, \qquad (2.12)$$

где R_0 - радиус планеты, h - высота материальной точки на поверхностью планеты.

Вблизи поверхности планеты ($h << R_0$)

$$g = g_0 \approx \gamma \frac{M}{R_0^2}.$$

Сила, вызывающая свободное падение материальной точки ускорением g, называется ***силой тяжести:***

$$\vec{F}_{\text{-шш}} = m\vec{g}. \qquad (2.13)$$

Вес тела $\left(\vec{P}\right)$ ***- сила, с которой тело действует на связь (подве опору), удерживающую это тело от свободного падения.***

На основе третьего закона Ньютона со стороны связи на тел действует сила реакции связи $\vec{N}$:

$$\vec{N} = -\vec{P}. \qquad (2.14)$$

В результате действия двух сил $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{-шш}} = m\vec{g}$ в общем случ тело может двигаться с ускорением $\vec{a}$, то есть

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{-шш}} + \vec{N}.$$

С учетом (2.13) и (2.14) последнее равенство примет вид

$$m\vec{a} = m\vec{g} - \vec{P},$$

откуда

$$\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a}). \qquad (2.15)$$

В случае $\vec{a} = 0$ (покоящееся или движущееся с постоянной $\vec{\upsilon}$ скоростью тело)

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

В случае $\vec{a} = \vec{g}$

$$\vec{P} = 0.$$

Такое состояние называется *невесомостью.* Здесь следует подчеркнуть, что вес тела $\vec{P}$ и сила тяжести $m\vec{g}$ действуют на разные тела.

Выводы: ***Гравитационное взаимодействие описывается опытным законом всемирного тяготения. Наиболее часто проявляется в виде силы тяжести и веса тела.***

Контрольные вопросы.

2.1. Приведите примеры, когда реализуется состояние невесомости.

2.3.2. Электромагнитное взаимодействие

В основе описания электромагнитного взаимодействия лежит фундаментальный ***закон Кулона***, определяющий силу взаимодействия двух точечных заряженных частиц, неподвижных или движущихся с относительной скоростью $\upsilon_{\text{—}} << c$:

$$F_{\text{э—}} = k \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}, \qquad (2.16)$$

где q_1 и q_2 - заряды частиц, k - коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц (в системе СИ $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф). Замечания по поводу применения закона Кулона подобны замечаниям к применению закона всемирного тяготения.

Так как в природе существуют заряды двух знаков, то силы кулоновского взаимодействия могут иметь как характер притяжения, так и отталкивания.

Для примера сравним величины силы гравитационного притяжения и силы кулоновского отталкивания двух электронов.

Так как

$$F_{гр} = \gamma \frac{m^2}{r^2}, \quad F_{кул} = k\frac{q^2}{r^2},$$

то

$$\frac{F_{кул}}{F_{гр}} = \frac{kq^2}{\gamma m^2}.$$

Учтя значения величин $|q| = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл, $m = 9.1 \cdot 10^{-31}$ кг

получим

$$\frac{F_{кул}}{F_{гр}} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot \left(1.6 \cdot 10^{-19}\right)^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot \left(9.1 \cdot 10^{-31}\right)^2} \cong 4.2 \cdot 10^{42}.$$

Таким образом, кулоновское отталкивание превышае гравитационное притяжение между двумя электронами более чем в 10⁴ раз.

Кулоновское взаимодействие между заряженными частицам передается посредством электромагнитного поля, которое може существовать как *самостоятельный* материальный объект.

Свойства электромагнитного поля описываются напряженность $\vec{E}$ его электрической компоненты и индукцией $\vec{B}$ магнитно компоненты.

В огромном числе случаев приходится рассматривать движени заряженной частицы во внешних электромагнитных полях. В эти ситуациях на заряженную частицу со стороны электромагнитного пол действует ***фундаментальная*** сила:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\left[\vec{\upsilon} \cdot \vec{B}\right], \tag{2.17}$$

которая называется ***силой Лоренца***. Эта сила, как видно из (2.17 имеет две ***естественные*** $\vec{F}_E = q\vec{E}$ - электрическую и $\vec{F}_m = q[\vec{\upsilon} \cdot \vec{B}]$ магнитную составляющие. Выражение (2.17) для силы Лоренц применимо не только в классической, но в квантовой механике.

Рассмотрим два важных случая проявления электромагнитног взаимодействия между очень большим числом частиц.

Сила упругости

Из опыта известно, что если на любое реальное тело подействовать силой, то, в зависимости от свойств этого тела, оно изменяет свои форму и размеры, то есть ***деформируется***. Деформация тела называется ***упругой***, если после прекращения действия силы тело полностью восстанавливает свои прежние размеры и форму. В этом случае сила, возникающая со стороны деформируемого тела, оказывается прямо пропорциональной величине деформации $\Delta\vec{r}$ и направлена в сторону, обратную деформации тела:

$$\vec{F}_{упр} = -k \cdot \Delta\vec{r}, \tag{2.18}$$

где коэффициент пропорциональности k называется ***коэффициентом упругости*** (жесткости). Соотношение (2.18) является математическим выражением опытного ***закона Гука***.

Электромагнитную природу упругой силы можно объяснить следующими рассуждениями.

Любое реальное тело состоит из громадного числа заряженных частиц противоположного знака, между которыми существуют как силы отталкивания, так и силы притяжения. Когда на тело не действуют внешние силы, то любая частица этого тела в среднем находится в равновесии в результате действия на нее всех остальных частиц тела.

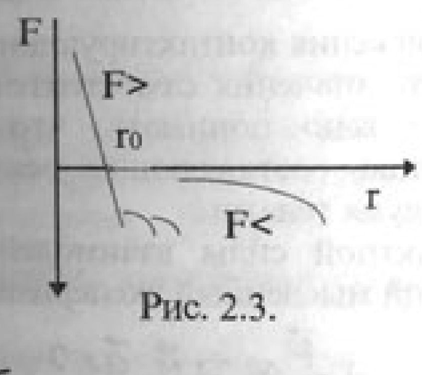


Рис. 2.3.

Рис. 2.3 качественно отображает зависимость силы взаимодействия F между двумя частицами в теле от величины среднего расстояния между ними (r_0-среднее равновесное расстояние между частицами). При попытке сжать тело расстояние между частицами уменьшается ($r < r_0$) и взаимодействие между ними приобретает характер ***отталкивания*** (F>0); при растяжении тела ($r > r_0$) взаимодействие имеет характер *притяжения* . При небольших смещениях частиц друг относительно друга $|r - r_0| << r_0$ из рис. 2.3 видно, что

$$F \sim |r - r_0|,$$

т.е. сила взаимодействия между двумя частицами пропорциональна их смещению друг относительно друга.

Это непосредственно объясняет справедливость закона Гука.

Здесь следует отметить, что в предельных случаях, когда деформациями взаимодействующих между собой тел можно пренебречь, силы упругости проявляются в виде реакции опоры, силы натяжения и т.д.

Часто действие одной или нескольких сил на материальную точку или тело не связано ни с какими деформациями, но количественно подчиняется соотношению (2.18). В этих случаях соответствующие силы называются ***квазиупругими***.

Контактные силы

Взаимодействие двух тел при их непосредственном контакте, когда поверхности тел соприкасаются между собой, обладают весьма своеобразном характером. Это проявляется в том, что величина и направление контактных сил существенным образом зависят от характера относительного движения контактирующих тел. С другой стороны, сам характер относительного движения зависит от сил взаимодействия между контактирующими телами. Чтобы разрешить возникающее противоречие, вводят вместо одной реальной контактной силы взаимодействия ее две составляющие, одна из которых направлена перпендикулярно соприкасающимся поверхностям взаимодействующих тел, другая - по касательной к этим поверхностям. Перпендикулярная составляющая называется ***реакцией опоры*** $\vec{N}$, касательная - ***силой трения*** $\vec{F}_{-\text{р}}$. Из-за важной роли, которую эти составляющие играют в определении характера относительного движения контактирующих тел, реакция опоры и сила трения стали иметь значения самостоятельных "сил". При этом, конечно, необходимо ясно понимать, что сила реакции опоры и сила трения - всего лишь составляющие реальной контактной силы взаимодействия между двумя телами.

Для пояснения своеобразия контактной силы взаимодействия между двумя телами рассмотрим следующий мысленный эксперимент.

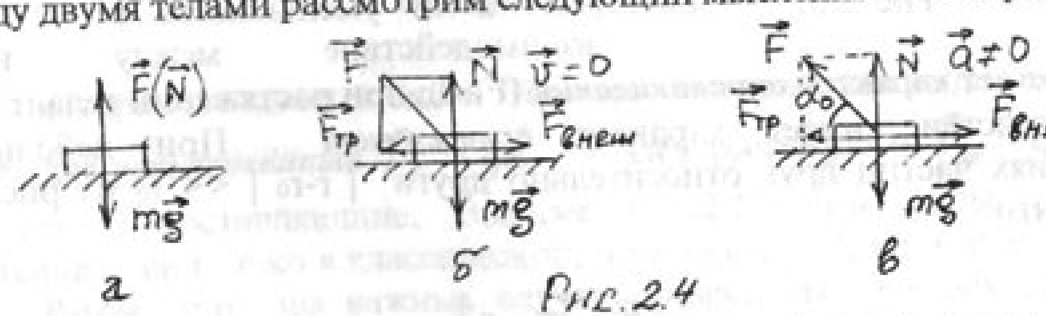


Рис. 2.4

Пусть на горизонтальной поверхности (опоре) лежит брусок массы m (рис. 2.4, а).

Его состояние в этом случае определяется действием двух сил: силы тяжести $m\vec{g}$ и контактной силы $\vec{F}$. Так как брусок находится в равновесии, то $\vec{F} + m\vec{g} = 0$, и $\vec{F}$ перпендикулярна горизонтальной поверхности. Поэтому в этом состоянии сила $\vec{F}$ имеет только одну составляющую - реакцию опоры ($\vec{F} = \vec{N}$), вторая составляющая, сила трения, равна нулю.

Попытаемся теперь, приложив к бруску горизонтальную внешнюю силу $\vec{F}_{\text{‰ Ћь}'}$, сдвинуть брусок относительно опоры (рис. 2.4, б). Если посте-пенно увеличивать величину $\vec{F}_{\text{‰ Ћь}'}$ от нуля до некоторого предельного значения $\vec{F}_0$, то брусок будет находиться в состоянии покоя относительно горизонтальной поверхности. Это означает, что у силы $\vec{F}$ появится горизонтальная составляющая $\vec{F}_{-\text{р}}$, направленная противоположно $\vec{F}_{\text{‰ Ћь}'}$, величина которой автоматически подстраивается так, чтобы выполнялось равенство

$$\vec{F}_{-\text{р.}} = -\vec{F}_{\text{‰ Ћь}'}, \ (F_{\text{‰ Ћь}'} \le F_0).$$

В этом случае $\vec{F}_{-\text{р}}$ называется ***силой трения покоя.***

При дальнейшем увеличении внешней силы $F_{\text{внеш.}} > F_0$ брусок начинает скользить относительно горизонтальной поверхности. Если относительная скорость сравнительно невелика, то величина и направление контактной силы $\vec{F}$, а значит и ее составляющая $\vec{F}_{-\text{р.}}$, перестают изменяться. При этом между величинами составляющих $\vec{N}$ и $\vec{F}_{-\text{р}}$ устанавливается постоянное соотношение:

$$F_{-\text{р.}} = \mu \cdot N = tg\alpha_0 \cdot N, \qquad (2.19)$$

где $\mu = \text{const}$ называется ***коэффициентом трения скольжения***, а $F_{\text{тр.}}$ - ***силой трения скольжения***. Величина μ существенным образом зависит от многих факторов, таких, как свойства контактирующих материалов, обработки поверхностей, их чистоты и т.д.

При изменении направления внешней силы на противоположное, сила трения также меняет свое направление на противоположное. Поэтому сила трения всегда направлена в сторону, противоположную относительному движению или попытке вызвать такое движение.

Контактные силы имеют электромагнитную природу и обусловлены взаимодействием частиц, находящихся в приповерхностных слоях контактирующих тел.

При движении тела в жидкости или газе возникает ***сила сопротивления***, направленная в сторону, противоположную относительному движению, и при малых скоростях пропорциональная этой скорости, то есть

$$\vec{F} = -k\vec{\upsilon}\,. \qquad (2.20)$$

Коэффициент k в (2.20) зависит от вязкости жидкости и размеров тела. Соотношение (2.20) справедливо, если жидкост обтекает тело слоисто, без завихрений.

Выводы: ***В классической механике все силы имеют либ гравитационную, либо электромагнитную природ Проявлением этих сил являются сила тяжести, ве тела, силы упругости, силы трения и сопротивления, т.д.***

Контрольные вопросы.

2.2. Определите, в каком количественном соотношении должн находиться массы и заряды двух совершенно одинаковых частиц, чтоб гравитационное притяжение уравновешивалось кулоновски отталкиванием?

2.3. Покажите, что на материальную точку, подвешенную н нерастяжимой нити, при ее малом отклонении от положени равновесия, действует результирующая сил тяжести и натяжени которая имеет квазиупругий характер.

2.4. Определите зависимость силы трения, действующей н брусок, находящейся на наклонной плоскости, от ее угла наклон (считайте коэффициент трения скольжения известным).

2.4. Движение материальной точки в однородном силовом пол

Силовым полем называется пространство, в каждой точ которого на помещенную в нее материальную точку действу

некоторая сила. В общем случае эта сила зависит от положения материальной точки в силовом поле и от времени, т.е.

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)\,.$$

Если сила не зависит явно от времени, то силовое поле называется ***стационарным***. Если сила, действующая со стороны силового поля на материальную точку, не зависит от положения материальной точки в силовом поле, то такое силовое поле называется ***однородным***. Отметим, что однородное силовое поле является стационарным. В таком поле

$$\vec{F} = \vec{F}_0 = const\,. \qquad (2.21)$$

Рассмотрим движение материальной точки в однородном силовом поле.

На основании второго закона Ньютона (2.8) (в системе единиц СИ k=1) имеем:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_0}{m} = \vec{a}_0\,, \qquad (2.22)$$

где $\vec{a}_0$ в силу условия (2.21) - постоянное по величине и направлению ускорение материальной точки.

Пусть в некоторый момент времени t_0, условно принятый за начальный, материальная точка имела относительно выбранной инерциальной системы отсчета скорость $\vec{\upsilon}_0$. Удобно в этом случае оси координат ориентировать, используя направления $\vec{a}_0$ и $\vec{\upsilon}_0$. Направим ось OY вдоль вектора $\vec{a}_0$, а плоскость XOY совместим с плоскостью, в которой лежат векторы $\vec{a}_0$ и $\vec{\upsilon}_0$ (рис. 2.5).

При таком выборе системы координат

$$\begin{cases} \vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + 0\cdot\vec{k}, \\ \vec{\upsilon}_0 = \upsilon_{ox}\vec{i} + \upsilon_{oy}\vec{j} + 0\cdot\vec{k}, \\ \vec{a}_0 = 0\cdot\vec{i} + a_0\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k}, \\ \vec{F}_0 = 0\cdot\vec{i} + F_0\vec{j} + 0\cdot\vec{k}. \end{cases} \qquad (2.23)$$

Используя определение ускорения $(\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt})$, для приращения скорости за время dt получим

$$d\vec{\upsilon} = \vec{a}_0 dt.$$

Интегрируя последнее соотношение

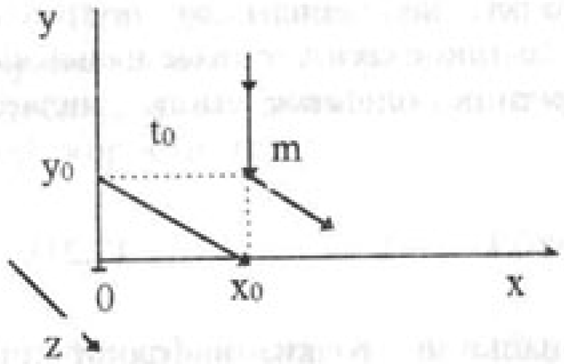


Рис. 2.5

$$\int_{\vec{\upsilon}_0}^{\vec{\upsilon}} d\vec{\upsilon} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}_0 dt,$$

будем иметь

$$\vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0 = \vec{a}_0(t - t_0)$$

или

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}_0(t - t_0). \qquad (2.24)$$

Из определения скорости материальной точки (1.5) элементарный вектор перемещения $d\vec{r}$ за время dt равен $d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt$. Поэтому с учетом (2.24) и интегрирования

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} [\vec{\upsilon}_0 + \vec{a}_0(t - t_0)]\, dt$$

получим

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0(t - t_0) + \frac{\vec{a}_0(t - t_0)^2}{2}. \qquad (2.25)$$

Движение материальной точки в однородном силовом поле полностью описывается кинематическим уравнением движения (2.25) и зависимостью скорости $\vec{\upsilon}$ от времени t (2.24). Эти уравнения в выбранной системе координат с учетом (2.23), соответственно, примут вид

$$\begin{cases} x = x_0 + \upsilon_{ox}(t - t_0), \\ y = y_0 + \upsilon_{oy}(t - t_0) + \frac{a_0}{2}(t - t_0)^2, \\ z = 0. \end{cases} \qquad (2.26)$$

Из уравнений (2.26) и (2.27) видно, что движение материальной точки происходит в одной плоскости XOY и по характеру вдоль оси OX

$$\begin{cases} \upsilon_x = \upsilon_{ox}, \\ \upsilon_y = \upsilon_{oy} + a_0(t - t_0), \\ \upsilon_z = 0 \end{cases} \qquad (2.27)$$

является равномерным ($\upsilon_x = \upsilon_{ox} = const$), вдоль оси OY - равнопеременным.

Из уравнений (2.26) можно получить уравнение траектории материальной точки. Для этого исключим из них время t:

$$y = y_0 + \frac{\upsilon_{oy}}{\upsilon_{ox}}(x - x_0) + \frac{a_0}{2\upsilon^2_{ox}}(x - x_0)^2. \qquad (2.28)$$

Полученное выражение представляет собой уравнение параболы. Реальное движение, естественно, ограничено во времени и в пространстве, поэтому физический смысл имеет только конкретный участок параболы (2.28).

Примерами движения материальной точки в однородном силовом поле являются:

- движение частицы вблизи поверхности Земли под действием силы тяжести ($h << R_З$). В этом случае $\vec{a}_0 = \vec{g}$;
- движение заряженной частицы в однородном электростатическом поле. В этом случае $\vec{a}_0 = \frac{q\vec{E}}{m}$.

Выводы: ***В однородном силовом поле материальная точка движется с постоянным ускорением. Траекторией движения точки является ветвь параболы.***

3. Законы сохранения в механике

3.1. Интегралы движения и законы сохранения

Часто встречаются ситуации, когда описание движения с помощью уравнений движения Ньютона является настолько сложным, что их точное решение либо очень громоздко, либо его вообще невозможно представить с помощью известных функций. В этих случаях анализ характера и свойств движения крайне затруднителен.

Однако существуют физические величины, характеризующие механическое состояние рассматриваемой системы, которые в процессе движения остаются ***постоянными*** (сохраняются). Такие величины, зависящие от параметров механического состояния системы, то есть от координат и времени, называются ***интегралами движения***. Поэтому интегралы движения являются функциями состояния системы.

Особую роль в механике играют те интегралы движения, которые обладают свойством **аддитивности. Аддитивной *называется физическая величина, характеризующая систему как целое и равная сумме такого же рода величин, характеризующих отдельные части этой системы.*** Таких интегралов три. Число аддитивных интегралов движения непосредственно связано с фундаментальными свойствами пространства и времени, в которых происходят механические формы движения. Эти свойства таковы:

- **Однородность пространства** означает, что свойства пространства во всех его точках одинаковы. То есть выбор начала системы отсчета не влияет на протекание и характер механических явлений. Этим свойством пространства обусловлено существование интеграла, который называется ***импульсом механической системы***. Условие сохраняемости импульса системы в механике называется ***законом сохранения импульса.***

- ***Изотропность пространства*** означает, что все направления в пространстве эквивалентны, то есть ориентация осей координат не влияет на механические процессы. Величина, постоянство которой обусловлено этим свойством пространства, называется ***моментом импульса механической системы***, а соответствующий закон, устанавливающий условия сохраняемости этой величины, называется ***законом сохранения момента импульса.***

- ***Однородность времени*** означает, что все моменты времени физически равнозначны. Другими словами, протекание механических явлений не зависит от выбора начального момента времени.

С однородностью времени связано существование третьего аддитивного интеграла - ***энергии системы***. Условия, определяющие постоянство энергии в механике, называются ***законом сохранения механической энергии***.

Знание аддитивных интегралов позволяет получить важную информацию о характере механического движения без решения уравнений движения даже в тех случаях, когда силы, действующие на механическую систему, неизвестны.

Целью последующего изложения является поиск аддитивных интегралов движения и анализ важнейших следствий, вытекающих из их существования.

Выводы: ***Поведение механической системы удобно анализировать с помощью аддитивных интегралов движения: импульса, момента импульса и энергии системы. Законы сохранения этих величин обусловлены фундаментальными свойствами пространства (однородность и изотропность) и времени (однородность).***

3.2. Закон сохранения импульса и его векторный характер

Рассмотрим произвольную систему, состоящую из N попарно взаимодействующих материальных точек. Введем обозначение для силы, действующей на материальную точку с номером i со стороны точки с номером k - $\vec{f}_{ik}$. Кроме сил взаимодействия, которые являются внутренними, на каждую материальную точку могут действовать силы со стороны объектов, не входящих в данную систему. Результирующую внешнюю силы, действующую на материальную точку с номером i, обозначим $\vec{F}_i$.

Движение каждой из материальных точек системы можно описать на основании второго закона Ньютона:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \ldots + \vec{f}_{1N};$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 + \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \ldots + \vec{f}_{2N};$$

$$\vdots$$

$$\frac{d\vec{p}_N}{dt} = \vec{F}_N + \vec{f}_{N2} + \vec{f}_{N3} + \ldots + \vec{f}_{N,N-1}.$$

Сложим, соответственно, левые и правые части этих уравнений движения. В силу парности взаимодействия частиц системы и на основании третьего закона Ньютона $\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki}$. Поэтому

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt}+\frac{d\vec{p}_2}{dt}+\ldots+\frac{d\vec{p}_N}{dt}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots+\vec{F}_N$$

или

$$\frac{d(\vec{p}_1+\vec{p}_2+\ldots+\vec{p}_N)}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i. \qquad (3.1)$$

Определение: **Импульсом системы материальных точек $\vec{P}$ называется векторная сумма импульсов $\vec{p}_i$ всех материальных точек системы, то есть**

$$\vec{P}=\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i. \qquad (3.2)$$

Из определения импульса системы частиц следует, что эта величина является векторной и обладает свойством аддитивности.

Соотношение (3.1) с учетом определения (3.2) примет вид

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i. \qquad (3.3)$$

Из этого соотношения непосредственно следуют важнейшие следствия:

- Импульс системы материальных точек, как целого, может измениться только в результате действия внешних сил. Отсутствие или наличие взаимодействия между частицами системы и его характер не влияет на движение системы как целого.

- Скорость изменения импульса системы равна ***векторной*** сумме внешних сил, действующих на материальные точки системы.

- Если на систему частиц не действуют внешние силы, то есть все $\vec{F}_i=0$ (замкнутая система), или сумма внешних сил равна нулю, то импульс системы частиц остается постоянным, независимо от характера взаимодействия частиц системы между собой

$$\vec{P}=\vec{p}_1+\vec{p}_2+\ldots+\vec{p}_N=const. \qquad (3.4)$$

Последнее следствие носит название ***закона сохранения импульса***. Несмотря на то, что обоснование закона сохранения импульса получено

на основании классических законов Ньютона, обладающих ограниченной областью применения, утверждение, что ***импульс изолированной системы есть величина постоянная***, является ***фундаментальным законом природы***. Он справедлив как в релятивистской, так и в квантовой механике, хотя понятия импульса и меры взаимодействия там имеют другое содержание.

Иногда при решении практических задач классической динамики систем материальных точек встречаются случаи, когда существует такое направление (например OX), вдоль которого алгебраическая сумма проекций внешних сил равна нулю. Тогда непосредственно из (3.3) следует, что вдоль этого направления сохраняется алгебраическая сумма проекций импульсов системы частиц, то есть

$$P_x=p_{1x}+p_{2x}+\ldots+p_{Nx}.$$

Часто для описания движения системы, как целого, удобно использовать понятие центра инерции (центра масс).

Центром инерции (центром масс) системы материальных точек называется особая точка, положение которой определяется радиус - вектором:

$$\vec{R}_{\text{ц.м.}}=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2+\ldots+m_N\vec{r}_N}{m_1+m_2+\ldots+m_N}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}m_i\vec{r}_i}{m}. \qquad (3.5)$$

Если при движении частиц системы их массы остаются постоянными, то скорость центра масс определяется соотношениями:

$$\vec{U}_{\text{ц.м.}}=\frac{d\vec{R}_{\text{ц.м.}}}{dt}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}m_i\vec{\upsilon}_i}{m}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}\vec{p}_i}{m}.$$

Последнему из этих равенств можно придать следующий вид, учитывая (3.2):

$$m\vec{U}_{\text{ц.м.}}=\vec{P}. \qquad (3.6)$$

Таким образом, ***импульс системы частиц, как целого, определяется общей массой системы и скоростью ее центра масс.***

Другими словами, импульс системы равен импульсу материальной точки, масса которой равна общей массе системы, а скорость равна скорости центра масс системы.

С помощью (3.6) уравнение движения системы точек (3.3), как целого, можно записать в виде

$$m\frac{d\vec{U}_{ц.м.}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i . \qquad (3.7)$$

Последнее равенство означает, что ***центр масс системы движется как материальная точка с массой, равной массе всей системы, к которой приложена сила, равная векторной сумме внешних сил, действующих на материальные точки системы.***

В частности, для замкнутой системы центр ее масс либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно.

Понятие центра масс особо полезно при описании поступательного движения твердого тела.

Действительно, поскольку твердое является частным случаем системы взаимодействующих между собой частиц, которые, согласно п.п. 1.2. и 1.5, при поступательном движении движутся одинаково, то достаточно описать с помощью (3.6) и (3.7) движение центра масс твердого тела. При этом необходимо считать, что масса m твердого тела сосредоточена в центре масс, к которому приложена равнодействующая всех внешних сил, действующих на это тело.

Часто взаимодействие материальных точек носит характер ***удара***, когда время взаимодействия очень мало. Обычно в таких ситуациях изменение импульсов материальных точек, вызванное таким взаимодействием, значительно превышает изменение импульсов за счет действия внешних сил во время удара. В этом случае соударяющиеся частицы можно с высокой степенью точности считать замкнутой системой и за время удара применять закон сохранения импульса.

Предельными случаями ударов являются ***абсолютно упругий*** и ***абсолютно неупругий*** удары. Результаты подобных ударов обсуждаются ниже (см. п.3.8.2).

Замечание: В соотношениях (3.3) и (3.7) векторную сумму внешних сил нельзя понимать, вообще говоря, как равнодействующую силу, так как эти силы действуют на разные материальные точки системы.

Вывод: ***Закон сохранения импульса является фундаментальным законом природы и содержит в себе утверждение : Независимо от характера взаимодействия между частицами изолированной системы векторная сумма импульсов частиц системы остается постоянной.***

Контрольные вопросы.

3.1. Может ли сохраняться импульс незамкнутой системы частиц?

3.2. Могут ли тела в замкнутой системе в результате взаимодействия остановиться? Приведите пример такого взаимодействия.

3.3. В чем проявляется сходство и различие соотношений (3.3) и (3.7) со вторым законом Ньютона?

3.4. Существуют ли случаи, когда сумму внешних сил в (3.3) можно считать равнодействующей силой? Если да, то приведите пример.

3.3. Механическая работа

Понятие механической силы как количественной меры механического взаимодействия объектов не является универсальным. Оно не применимо, вообще говоря, при описании немеханических форм движения. Более общей количественной характеристикой взаимодействия, позволяющей проследить переходы от одних форм движения к другим, является ***энергия взаимодействия***. Как будет показано ниже, количественной мерой изменения механических видов энергии является физическая величина, называемая ***механической работой***, или ***работой силы***.

При действии на материальную точку некоторой силы $\vec{F}$, вызывающей элементарное перемещение этой материальной точки $d\vec{r}$, совершается механическая работа, равная скалярному произведению вектора силы $\vec{F}$ на $d\vec{r}$, то есть

$$\delta A = (\vec{F}\cdot d\vec{r}) = F\cdot dr\cdot\cos\alpha . \qquad (3.8)$$

Определению элементарной работы (3.8) можно придать другие формы:

$$\delta A = F_r dr = F dr_F . \qquad (3.9)$$

Соотношения (3.8) и (3.9) иллюстрируются рис.3.1, а, б, из

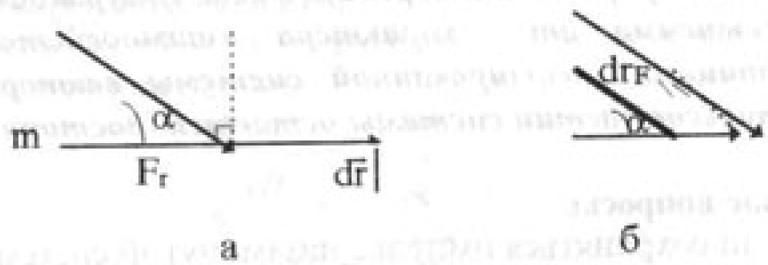


Рис. 3.1

которого очевидны введенные обозначения.

В координатной форме (3.8) имеет вид

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \qquad (3.10)$$

В системе единиц СИ единицей работы является Джоуль (Дж): 1Дж = 1Н 1м.

Рассмотрим некоторые свойства механической работы (рис. 3.1).

1) Если угол α между $\vec{F}$ и $d\vec{r}$ имеет значения в интервале $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, то работа силы $\vec{F}$ положительна ($\delta A > 0$).

2) Если $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$, то работа $\delta A < 0$ - отрицательна.

3) Если $\alpha = \pm\dfrac{\pi}{2}$, то $\delta A = 0$. Это тривиальный, но очень важный случай: ***сила, перпендикулярная перемещению, механической работы не совершает.***

Следовательно, составляющая силы $\vec{F}$, перпендикулярная перемещению $d\vec{r}$, работы не совершает.

Рис. 3.2

Отметим здесь, что таким свойством обладает магнитная составляющая силы Лоренца (2.17).

4) Механическая работа силы на конечном участке траектории 1-2 (рис. 3.2) равна *алгебраической* сумме элементарных работ.

$$A_{12} = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 (\vec{F} d\vec{r}) = \int_1^2 F_r dr. \qquad (3.11)$$

Интеграл в (3.11) следует понимать не как обычный определенный интеграл, а как интеграл по траектории движения материальной точки. Это следует из того очевидного факта, что работа произвольной силы, вообще говоря, существенным образом зависит от формы траектории движения материальной точки.

5) Если на материальную точку действуют несколько сил $\vec{F}_1, ..., \vec{F}_n$, то работа результирующей силы $\vec{F}$ равна алгебраической сумме работ каждой из этих сил в отдельности:

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F} d\vec{r}) = \int_1^2 \left((\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n) d\vec{r}\right) = \int_1^2 (\vec{F}_1 d\vec{r}) + \int_1^2 (\vec{F}_2 d\vec{r}) +$$

$$+ \int_1^2 (\vec{F}_n d\vec{r}) = A_1 + A_2 ... + A_n.$$

Это свойство непосредственно следует из принципа независимости действия сил.

6) Механическая работа имеет простой графический смысл (рис. 3.3):

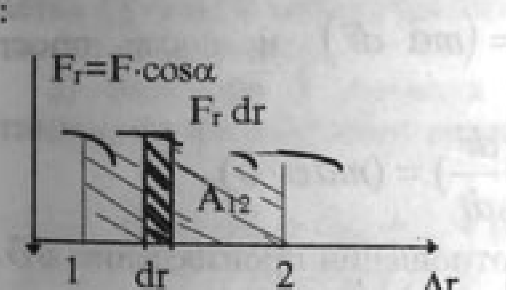


Рис. 3.3

величина работы ***численно*** равна площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком проекции силы на перемещение, осью перемещений, начальным и конечным значениями перемещения.

Величина, равная работе силы, совершаемой в единицу времени, называется ***мощностью***, другими словами, мощность характеризует скорость совершения работы. Если за элементарный промежуток времени dt совершается работа δA, то мощность равна

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{(\vec{F} d\vec{r})}{dt} = (\vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt}) = \vec{F}\vec{\upsilon}. \qquad (3.12)$$

Таким образом, мощность - это величина, равная скалярному произведению вектора силы на вектор скорости материальной точки.

В системе СИ единица мощности называется Ватт (Вт).
1Вт = 1Дж/1с = 1Дж/с.

Вывод: ***Механической работой называется величина, равна значению криволинейного интеграла от скалярного произведения вектора силы на вектор элементарного перемещения. Интеграл вычисляется вдоль траектории движения точки.***

Контрольные вопросы.

3.5. Как вычислить работу постоянной по величине направлению силы при произвольном виде траектории?

3.6. Чему равна работа силы, вызывающей равномерно вращательное движение материальной точки?

3.4. *Кинетическая энергия*

Рассмотрим случай, когда на материальную точку действует одн единственная произвольная сила $\vec{F}$. Элементарная работа такой сил согласно (3.8) равна $\delta A = (\vec{F} \cdot d\vec{r})$.

Произведем в этом равенстве замену силы на основании второг закона Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$: $\delta A = (m\vec{a} \cdot d\vec{r})$ и после просты преобразований получим

$$\delta A = (m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}d\vec{r}) = (md\vec{\upsilon}\frac{d\vec{r}}{dt}) = (md\vec{\upsilon} \cdot \vec{\upsilon}).$$

Легко видеть, что в последнем соотношении произведение $d\vec{\upsilon} \cdot \vec{\upsilon}$ можно представить в виде $d(\upsilon^2/2)$. Действительно, пр дифференцировании этого выражения имеем

$$d(\upsilon^2/2) = d(\vec{\upsilon}^2/2) = \vec{\upsilon} \cdot d\vec{\upsilon}.$$

Теперь для элементарной работы силы F с учетом постоянств массы материальной точки m получим равенство

$$\delta A = d(\frac{m\vec{\upsilon}^2}{2}). \qquad (3.13)$$

Работа произвольной силы при конечном перемещени материальной точки равна приращению величины $m\upsilon^2/2$:

$$A_{12} = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 d(\frac{m\upsilon^2}{2}) = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2}. \qquad (3.14)$$

Здесь получен очень важный результат, из которого следует, что ***работу произвольной силы можно вычислить, не зная ни характера силы, ни вида траектории частицы. Для этого необходима только информация о значениях скорости частицы в начале υ_1 и в конце υ_2 рассматриваемого участка движения.***

Величина

$$T = m\upsilon^2/2 = p^2/2m \qquad (3.15)$$

называется ***кинетической энергией материальной точки.*** В связи с этим на основании равенства (3.14) можно сделать заключение, что механическая работа произвольной силы является количественной мерой приращения кинетической энергии материальной точки, то есть

$$A_{12} = T_2 - T_1. \qquad (3.16)$$

Обсудим некоторые важные свойства кинетической энергии:

1) Непосредственно из (3.15) следует, что кинетическая энергия является функцией механического состояния частицы, так как T зависит только от ее скорости.

2) Величина T является аддитивной. Действительно, если на частицы системы действуют различные силы, то работа этих сил равна

$$\delta A = \delta A_1 + \delta A_2 + ... + \delta A_N = dT_1 + dT_2 + ... + dT_N = d(T_1 + T_2 + ... + T_N) = dT,$$

где

$$T = T_1 + T_2 + ... + T_N = \frac{m\upsilon_1^2}{2} + \frac{m\upsilon_2^2}{2} + ... + \frac{m\upsilon_N^2}{2}$$

- кинетическая энергия системы частиц. В этом случае работа всех сил, действующих на частицы системы, равна приращению общей кинетической энергии системы материальных точек:

$$A = \Delta T.$$

Вывод: ***Работа произвольных сил в общем случае приводит к изменению кинетической энергии системы.***

3.5. Потенциальная энергия и ее связь с силой

Особую роль в механике играют силы, которые называются ***потенциальными*** или ***консервативными*** силами, и соответствующие им силовые поля.

Потенциальной называется сила, работа которой не зависит от формы траектории, а определяется только положением начальной и конечной точек перемещения; то есть работа силы по перемещению материальной точки из положения 1 в положение 2 по пути I ($A_{1,I,2}$) равна работе по перемещению по любому другому пути II между теми же положениями ($A_{1,II,2}$), то есть $A_{1,I,2} = A_{1,II,2}$.

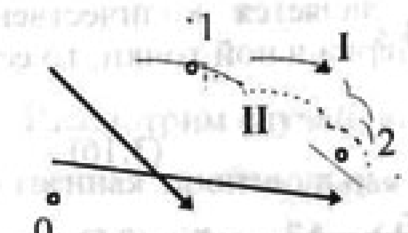


Рис. 3.4

В соответствии с этим определением работа потенциальной силы $A_{12} = \int_1^2 (\vec F d\vec r)$ должна зависеть только от $\vec r_1$ и $\vec r_2$ - радиус - векторов начального и конечного положений материальной точки в потенциальном силовом поле.

Заметим, что в этом случае интеграл $\int_1^2 (\vec F d\vec r)$ из криволинейного становится определенным. Поэтому его значение, а значит и величина работы могут быть представлены с помощью функции $U(\vec r)$, такой, что $(\vec F d\vec r) = -dU$, в виде

$$A_{12} = \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} (\vec F d\vec r) = -\int_{\vec r_1}^{\vec r_2} dU(\vec r) = U(\vec r_1) - U(\vec r_2), \qquad (3.17)$$

где функция положения материальной точки в силовом поле $U(\vec r)$ называется ***потенциальной энергией*** частицы в потенциальном силовом поле. Отметим, что потенциальная энергия частицы - скалярная величина.

Таким образом, ***работа потенциальной силы является количественной мерой убыли потенциальной энергии частицы в потенциальном силовом поле.***

$$A_{12} = U_1 - U_2 = -\Delta U. \qquad (3.18)$$

Потенциальная энергия обладает следующими свойствами:

1) Потенциальная энергия является функцией состояния материальной точки, так как она зависит только от положения частицы;

2) Величина U является аддитивной, то есть если в области движения частицы имеется несколько потенциальных силовых полей, то полная потенциальная энергия частицы равна сумме потенциальных энергий ее в каждом из полей в отдельности:

$$U(\vec r) = U_1(\vec r) + U_2(\vec r) + ... + U_n(\vec r);$$

3) Потенциальная энергия частицы определена с точностью до произвольной постоянной величины.

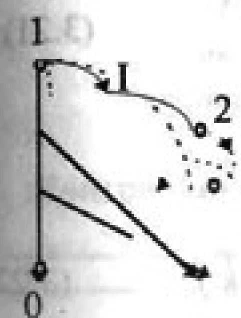


Рис. 3.5

Действительно, из рис. 3.5 видно, что работа при перемещении из положения 1 в положение 2 по пути I равна в соответствии с (3.16)

$$A_{12} = U_1(\vec r_1) - U_2(\vec r_2). \qquad (3.19)$$

С другой стороны, если из положения 1 в положение 2 частицу перемещать по другой траектории, проходящей через какую - либо точку поля O', то

$$\begin{aligned} A_{12} &= A_{1,0} + A_{0,2} = \\ &= (U_1(\vec r_1) - U_0(\vec r_0)) + (U_0(\vec r_0) - U_2(\vec r_2)) = \qquad (3.20) \\ &= (U_1(\vec r_1) + U_0(\vec r_0)) - (U_0(\vec r_0) + U_2(\vec r_2)). \end{aligned}$$

Сравнение (3.19) и (3.20) доказывает указанное свойство. Следует отметить, что физически это свойство потенциальной энергии связано с тем фактом, что при перемещении частицы в потенциальном поле работа сил этого поля определяется не самим значением потенциальной энергии, а ее убылью. Это свойство позволяет для однозначности определения потенциальной энергии выбирать ее нулевое значение в произвольной точке силового поля.

Покажем теперь, что между потенциальной энергией частицы и силой, действующей на нее в потенциальном поле, существует определенная универсальная зависимость.

Из (3.17) видно, что элементарная работа в потенциальном поле определяется равенством

$$\delta A = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = -dU(\vec{r}) = -dU(x, y, z),$$

которое с учетом (3.10) может быть записано в виде

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz).$$

Сравнивая левую и правую части, получим

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}, \qquad (3.21)$$

или в векторной форме

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k} = -(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}). \qquad (3.22)$$

Последнее соотношение обычно записывают в одной из символических форм:

$$\vec{F} = -\nabla U = -gradU = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}. \qquad (3.23)$$

В математике вектор с проекциями $\frac{\partial a}{\partial x}; \frac{\partial a}{\partial y}; \frac{\partial a}{\partial z}$ называется градиентом скалярной функции $a = a(x, y, z)$, который по модулю равен максимальной скорости ***возрастания*** скалярной функции $a(x, y, z)$ и направлен в сторону максимальной скорости возрастания этой функции.

В (3.23) символами ∇ (набла), grad (градиент), $\partial / \partial\vec{r}$ обозначен векторный дифференциальный ***оператор***, который в декартовой системе координат имеет вид

$$\nabla = grad = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \qquad (3.24)$$

и действует на функцию, стоящую справа от него.

Таким образом, равенство (3.23) означает, что ***сила, действующая на материальную точку в потенциальном поле, равна по величине максимальной скорости возрастания потенциальной энергии в данной точке поля и направлена в сторону наискорейшего убывания потенциальной энергии.***

Выводы: ***Работа по перемещению материальной точки в потенциальном силовом поле не зависит от формы пути и равна убыли потенциальной энергии частицы при данном перемещении.***

Сила, действующая на частицу в потенциальном силовом поле, равна градиенту потенциальной энергии частицы в этом поле, взятому с противоположным знаком.

Контрольные вопросы.

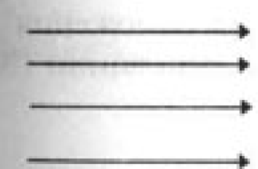


Рис. 3.6

3.7. Чему равна работа по перемещению частицы по замкнутому пути в потенциальном поле? Может ли быть такой же результат в не потенциальных силовых полях?

3.8. Является ли потенциальным поле, силовые линии которого изображены на рис. 3.6, и почему?

3.6. Примеры потенциальных силовых полей и их характеристики

Рассмотрим некоторые конкретные виды потенциальных силовых полей.

3.6.1. Центрально - симметричное силовое поле

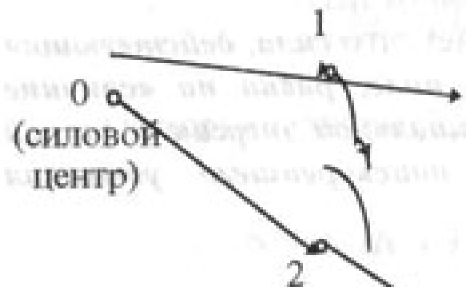


Рис. 3.7

Центрально - симметричным силовым полем называется такое поле, в котором на материальную точку действует ***центральная*** сила, величина которой зависит только от расстояния от некоторого ***силового центра***, направленная по прямой, соединяющей частицу с этим силовым центром (рис. 3.7).

Таким образом, центральная сила может быть представлена в виде

$$\vec{F}(r) = F(r)\cdot\frac{\vec{r}}{r}. \qquad (3.25)$$

Работа такой силы при перемещении частицы из положения 1 в положение 2 по некоторой траектории может быть на основании (3.11) представлена в виде

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F}d\vec{r}) = \int_1^2 \frac{F(r)}{r}(\vec{r}d\vec{r}).$$

Используя равенство $(\vec{r}d\vec{r}) = \frac{1}{2}d(\vec{r}\cdot\vec{r}) = \frac{1}{2}d(r^2) = rdr$, получим

$A_{12} = \int_{r_2}^{r_1} F(r)dr$, то есть обычный определенный интеграл, значение которого всегда может быть записано в форме

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F}d\vec{r}) = \left(-U(r_2) - \left(-U(r_1)\right)\right), \qquad (3.26)$$

где функция $U(r)$ является первообразной функции $F(r)$.

Выводы: ***Результат (3.26) означает, что любое центрально-симметричное поле является потенциальным, так как работа в таком поле не зависит от формы траектории.***

3.6.2. Поле сил тяготения и кулоновское силовое поле

Как видно из (2.11) и (2.16), силы гравитационного притяжения и кулоновского взаимодействия являются центральными, а поэтому соответствующие силовые поля потенциальны.

Формулам (2.11) и (2.16) можно придать единый вид

$$\vec{F}(r) = \frac{\alpha}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}, \qquad (3.27)$$

где

$$\alpha = \begin{cases} -\gamma m_1 m_2 - \textit{для гравитационного притяжения}, \\ -kq_1 q_2 - \textit{для кулоновского взаимодействия}. \end{cases}$$

Работа силы (3.27) легко вычисляется:

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \left(\vec{F}(r)d\vec{r}\right) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\alpha}{r^2}dr = \frac{\alpha}{r_1} - \frac{\alpha}{r_2}. \qquad (3.28)$$

Отсюда следует, что потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух материальных точек

$$U_{\text{гр.}} = -\gamma\frac{m_1 m_2}{r}, \qquad (3.29)$$

а потенциальная энергия кулоновского взаимодействия двух точечных зарядов

$$U_{кул.} = k\frac{q_1q_2}{r}. \qquad (3.30)$$

Из (3.29) и (3.30) видно, что нулевое значение потенциальной энергии в обоих случаях соответствует бесконечно удаленным друг от друга частицам.

Поскольку гравитационное и кулоновское взаимодействие точечных объектов осуществляется посредством силовых полей, то удобно ввести понятие ***потенциала силового поля***.

Рассмотрим это понятие на примере кулоновского поля. Если электростатическое поле создано неподвижным точечным зарядом q, и в это поле поместить другой точечный заряд q_0 (пробный заряд), то заряд q_0 в поле заряда q будет обладать потенциальной энергией $U = k\frac{qq_0}{r}$.

Отношение

$$\varphi = \frac{U}{q_0} = k\frac{q}{r} \qquad (3.31)$$

не зависит от свойств пробного заряда, поэтому характеризует кулоновское (электростатическое) поле заряда q и называется ***потенциалом*** поля точечного заряда.

В силу аддитивности потенциальной энергии потенциал поля φ, созданного системой точечных зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов φ_i, созданных в данной точке каждым из зарядов системы в отдельности, то есть

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_n = \sum_{i-1}^{n}\varphi_i. \qquad (3.32)$$

Последнее соотношение является одним из математических выражений ***принципа суперпозиции*** для электростатического поля.

Используя понятие потенциала, работу по перемещению точечного заряда q в электростатическом поле можно представить в виде

$$A_{12} = U_1 - U_2 = q\varphi_1 - q\varphi_2 = q(\varphi_1 - \varphi_2), \qquad (3.33)$$

то есть работа сил электростатического поля по перемещению точечного заряда равна произведению заряда на разность потенциалов в ***начальной*** и ***конечной*** точках перемещения.

Отметим здесь, что аналогично можно ввести понятие потенциала гравитационного поля с соответствующими результатами.

Вывод: ***Кулоновское (электростатическое) и гравитационное силовые поля являются потенциальными и могут характеризоваться соответствующими потенциалами.***

3.6.3. Поле силы тяжести

Рассмотрим перемещение материальной точки между двумя произвольными положениями 1 и 2 в поле силы тяжести (2.13).

Как видно из рис. 3.8, работа силы тяжести

$$A_{12} = \int_1^2(\vec{F}d\vec{r}) = \int_1^2 Fdr_F = -\int_{y_1}^{y_2} mg\cdot dy = mgy_1 - mgy_2,$$

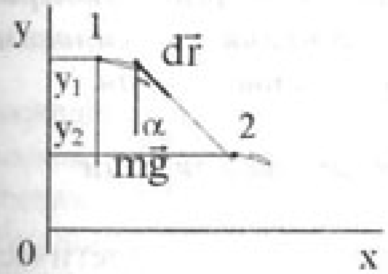


Рис. 3.8

где y_1 и y_2 - высота начального и конечного положений над выбранным началом системы координат. Следовательно, потенциальная энергия материальной точки в поле силы тяжести определяется соотношением

$$U = mgy. \qquad (3.34)$$

В частности, если начало координат выбрать на поверхности Земли, то y=h - высота частицы над поверхностью Земли, и формула для потенциальной энергии принимает привычный вид:

$$U = mgh. \qquad (3.35)$$

3.6.4. Поле упругих сил

Пусть на материальную точку при смещении ее из некоторого

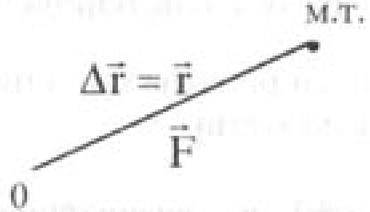


Рис. 3.9

положения, принятого за начало отсчета, действует упругая сила, при этом (рис. 3.9) смещение частицы $\Delta\vec{r} = \vec{r}$, а формула (2.18) примет вид $\vec{F} = -k\vec{r}$.

Работа этой силы может быть легко определена:

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F}d\vec{r}) = -k\int_{r_1}^{r_2} (\vec{r}d\vec{r}) = \frac{kr_1^2}{2} - \frac{kr_2^2}{2}.$$

Таким образом, упругая сила является потенциальной. Поэтому потенциальная энергия частицы в поле упругих (квазиупругих) сил определяется соотношением

$$U = kr^2/2, \qquad (3.36)$$

где r - расстояние частицы от той точки поля, в которой $F_{упр}=0$.

Вывод: ***Конкретный вид потенциальной энергии материальной точки как функции ее положения в силовом поле определяется характером этого силового поля.***

3.7. Закон сохранения механической энергии

Механической энергией называется сумма кинетической и потенциальной энергии системы частиц, то есть

$$E = T+U. \qquad (3.37)$$

Полная механическая энергия является аддитивной функцией механического состояния системы частиц, что непосредственно следует из свойств кинетической и потенциальной энергии,

Покажем, что в потенциальных силовых полях эта сумма при движении одной материальной точки остается постоянной.

Рассмотрим ситуацию, когда на частицу действуют одновременно несколько сил, среди которых есть как потенциальные, так и непотенциальные силы. В этом случае результирующую $\vec{F}$ всех сил

можно представить как сумму результирующей потенциальных сил $\vec{F}_{пот}$ и результирующей непотенциальных сил $\vec{F}_{нпот.}$:

$$\vec{F} = \vec{F}_{пот} + \vec{F}_{нпот.}$$

Механическая работа силы $\vec{F}$ при перемещении частицы

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F}d\vec{r}) = \int_1^2 (\vec{F}_{пот}d\vec{r}) + \int_1^2 (\vec{F}_{нпот}d\vec{r})$$

на основании (3.16) и (3.18) может быть записана в виде

$$T_2 - T_1 = -(U_2 - U_1) + \int_1^2 (\vec{F}_{нпот}d\vec{r})$$

или $(T_2 + U_2) - (T_1 + U_1) = A_{нпот}$.

Если учесть определение (3.27), то окончательно получим

$$E_2 - E_1 = A_{нпот}. \qquad (3.38)$$

Последнее соотношение называется ***законом превращения полной механической энергии частицы.*** Из него следует, что полная механическая энергия частицы может изменяться только за счет работы непотенциальных сил. С другой стороны, (3.38) означает, что работа непотенциальных сил является количественной мерой изменения полной механической энергии частицы.

Из закона (3.38) непосредственно следует ***закон сохранения полной механической энергии одной частицы:***

Если на частицу действуют только потенциальные силы, то ее полная механическая энергия сохраняется, то есть при

$$\vec{F}_{нпот} = 0 \Rightarrow A_{нпот} = 0, \text{ поэтому } E=\text{const}. \qquad (3.39)$$

Законы (3.38) и (3.39) легко обобщаются на систему материальных точек. В этом случае механическая энергия включает в себя кинетическую энергию частиц системы, потенциальную энергию взаимодействия частиц между собой $U_{вз}$, а также потенциальную энергию системы во внешних потенциальных силовых полях $U_{внеш.}$:

$$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2} + U_{вз.} + U_{внеш.}. \qquad (3.40)$$

В этом общем случае закон сохранения полной механической энергии звучит так.

Полная механическая энергия системы частиц сохраняется, если на частицы системы действуют только потенциальные силы, как внутренние, так и внешние.

В тех случаях, когда на частицы системы действуют непотенциальные силы, полная механическая энергия не сохраняется, поэтому закон сохранения механической энергии не выполняется. Механическая энергия при этом переходит в другие виды энергии в равном количестве. Другими словами, ни в каких ситуациях энергия не возникает и не исчезает, она переходит из одного вида в другой.

3.8. Примеры применения законов сохранения механической энергии и импульса

3.8.1. Движение частицы в потенциальном силовом поле

В механике часто встречаются задачи, в которых рассматривается движение одной частицы в потенциальном силовом поле. При этом потенциальная энергия частицы зависит от ее положения в поле $U(\vec{r}) = U(x,y,z)$. Если изображать на графике зависимость потенциальной энергии от одной переменной, например от x, считая другие постоянными, то эта зависимость называется ***потенциальной кривой***. Информация о виде потенциальной кривой позволяет получить очень ценные сведения о характере движения частицы в силовом поле, не решая уравнений ее движения.

Для простоты рассмотрим одномерный случай, когда $U=U(x)$ (рис. 3.9). Тогда из закона сохранения механической энергии следует, что

$$\frac{m\upsilon^2}{2} + U(x) = \text{const} = E_0,$$

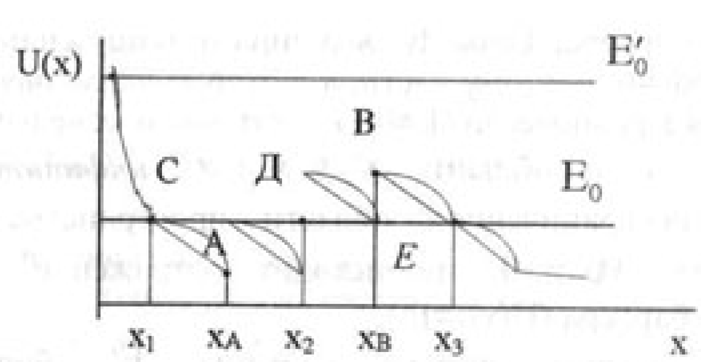


Рис. 3.9

или

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{(E_0 - U(x))}. \qquad (3.41)$$

Так как скорость частицы - действительная величина, то это условие определяет области разрешенного движения и имеет вид

$$E_0 \geq U(x). \qquad (3.42)$$

Пусть полная механическая энергия E_0 такова, как изображено на рис. 3.9.

Движение частицы возможно в областях: $x_1 \leq x \leq x_2, x \geq x_3$, для которых выполнено условие (3.42). Проанализируем более подробно результаты, следующие из (3.41) и (3.42).

1) Ограниченная область $x_1 \leq x \leq x_2$ называется ***потенциальной ямой***. Движение в потенциальной яме называется ***финитным***. В точках C и D выполняется равенство $E_0=U(x)$, здесь скорость частицы обращается в нуль, то есть частица изменяет направление своего движения на противоположное. Координаты этих точек являются корнями уравнения $E_0=U(x)$. Точка A соответствует минимуму потенциальной энергии (дно потенциальной ямы), здесь $dU/dx|_A=0$, и $F=0$, поэтому в этой точке находится ***равновесное состояние***. Это состояние равновесия ***устойчиво***, так как при сколь угодно малом отклонении от него $dU/dx>0$ и F направлена к положению равновесия. Таким образом, движение частицы внутри потенциальной ямы является колебательным.

2) Область $x_2<x<x_3$ - запрещенная область, которая называется ***потенциальным барьером***. Здесь $\Delta x = x_3 - x_2$ - ширина

потенциального барьера. Точка B - вершина потенциального барьера. В этой точке $dU/dx|_B=0$, поэтому частица в этой точке с энергией $E=U(x_B)$ будет находиться в равновесии (F=0), но это равновесие неустойчиво.

3) Движение в области $x_3 \le x < \infty$ ***инфинитно***, так как происходит в неограниченной области пространства. В точке с координатой x_3 $(\upsilon = 0)$ происходит отражение частицы от потенциального барьера ($U(x_3)=E_0$).

4) Если полная энергия частицы E_0' больше высоты потенциального барьера, то движение инфинитно. При этом кинетическая энергия частицы максимальна в точке, где потенциальная энергия минимальна (x_A), и минимальна в точке, где потенциальная энергия максимальна (x_B).

Контрольные вопросы.

3.9. Может ли полная механическая энергия частицы принимать отрицательное значение?

3.10. Какому условию должно удовлетворять значение полной энергии тела, чтобы оно было спутником некоторой планеты?

3.8.2. Абсолютно упругий удар двух материальных точек

Характерной особенностью абсолютно упругого удара материальных точек является сохранение их общей кинетической энергии до и после удара. Кроме этого, непосредственно до и после удара выполняется закон сохранения импульса. Пусть массы соударяющихся частиц равны m_1 и m_2, их скорости до удара $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$, а после удара $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ (рис.3.10).

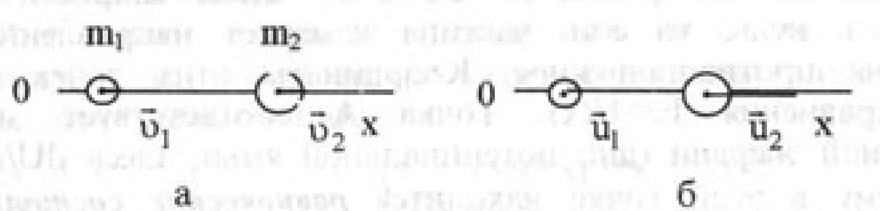


Рис. 3.10

Законы сохранения, описывающие состояния точек до и после удара, в этом случае имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \dfrac{m_1u_1^2}{2} + \dfrac{m_2u_2^2}{2}, \\ m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2. \end{cases} \quad (3.43)$$

В случае ***центрального*** удара, когда до удара частицы двигались вдоль прямой, соединяющей эти частицы (рис. 3.10), запишем систему (3.43) в проекциях на положительное направление (OX), выбранное вдоль этой прямой:

$$\begin{cases} \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \dfrac{m_1u_1^2}{2} + \dfrac{m_2u_2}{2}, \\ m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1u_1 + m_2u_2. \end{cases} \quad (3.44)$$

Отметим сразу особенность этой системы уравнений относительно скоростей соударяющихся частиц. Эта система ***однородна***, поэтому всегда имеет ***тривиальное решение***:

$$\vec{u}_1 = \vec{\upsilon}_1;\ \vec{u}_2 = \vec{\upsilon}_2.$$

Это решение, вообще говоря, имеет физический смысл. Оно реализуется, например, в случае, когда в промежутке между моментами времени t_1 и t_2 удара не произошло. Нас здесь не будет интересовать это решение. Для дальнейшего решения и анализа его результатов удобно ввести безразмерный параметр - ***относительную массу*** соударяющихся частиц: $\mu = \dfrac{m_1}{m_2}$, тогда система (3.44) примет вид

$$\begin{cases} \mu\upsilon_1^2 + \upsilon_2^2 = \mu u_1^2 + u_2^2, \\ \mu\upsilon_1 + \upsilon_2 = \mu u_1 + u_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu(\upsilon_1^2 - u_1^2) = u_2^2 - \upsilon_2^2, \\ \mu(\upsilon_1 - u_1) = u_2 - \upsilon_2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \mu(\upsilon_1 - u_1)(\upsilon_1 + u_1) = (u_2 - \upsilon_2)(u_2 + \upsilon_2), \\ \mu(\upsilon_1 - u_1) = u_2 - \upsilon_2. \end{cases}$$

При дальнейших преобразованиях первого уравнения учтем $u_1 \ne \upsilon_1, u_2 \ne \upsilon_2$, второе равенство системы оставим без изменения

$$\begin{cases} \upsilon_1 + u_1 = u_2 + \upsilon_2, \\ \mu \cdot (\upsilon_1 - u_1) = u_2 - \upsilon_2. \end{cases}$$

Решение этой системы уже не представляет труда:

$$u_1 = \frac{(\mu - 1)\upsilon_1 + 2\upsilon_2}{1+\mu}, \quad u_2 = \frac{2\mu\upsilon_1 + (1-\mu)\upsilon_2}{1+\mu}. \qquad (3.45)$$

Проведем анализ полученных соотношений. Для простоты будем считать, что перед ударом частица m_2 покоилась, т.е. $\upsilon_2 = 0$. Это условие всегда можно реализовать выбором соответствующей инерциальной системы отсчета, движущейся с такой же скоростью $\vec{\upsilon}_2$, что и вторая частица до удара.

Наиболее "впечатляющие" результаты получаются в предельных случаях, когда массы частиц различаются очень сильно или равны между собой:

а) $m_2 >> m_1, \mu << 1$.

При этих условиях параметром μ по сравнению с единицей в формулах (3.45) можно пренебречь:

$$u_1 < 0 \text{ и } u_1 < \upsilon_1; \; u_2 > 0; \; u_2 < 2\mu\upsilon_1 << \upsilon_1.$$

Это означает, что "легкая" частица m_1 после удара меняет направление своего движения на противоположное, скорость этой частицы по величине "слегка" уменьшается.

"Тяжелая" частица m_2 после удара движется в направлении движения частицы m_1 до удара с "малой" скоростью u_2.

Этот случай легко понять с точки зрения здравого смысла: представьте себе шарик от пинг-понга, налетающий на массивное чугунное ядро.

б) $m_2 << m_1, \mu >> 1$.

При этих условиях в формулах (3.45) единицей по сравнению с μ можно пренебречь, поэтому

$$u_1 > 0; \; u_1 \le \upsilon_1; \; u_2 > 0; \; u_2 \le 2\upsilon_1.$$

Эти результаты означают, что "тяжелая" частица m_1 после удара движется в том же направлении, что и до удара, практически не изменяя величины своей скорости. "Легкая" частица m_2 после удара движется в том же направлении, что и "тяжелая" практически с удвоенной скоростью "тяжелой".

Представьте себе массивное чугунное ядро, налетающее на шарик от пинг-понга.

в) $m_1 = m_2, \mu = 1$. В этом случае $u_1 = 0, u_2 = \upsilon_1$, то есть частицы обмениваются скоростями: налетающая частица m_1 после удара останавливается, а первоначально покоящаяся частица m_2 движется со скоростью налетающей частицы.

Контрольные вопросы.

3.11. Рассмотрите самостоятельно случай абсолютно неупругого удара, когда в результате удара частицы "слипаются" и движутся после удара как единое целое.

3.8.3. Роль закона сохранения механической энергии при решении конкретных задач

Чтобы проиллюстрировать те огромные преимущества, которые дает во многих случаях применение закона сохранения энергии при решении конкретных практических задач, полезно, по мнению автора, рассмотреть решение "очень простой", на первый взгляд задачи:

Пусть материальная точка m "свободно" вращается в вертикальной плоскости по окружности радиуса R (камень на легкой нерастяжимой веревке). При прохождении верхнего положения скорость частицы υ_1. Определить скорость частицы υ_2 при прохождении ею нижнего положения.

Под "свободным" здесь понимается движение частицы под действием двух сил: силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения веревки $\vec{N}$.

а) Попытаемся вначале хотя бы представить ход решения этой задачи на основе применения законов Ньютона (рис.3.11).

Уравнение движения частицы имеет вид

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

или в проекциях на радиальное и касательное направления:

$$\begin{cases} m a_\tau = mg \cdot \sin\alpha, \\ m a_n = m\dfrac{\upsilon^2}{R} = N + mg \cdot \cos\alpha. \end{cases}$$

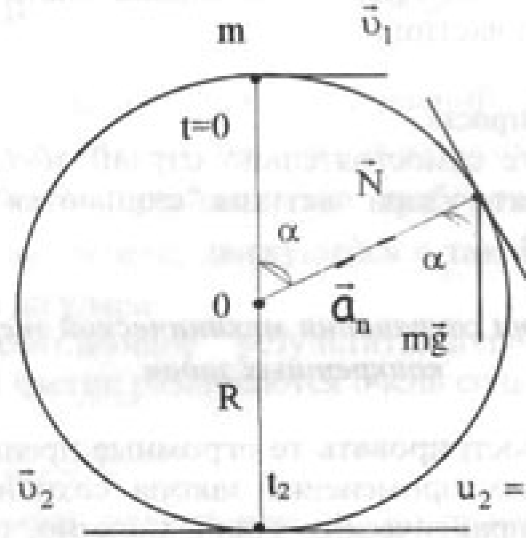


Рис. 3.11

Смысл обозначений ясен из рисунка.

Второе из этих уравнений определяет силу натяжения N и "закон" ее изменения при вращении частицы, поэтому в дальнейшем мы его рассматривать не будем.

Первое уравнение можно преобразовать к одной неизвестной функции времени $\alpha = \alpha(t)$ с помощью $a_\tau = \varepsilon \cdot R = \dfrac{d\omega}{dt} R = \dfrac{d^2\alpha}{dt^2} R$,

после чего получим:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{g}{R}\sin\alpha .$$

К сожалению , несмотря на "простой" вид этого уравнения математически можно решать такое уравнение только приближенно, численными методами. Однако проследить дальнейший ход рассуждений

достаточно просто. Предположим, что нам удалось каким-либо методом найти зависимость угла

как функцию времени, то есть $\alpha = f(t)$.Тогда для момента времени t_2 при прохождении частицей нижнего положения будем иметь

$$\alpha = \pi = f(t_2),$$

и

$$\upsilon_2 = \omega_2 \cdot R = \left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t=t_2} \cdot R = \left.\frac{df}{dt}\right|_{t=t_2} \cdot R.$$

Определив t_2 из первого равенства и подставив во второе, найдем искомое значение скорости υ_2;

б) Решение этой задачи с помощью закона сохранения механической энергии ***точно*** и записывается одной строкой.

Сила тяжести потенциальна, а сила натяжения перпендикулярна скорости частицы, поэтому полная механическая энергия частицы сохраняется. В нижнем положении частицы ее потенциальная энергия в поле силы тяжести принята равной нулю, то есть $U_2 = 0$. Записав равенство механической энергии для верхнего и нижнего положений

$$\frac{m\upsilon_1^{\ 2}}{2} + 2mgR = \frac{m\upsilon_2^{\ 2}}{2},$$

имеем значение искомой величины:

$$\upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_1^{\ 2} + 4gR.}$$

Комментарии излишни.

3.9. Закон сохранения момента импульса

Задачей этого пункта является поиск третьей аддитивной сохраняющейся величины - интеграла движения. Как и пункте 3.2, рассмотрим произвольную систему N материальных точек. Исходные Уравнения движения частиц системы имеют тот же вид

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + ... + \vec{f}_{1N} = \vec{F}_1 + \sum_{k,k\neq 1}^{N} \vec{f}_{1k},$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 + \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + ... + \vec{f}_{2N} = \vec{F}_2 + \sum_{k,k\neq 2}^{N} \vec{f}_{2k},$$

$$\vdots$$

$$\frac{d\vec{p}_N}{dt} = \vec{F}_N + \vec{f}_{N1} + \vec{f}_{N2} + ... + \vec{f}_{N,N-1} = \vec{F}_N + \sum_{k,k\neq N}^{N} \vec{f}_{Nk}.$$

Умножим векторно каждое из этих уравнений почленно слева на соответствующий радиус-вектор положения частицы в выбранной системе отсчета:

$$[\vec{r}_1 \cdot \frac{d\vec{p}_1}{dt}] = [\vec{r} \cdot \vec{F}_1] + \sum_{k,k\neq 1}^{N} [\vec{r}_1 \cdot \vec{f}_{1k}],$$

$$[\vec{r}_2 \cdot \frac{d\vec{p}_2}{dt}] = [\vec{r} \cdot \vec{F}_2] + \sum_{k,k\neq 2}^{N} [\vec{r}_2 \cdot \vec{f}_{2k}],$$

$$\vdots$$

$$[\vec{r}_N \cdot \frac{d\vec{p}_N}{dt}] = [\vec{r} \cdot \vec{F}_N] + \sum_{k,k\neq N}^{N} [\vec{r}_N \cdot \vec{f}_{Nk}].$$

Легко видеть, что

$$\frac{d}{dt}[\vec{r} \cdot \vec{p}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{p}\right] + \left[\vec{r} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}\right] = [\vec{\upsilon} \cdot m\vec{\upsilon}] + \left[\vec{r} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}\right].$$

Так как $[\vec{\upsilon} \cdot \vec{\upsilon}] = 0$, то $\left[\vec{r} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}\right] = \frac{d}{dt}[\vec{r} \cdot \vec{p}]$.

В соответствии с этим равенством уравнения движения частиц системы примут вид

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_1 \cdot \vec{p}_1\right] = \left[\vec{r}_1 \cdot \vec{F}_1\right] + \sum_{k,k\neq 1}^{N} \left[\vec{r}_1 \cdot \vec{f}_{1k}\right],$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_2 \cdot \vec{p}_2\right] = \left[\vec{r}_2 \cdot \vec{F}_2\right] + \sum_{k,k\neq 2}^{N} \left[\vec{r}_2 \cdot \vec{f}_{2k}\right], \qquad (3.46)$$

$$\vdots$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_N \cdot \vec{p}_N\right] = \left[\vec{r}_N \cdot \vec{F}_N\right] + \sum_{k,k\neq N}^{N} \left[\vec{r}_N \cdot \vec{f}_{N,k}\right].$$

Введем определения и обозначения:

а) Векторное произведение радиус-вектора материальной точки на вектор ее импульса называется ***моментом импульса*** частицы относительно точки, выбранной за начало системы отсчета:

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}]. \qquad (3.47)$$

б) Векторное произведение радиус-вектора материальной точки на вектор силы, действующей на эту точку, называется ***моментом силы*** относительно точки, выбранной за начало системы отсчета:

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}]. \qquad (3.48)$$

Обсуждение свойств и смысла величин $\vec{L}$ и $\vec{M}$ будет сделано ниже.

Сложим почленно уравнения системы (3.46) с учетом введенных определений (3.47) и (3.48):

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + ... + \vec{L}_N\right) = \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i\right)_{\text{внеш.}} + \left(\sum_{i=1,k=1,i\neq k}^{N} \vec{M}_{ik}\right)_{\text{внутр.}} . \qquad (3.49)$$

Покажем, что последняя сумма в правой части равенства (3.49) равна нулю. Действительно, в этой сумме попарно присутствуют слагаемые вида

$$\vec{M}_{ik} + \vec{M}_{ki} = \left[\vec{r}_i \cdot \vec{f}_{ik}\right] + \left[\vec{r}_k \cdot \vec{f}_{ki}\right] = \left[\vec{r}_i \cdot \vec{f}_{ik}\right] - \left[\vec{r}_k \cdot \vec{f}_{ik}\right] =$$
$$= \left[\left(\vec{r}_i - \vec{r}_k\right) \cdot \vec{f}_{ik}\right] = \left[\Delta\vec{r}_{ik} \cdot \vec{f}_{ik}\right] = 0.$$

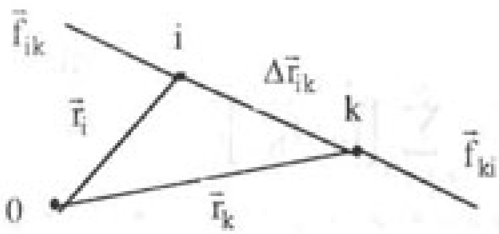


Рис. 3.12

Справедливость этого равенства ясна из рис. 3.12, где учтено, что $\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki}$ - силы взаимодействия частиц i и k, а $\Delta\vec{r}_{ik} \uparrow\uparrow \vec{f}_{ik}$.

С учетом сказанного, равенство (3.49) примет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{N} \mathrm{M}_i\right)_{внеш}. \tag{3.50}$$

Определения:

- векторная сумма моментов импульсов частиц системы называется ***моментом импульса системы материальных точек:***

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + ... + \vec{L}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i. \tag{3.51}$$

Как видно из этого определения, момент импульса системы материальных точек является аддитивной величиной;

- векторная сумма моментов сил, вообще говоря, не является ***результирующим*** моментом всех сил, поэтому сумму

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i \tag{3.52}$$

в общем случае нельзя заменить эквивалентным моментом одной силы.

С учетом (3.51) и (3.52) равенство (3.50) примет вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{внеш} = \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i\right)_{внеш}. \tag{3.53}$$

Оно называется ***уравнением моментов*** и устанавливает тот факт, что момент импульса системы материальных точек может измениться только в результате действия внешних моментов сил.

Скорость изменения момента импульса системы равна векторной сумме моментов всех внешних сил, действующих на систему.

Если сумма моментов внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то момент импульса системы $\vec{L}$ остается постоянным

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + ... + \vec{L}_N = \overrightarrow{\mathrm{const}}. \tag{3.54}$$

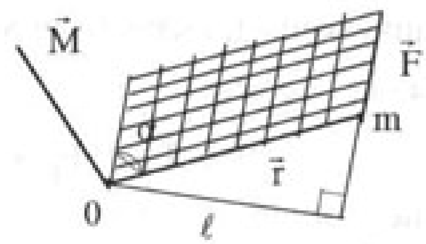
Последнее утверждение называется ***законом сохранения момента импульса*** системы.

В частности, момент импульса замкнутой системы (все $\vec{F} = 0$) тоже сохраняется. Обратите внимание на аналогичный вид равенств (3.3) и (3.53).

Вывод: ***Итак, при условиях, когда суммарный момент внешних сил, действующих на систему частиц, равен нулю, найдена третья сохраняющаяся аддитивная величина (интеграл движения), которой является момент импульса системы частиц.***

Контрольные вопросы.

3.12. Какое условие должно выполняться, чтобы сохранялась проекция момента импульса на некоторое направление?



3.10. Момент силы. Момент импульса

Здесь рассмотрим некоторые свойства введенных в предыдущем пункте понятий момента силы и момента импульса.

Моментом силы, действующей на частицу, относительно точки названа величина (3.48)

$$\vec{M} = [\vec{r} \cdot \vec{F}].$$

Модуль и направление вектора $\vec{M}$ определяются свойствами векторного произведения двух векторов:

- модуль вектора $\vec{M}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{r}$ и $\vec{F}$, как на сторонах, то есть:

$$M = |\vec{M}| = rF \cdot \sin\alpha = F\ell, \qquad (3.55)$$

где $r \cdot \sin\alpha = \ell$, - расстояние от начала отсчета O до линии, вдоль которой действует сила $\vec{F}$, называется ***плечом силы***;

- направление вектора момента силы $\vec{M}$ определяется по правилу ***правого винта***; вектор $\vec{M}$ направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$, и совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{F}$ кратчайшим путем. В силу условности выбора направления вектора $\vec{M}$ момент силы является псевдовектором.

Часто необходимо знать величину проекции момента силы на некоторую ось OZ, проходящую через точку O. В этом случае эту проекцию называют ***моментом силы относительно данной оси:***

$$M_z = [\vec{r} \cdot \vec{F}]_z \qquad (3.56)$$

Силу $\vec{F}$ можно разложить на три составляющие вдоль трех взаимоперпендикулярных направлений:

- вдоль оси OZ - $\vec{F}_{II}$;

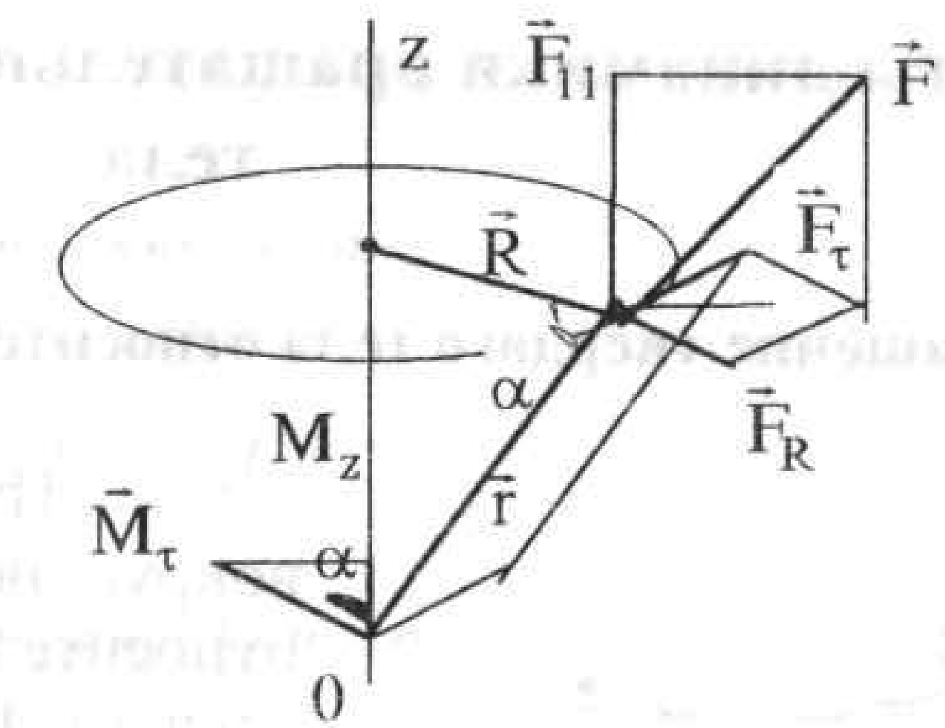
- вдоль радиального R направления, перпендикулярного оси OZ - $\vec{F}_R$;

- перпендикулярно плоскости, в которой лежат ось OZ и точка приложения силы - $\vec{F}_\tau$, то есть

$$\vec{F} = \vec{F}_{II} + \vec{F}_R + \vec{F}_\tau.$$

Определение (3.56) примет вид

$$M_z = [\vec{r} \cdot (\vec{F}_{II} + \vec{F}_R + \vec{F}_\tau)]_z = [\vec{r} \cdot \vec{F}_{II}]_z + [\vec{r} \cdot \vec{F}_R]_z + [\vec{r} \cdot \vec{F}_\tau]_z.$$



Первое и второе слагаемые в правой части последнего равенства равны нулю, так как векторы $[\vec{r} \cdot \vec{F}_{II}]$ и $[\vec{r} \cdot \vec{F}_R]$ перпендикулярны оси OZ, поэтому их проекции на ось OZ равны нулю. Теперь

$$M_z = [\vec{r} \cdot \vec{F}_\tau]_z = M_\tau \cdot \cos\alpha = r \cdot F_\tau \cdot \cos\alpha = F_\tau \cdot R. \qquad (3.57)$$

Момент импульса относительно точки определяется таким же по форме математическим выражением, что и момент силы:

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}] = r \cdot p \cdot \sin\alpha = p\ell, \qquad (3.58)$$

где - $\angle\alpha$ -угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$,

- $\ell = r \cdot \sin\alpha$ - плечо импульса частицы относительно точки отсчета. Поэтому рассмотренные особенности вектора момента силы и его проекции на ось OZ оказываются такими же и для вектора $\vec{L}$.

В частности,

$$L_z = [\vec{r} \cdot \vec{p}]_z = m\upsilon R \qquad (3.59)$$

- проекция момента импульса частицы относительно оси OZ, проходящей через начало отсчета O.

Контрольные вопросы.

3.14. Определите величину момента импульса частицы m относительно точки, если скорость частицы постоянна и равна $\vec{\upsilon}$, а частица мимо точки O пролетает на минимальном расстоянии r_{min}.

4. Элементы динамики вращательного движения твердого тела

4.1. Вращение твердого тела относительно неподвижной оси

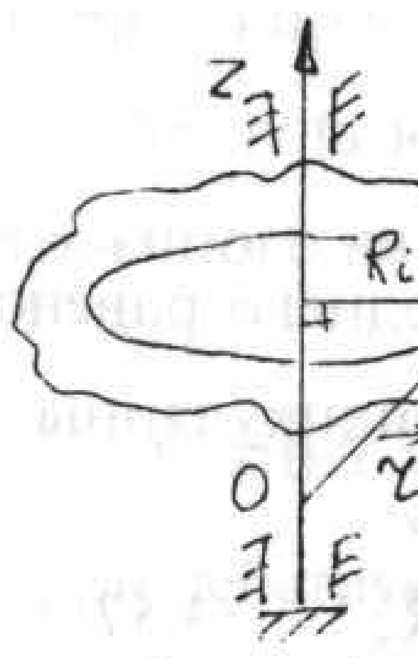


Рис. 4.1

Пусть твердое тело вращается вокруг некоторой оси, неподвижной относительно выбранной системы отсчета. Положение и ориентация оси остаются при вращении тела неизменными. Направим вдоль оси вращения положительное направление оси OZ системы отсчета (рис. 4.1). В этом случае все точки твердого тела вращаются по окружностям, центры которых лежат на оси OZ. Движение твердого тела, как системы материальных точек, описывается проекцией уравнения моментов (3.53) на ось OZ

$$\frac{dL_z}{dt} = \left(\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i \right)_{z\,внеш} \qquad (4.1)$$

где согласно (3.54) и (3.59)

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} L_{zi} = \sum_{i=1}^{N} m_i \upsilon_i R_i . \qquad (4.2)$$

Так как все точки тела при его вращении имеют одинаковые угловые скорости $\omega_i = \omega$, то, используя (1.31): $\upsilon_i = \omega \cdot R_i$, выражение (4.2) можно записать в виде

$$L_z = \omega \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 . \qquad (4.3)$$

Введем некоторые определения:

- для твердого тела сумму моментов внешних сил $\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \vec{M}$ назовем ***результирующим моментом сил***;

- сумму

$$\sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 = J_z \qquad (4.4)$$

назовем ***моментом инерции твердого тела относительно данной оси***. Отметим, что, по определению, $J_z = \sum_{i=1}^{N} J_{iz}$ - момент инерции твердого тела относительно данной оси является адитивной величиной и не зависит от времени t. С учетом введенных определений уравнение (4.1) примет вид

$$J_z \cdot \frac{d\omega}{dt} = M_z . \qquad (4.5)$$

Уравнение (4.5) называется ***основным уравнением динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.*** Уравнение (4.5) можно записать в другой форме, если учесть, что $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$:

$$J_z \cdot \varepsilon = M_z . \qquad (4.6)$$

В частности, если проекция результирующего момента внешних сил на неподвижную ось равна нулю, то есть $M_z = 0$, то

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0 \qquad => \qquad \omega = const ,$$

вращение вокруг этой оси является ***равномерным.***

Отметим, наконец, что основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси, записанное в виде

$$\varepsilon = \frac{M_z}{J_z} , \qquad (4.7)$$

является аналогом второго закона Ньютона для прямолинейно движущейся материальной точки $a = \frac{F}{m}$ (сила имеет неизменное направление).

Выводы: ***Вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси описывается основным уравнением динамики (4.5). Характер вращения определяется результирующим моментом сил относительно оси вращения, действующих на тело, и моментом инерции этого тела относительно той же оси.***

Контрольные вопросы.

4.1. Можно ли основное уравнение динамики вращательного движения (4.6) или (4.7) записать в векторном виде? Если ***нет***, то почему? Если ***да***, то какой смысл будут иметь величины $\vec{\varepsilon}_z$ и $\vec{M}_z$ в этом уравнении?

4.2. Момент инерции

В этом пункте обсудим физический смысл и некоторые свойства введенной в предыдущем пункте 4.1 величины J_z - момента инерции твердого тела относительно данной оси.

Уже в самом названии величины J_z скрывается ее смысл, который легко понять, рассмотрев основное уравнение (4.7). Действительно, поскольку это уравнение имеет такой же формальный вид, что и второй закон Ньютона, то момент инерции твердого тела относительно данной оси можно трактовать ***как количественную меру инертности тела относительно этой оси.***

Здесь следует отметить, что некоторые студенты ошибочно считают момент инерции мерой инертности тела при вращательном движении твердого тела относительно данной оси. В действительности же, момент инерции тела относительно данной оси существует независимо от того, вращается ли данное тело или нет. При вращательном движении твердого тела мы наблюдаем одно из частных, конкретных проявлений этого ***свойства инертности***, так же как, например, масса тела, существуя независимо от характера движения тела, играет роль инертности тела при его поступательном движении.

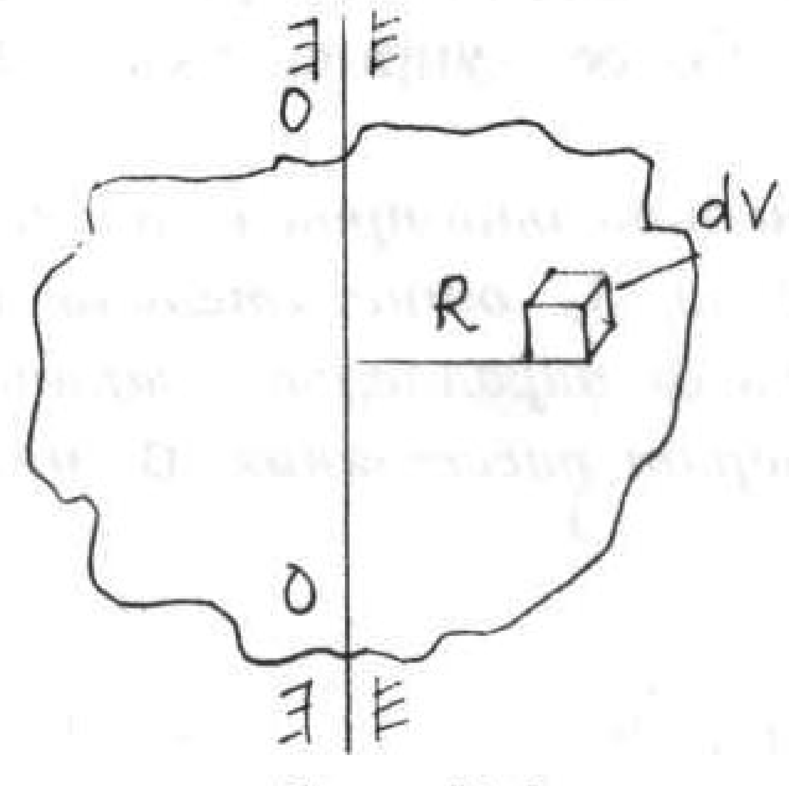


Рис. 4.2

В тех случаях, когда дискретностью вещества можно пренебречь, считают, что в объеме твердого тела ***вещество распределено непрерывно.*** Это позволяет при вычислении момента инерции тела использовать интегральное исчисление.

Твердое тело “разбивают” на элементарно малые (рис. 4.2) участки объемом dV, такие, что их можно считать материальными точками. Распределение вещества внутри объема тела можно характеризовать величиной

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV}, \qquad (4.8)$$

которая называется плотностью в малой окрестности dV данной точки тела.

Выразив элементарную массу dm с помощью (4.8) $dm = \rho \cdot dV$, определение (4.4) запишем в виде

$$J_z = \int_V dm \cdot R^2 = \int_V \rho \cdot dV \cdot R^2, \qquad (4.9)$$

где суммирование по всем материальным точкам заменено интегрированием по объему твердого тела. В соотношении (4.9) величина R определяет расстояние от элементарного объема dV до оси, относительно которой вычисляется момент инерции тела. В общем случае величины ρ и R являются функциями ***положения*** элементарного объема dV (например, декартовых координат x, y, z). Для однородного тела $\rho = const$ и поэтому вычисление момента инерции тела упрощается:

$$J_z = \rho \int_V R^2 dV. \qquad (4.10)$$

Из соотношений (4.4), (4.9) и (4.10) видно, что ***величина момента инерции тела относительно данной оси существенным образом зависит не столько от общей массы тела, сколько от того, как эта масса распределена относительно данной оси.***

Во многих случаях вычисление момента инерции тела относительно произвольной оси еще более упрощается, если использовать ***теорему Штейнера:***

Момент инерции тела J относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела J_0 относительно оси, проходящей через центр инерции тела параллельно данной, и произведения массы тела m на квадрат расстояния a между этими осями:

$$J = J_0 + m a^2 \qquad (4.11)$$

Докажем справедливость этого утверждения.

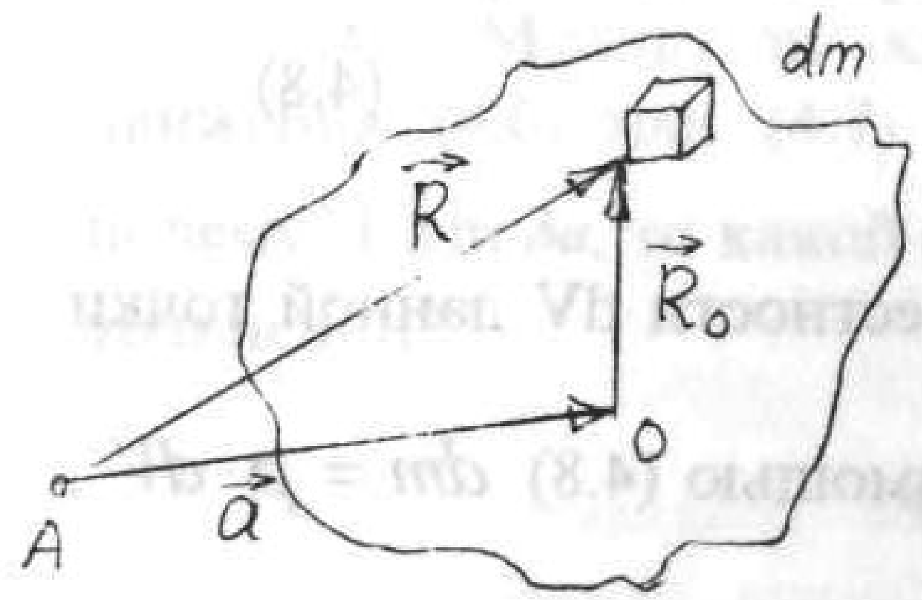


Рис.4.3

На рис. 4.3 произвольная ось, проходящая через точку А, и ось, проходящая через центр инерции 0, перпендикулярны к плоскости чертежа.

Легко видеть, что радиус-вектор $\vec{R}$, определяющий положение элементарной массы dm относительно произвольной оси А, как следует из рис. 4.3, имеет очевидный вид:

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{a}.$$

Вычислим квадрат модуля этого вектора, входящий в подынтегральное выражение в (4.9):

$$R^2 = \left(\vec{R}_0 + \vec{a}\right)^2 = R_0^2 + 2\vec{R}_0 \cdot \vec{a} + a^2.$$

Подставим это соотношение в (4.9) и представим интеграл в виде суммы трех интегралов:

$$J = \int_V dm R_0^2 + 2\left(\int_V dm \cdot \vec{R}_0\right) \cdot \vec{a} + a^2 \int_V dm.$$

Постоянные величины вынесены за знак интеграла. В последнем соотношении интеграл в скобках $\int_V dm \cdot \vec{R}_0$ во втором слагаемом равен

0. Этот результат непосредственно следует из определения центра инерции (3.5), записанного для сплошного тела в интегральной форме:

$$\vec{R}_{ц.и.} = \frac{1}{m}\int_V dm \cdot \vec{R}_0 .$$

В данном случае $\vec{R}_{ц.и.} = 0$, так как ось 0 проходит именно через центр инерции тела. С учетом этих соображений выражение для J примет вид

$$J = \int_V dm \cdot R_0^2 + a^2 \int_V dm.$$

В соответствии с (4.9) первый интеграл определяет момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр инерции, то есть $\int_V dm \cdot R_0^2 = J_0$. Второе же слагаемое, в силу очевидного равенства $\int_V dm = m$, где m - масса всего тела, примет вид

$$a^2 \int_V dm = m \cdot a^2 .$$

Окончательно для J имеем

$$J = J_0 + m a^2 .$$

Теорема Штейнера доказана.

Выводы: ***Момент инерции тела относительно данной оси является количественной мерой инертности этого тела относительно этой оси. Величина момента инерции зависит как от массы тела, так и от характера распределения этой массы относительно оси.***

Контрольные вопросы.

4.2. Как изменится угловое ускорение материальной точки, вращающейся по окружности под действием постоянной по величине касательной силы, если, не меняя эту силу, увеличить радиус окружности? Какой фактор оказывает большее влияние на результат: увеличение момента касательной силы или увеличение момента инерции материальной точки?

4.3. Примеры вычисления моментов инерции однородных симметричных тел

В этом пункте приведем примеры вычисления моментов инерции относительно оси, проходящей через центр масс, для некоторых однородных тел правильной геометрической формы, а также некоторые результаты, часто встречающиеся при решении конкретных задач.

а) Рассчитаем момент инерции однородного сплошного цилиндра относительно его оси симметрии 00 (рис. 4.4), который имеет массу m, радиус R и высоту h.

Разобьем цилиндр на соосные с ним цилиндрические слои радиуса r и бесконечно малой толщины dr. Масса такого слоя dm легко вычисляется:

$$dm = \rho dV = \rho \cdot 2\pi r dr \cdot h,$$

где $\rho = const$ - плотность материала цилиндра.

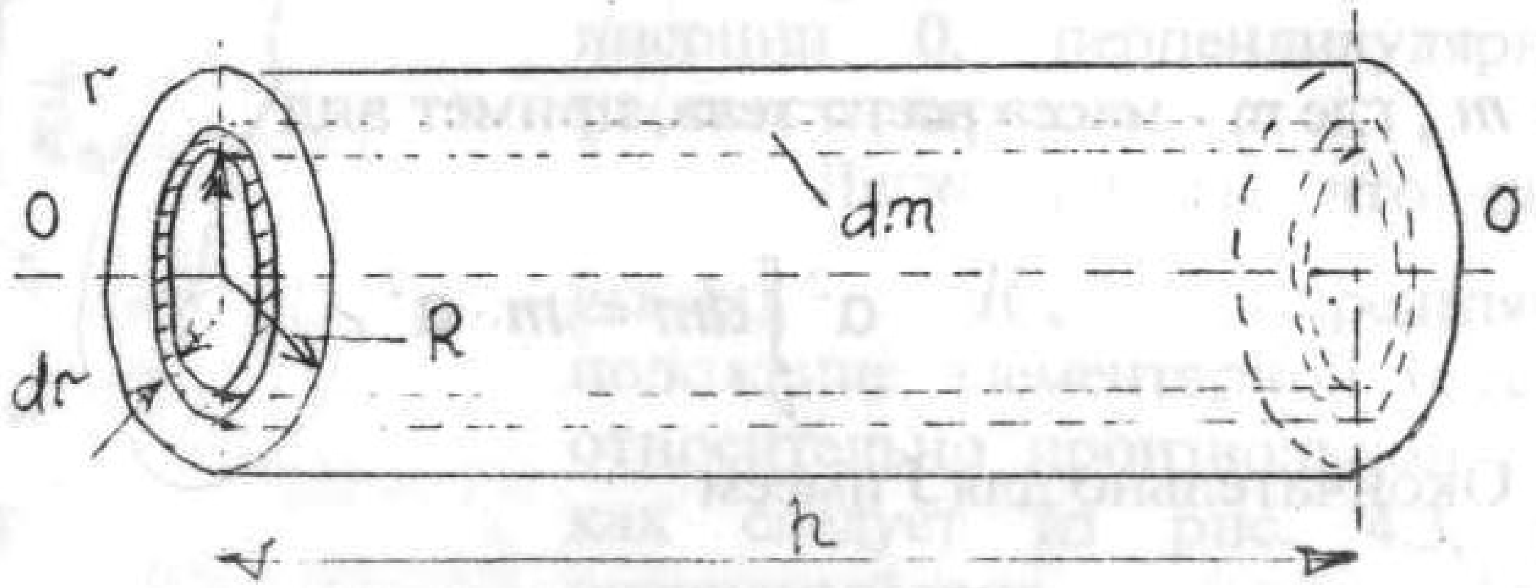


Рис. 4.4

Подставим это выражение в (4.9) и проведем интегрирование:

$$J = \int_0^R \rho \cdot 2\pi r dr \cdot h \cdot r^2 = \rho \cdot 2\pi h \cdot \frac{R^4}{4}.$$

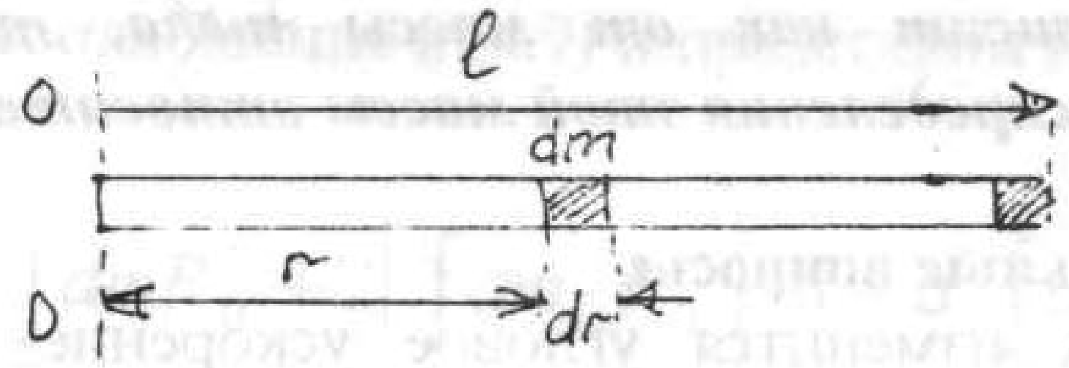


Рис. 4.5

Последнему соотношению можно придать другой вид, учитывая, что равенство $\rho \cdot \pi R^2 \cdot h$ определяет массу m всего цилиндра:

$$J = \frac{mR^2}{2}. \qquad (4.12)$$

б) В качестве другого примера рассмотрим применение (4.9) для расчета момента инерции тонкого длинного однородного стержня, имеющего сечение S произвольной формы, относительно оси, проходящей через один из его концов перпендикулярно самому стержню (рис. 4.5).

Тонким можно считать стержень, для которого выполняется условие $\ell >> a$, где a определяет величину наибольшего поперечного размера стержня. Разобьем стержень на элементарные участки $dm = \rho \cdot S \cdot dr$. Подставив это равенство в (4.9) и проведя интегрирование, получим

$$J = \int_0^\ell \rho \cdot S \cdot dr \cdot r^2 = \rho \cdot S \cdot \frac{\ell^3}{3},$$

или с учетом, что $m = \rho \cdot S \cdot \ell$, окончательно имеем

$$J = \frac{m\ell^2}{3}. \qquad (4.13)$$

Ниже приведем соотношения, определяющие моменты инерции некоторых однородных симметричных тел:

- момент инерции материальной точки относительно произвольной оси:

$$J = mR^2; \qquad (4.14)$$

- момент инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через его середину перпендикулярно стержню

$$J = \frac{m\ell^2}{12}, \qquad (4.15)$$

где ℓ - длина стержня;

- момент инерции тонкостенного цилиндра относительно его геометрической оси:

$$J = mR^2; \qquad (4.16)$$

- момент инерции толстостенного цилиндра относительно его геометрической оси (R_1 и R_2 - радиусы внутренней и внешней поверхностей цилиндра):

$$J = \frac{m}{2}(R_1^2 + R_2^2). \qquad (4.17)$$

Отметим здесь, что результаты (4.12) и (4.16) являются частными по отношению к (4.17). Формула (4.12) получается из (4.17) при $R_1=0$ и $R_2=R$. Формула (4.16) получается из (4.17) при $R_1=R_2=R$;
- момент инерции сплошного шара относительно любой оси, проходящей через его центр

$$J = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2. \qquad (4.18)$$

В заключение этого пункта можно сделать **вывод**, что ***по крайней мере, для однородных симметричных тел моменты инерции относительно геометрической оси можно представить в виде***

$$J = k \cdot m \cdot R^2, \qquad (4.19)$$

где коэффициент пропорциональности k ***учитывает характер распределения массы тела относительно оси симметрии, причем значения*** k ***заключены в пределах***

$$0 \le k \le 1. \qquad (4.20)$$

Отметим, что приведенный выше вывод справедлив, вообще говоря, для моментов инерции относительно оси, проходящей через центр инерции произвольного тела. В этом случае величина R в (4.19) представляет собой некоторый характерный, поперечный оси, размер тела. Доказательство этого факта выходит за рамки данного пособия.

Контрольные вопросы.

4.3. Докажите справедливость соотношений (4.15), (4.17) и (4.18).

4.4. Кинетическая энергия вращающегося твердого тела

Поскольку твердое тело представляет собой частный случай системы материальных точек, то кинетическая энергия тела при вращении вокруг неподвижной оси Z будет равна сумме кинетических энергий всех его материальных точек, то есть

$$T = \sum_{i=1}^{N} T_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2}.$$

Все материальные точки m_i твердого тела вращаются в этом случае по окружностям с радиусами R_i и с одинаковыми угловыми скоростями $\omega_i = \omega$. Линейная скорость каждой материальной точки твердого тела равна $\upsilon_i = \omega R_i$. Кинетическая энергия твердого тела примет вид

$$T = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2.$$

Сумма в правой части этого выражения в соответствии с (4.4) представляет собой момент инерции этого тела J_z относительно данной оси вращения. Поэтому формула для расчета кинетической энергии вращающегося относительно неподвижной оси твердого тела примет окончательный вид:

$$T = \frac{J_z \cdot \omega^2}{2} = \frac{L_z \omega}{2} = \frac{L_z^2}{2J_z}. \qquad (4.21)$$

Здесь учтено, что $L_z = J_z \cdot \omega$.

Вычисление кинетической энергии твердого тела в случае произвольного движения значительно усложняется. Рассмотрим плоское движение, когда траектории всех материальных точек тела лежат в параллельных плоскостях. Скорость каждой материальной точки твердого тела, согласно (1.44), представим в виде

$$\vec{\upsilon}_i = \vec{\upsilon}_0 + \left[\vec{\omega} \cdot \vec{R}_i\right],$$

где в качестве мгновенной оси вращения выберем ось, проходящую через центр инерции тела перпендикулярно плоскости траектории какой-либо точки тела. В этом случае в последнем выражении $\vec{\upsilon}_0$ представляет собой скорость центра инерции тела, $\left|\vec{R}_i\right|$ - радиусы окружностей, по которым вращаются точки тела с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр его инерции. Так как при таком движении $\vec{\omega} \perp \vec{R}_i$, то вектор, равный $\left[\vec{\omega} \cdot \vec{R}_i\right]$, лежит в плоскости траектории точки.

На основании сказанного выше кинетическая энергия тела при его плоском движении равна

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{\upsilon}_0 + \left[\vec{\omega} \cdot \vec{R}_i\right]\right)^2 .$$

Возводя выражение, стоящее в круглых скобках, в квадрат и вынося за знак суммы постоянные для всех точек тела величины, получим

$$T = \frac{1}{2} \upsilon_0^2 \sum_{i=1}^{N} m_i + \vec{\upsilon}_0 \left[\vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{R}_i\right] + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 . \qquad (4.22)$$

Здесь учтено, что $\vec{\omega} \perp \vec{R}_i$.

Рассмотрим каждое слагаемое в правой части последнего выражения отдельно. Первое слагаемое в силу очевидного равенства $\sum_{i=1}^{N} m_i = m$ равно

$$T_1 = \frac{1}{2} m \upsilon_0^{2\text{Б}} .$$

Второе слагаемое равно нулю, так как сумма $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{R}_i$ определяет радиус-вектор центра инерции (3.5), который в данном случае лежит на оси вращения. Последнее слагаемое с учетом (4.4) примет вид $T_3 = \frac{1}{2} \cdot J_0 \cdot \omega^2$. Теперь, окончательно, кинетическая энергия при произвольном, но плоском движении твердого тела может быть представлена в виде суммы двух слагаемых:

$$T = \frac{m \upsilon_0^2}{2} + \frac{J_0 \cdot \omega^2}{2}, \qquad (4.23)$$

где первое слагаемое представляет собой кинетическую энергию материальной точки с массой, равной массе тела и движущейся со скоростью, которую имеет центр масс тела;

второе слагаемое представляет собой кинетическую энергию тела, вращающегося вокруг оси (движущейся со скоростью $\vec{\upsilon}_0$), проходящей через его центр инерции.

Выводы: ***Итак, кинетическая энергия твердого тела при его вращении вокруг неподвижной оси может быть вычислена с помощью одного из соотношений (4.21), а в случае плоского движения с помощью (4.23).***

Контрольные вопросы.

4.4. В каких случаях (4.23) переходит в (4.21)?

4.5. Как будет выглядеть формула для кинетической энергии тела при его плоском движении, если мгновенная ось вращения не проходит через центр инерции? Каков при этом смысл входящих в формулу величин?

4.6. Покажите, что работа внутренних сил при вращении твердого тела равна нулю.

4.5. Механическая работа при вращательном движении твердого тела

Механическую работу при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси можно вычислить, воспользовавшись тем фактом, что она идет на приращение кинетической энергии материальных точек этого тела, то есть

$$\delta A = dT .$$

Используя (4.21), легко найти ($J_z = const$), что

$$dT = J_z \omega d\omega = J_z \omega \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot dt .$$

Учтя теперь, что $J_z \dfrac{d\omega}{dt} = M_z$ а $\omega dt = d\varphi$ - элементарный угол поворота тела вокруг оси Z, придем к выражению для механической работы

$$\delta A = M_z d\varphi. \qquad (4.23)$$

При повороте тела на конечный угол φ вокруг неподвижной оси для вычисления работы необходимо проинтегрировать выражение (4.23)

$$A = \int \delta A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi. \qquad (4.24)$$

Контрольные вопросы.

4.7. Покажите, что если воспользоваться общим выражением для механической работы $\delta A = \left(\vec{F} d\vec{r}\right)$, то при вращении тела вокруг неподвижной оси тоже получается формула (4.23).

4.8. Изменится ли и как выражение для работы (4.23), если тело под действием внешних сил совершает плоское движение?

4.6. Сравнение описаний движения материальной точки и вращения твердого тела

Здесь в виде таблицы показана аналогия между видом основных физических величин и соотношений, описывающих механику поступательного и вращательного движений твердого тела:

КИНЕМАТИКА

Поступательное движение	Вращательное движение
$d\vec{r}$ - элементарное перемещение	$d\vec{\varphi}$ - элементарный угол поворота
$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ - линейная скорость	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ - угловая скорость
$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ - линейное ускорение	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ - угловое ускорение
Уравнения равнопеременного движения: $\left(\vec{a} = const\right)$	Уравнения равнопеременного вращения вокруг неподвижной оси $\left(\varepsilon_z = \varepsilon = const\right)$
$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}(t - t_0)$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon(t - t_0)$
$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0(t - t_0) + \frac{\vec{a}(t - t_0)^2}{2}$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{\varepsilon(t - t_0)^2}{2}$

ДИНАМИКА

$\vec{F}$ - сила m - масса	$\vec{M}$ - момент силы J_z - момент инерции относительно данной оси
$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ - импульс	$\vec{L} = J\vec{\omega}$ $\left(L_z = J_z\omega\right)$ - момент импульса
$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ - основное уравнение динамики поступательного движения	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ - основное уравнение динамики вращательного движения
$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = const$, если $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0$ закон сохранения импульса	$\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = const$, если $\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0$ - закон сохранения момента импульса
$T = \frac{m\upsilon^2}{2}$ - кинетическая энергия	$T_{‰р} = \frac{J_z \cdot \omega^2}{2}$ - кинетическая энергия при вращении вокруг неподвижной оси
$\delta A = \left(\vec{F} \cdot d\vec{r}\right)$ - механическая работа	$\delta A = \left(\vec{M} \cdot d\vec{\varphi}\right)$ - механическая работа при вращении твердого тела

Выводы: ***Физические законы и соотношения, описывающие поступательное и вращательное движения твердого тела, имеют совершенно аналогичную форму и могут быть получены друг из друга простой заменой линейных физических величин на соответствующие угловые или наоборот.***

4.7. Применение основных законов динамики твердого тела при решении конкретных задач

При решении конкретных задач, связанных с описанием движения твердого тела, следует помнить, что твердое тело в механике представляет собой частный случай системы материальных точек, имеющих в процессе рассматриваемого движения неизменное друг относительно друга взаимное расположение. Как уже указывалось (3.7) и (3.3), в этом случае справедливы основные уравнения динамики

$$m\frac{d\vec{U}_{ц.м.}}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i \tag{4.25}$$

и

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\vec{M}_i\,. \tag{4.26}$$

Из этих уравнений непосредственно видно, что характер движения твердого тела полностью определяется действующими на него внешними силами $\vec{F}_i$ и моментами этих сил $\vec{M}_i$.

Для практического применения основных уравнений (4.2) и (4.26) полезно следовать рекомендациям, упрощающим решение конкретных задач:

- Сделать схематический чертеж, на котором указать все внешние силы, действующие на рассматриваемое тело. При этом силы следует изображать в тех точках тела, на которые эти силы действуют.
- Выбрать инерциальную систему отсчета, связанную с какой-либо неподвижной или движущейся равномерно и прямолинейно точкой, относительно которой определяются моменты внешних сил. Если тело имеет неподвижную ось вращения, то полезно эту точку выбрать на неподвижной оси, а ось 0Z декартовой системы координат направить вдоль оси вращения. В случае плоского движения твердого тела ось 0Z рекомендуется направить перпендикулярно плоскости, в которой лежит траектория какой-либо точки тела.
- Точку приложения конкретной силы можно перемещать вдоль линии действия силы, так как при этом момент этой силы не изменяется. Это полезно делать при необходимости определения равнодействующей внешних сил.
- Записать уравнения (4.25) и (4.26) в проекциях на оси координат выбранной системы отсчета и, с использованием уравнений связи (например, $F_{\square р}=\mu N$) и дополнительных условий задачи, решить полученную систему уравнений относительно искомой величины.

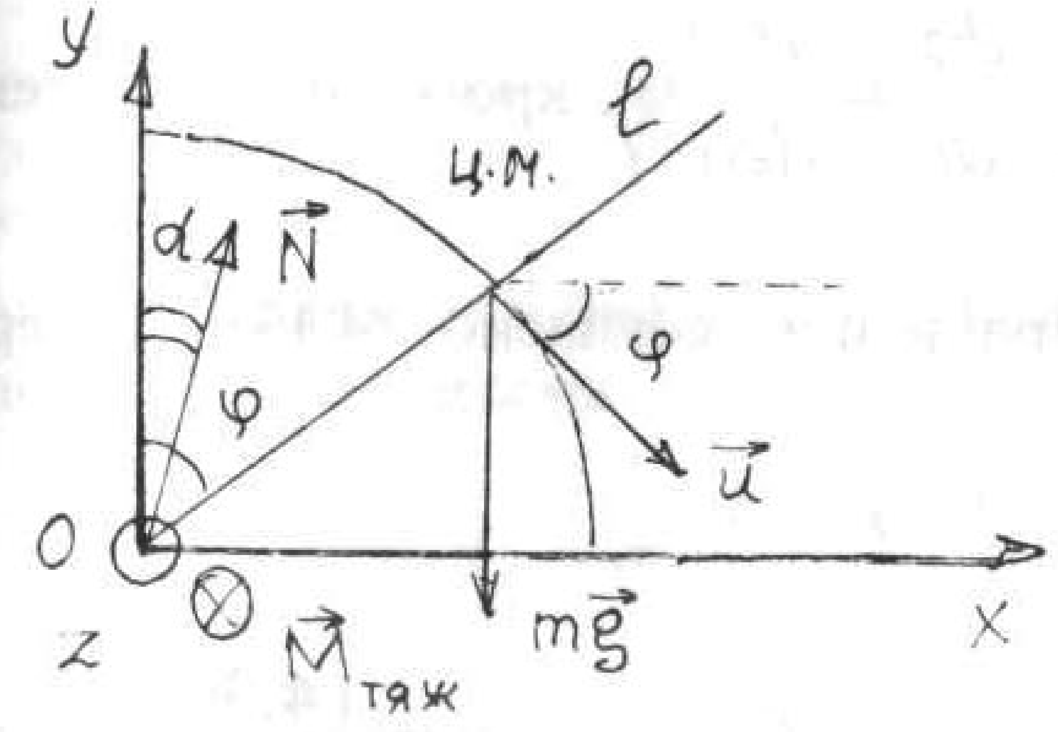


Рис. 4.6.

Для примера подробно исследуем свободное вращение жесткого однородного стержня массой m и длиной ℓ в вертикальной плоскости относительно горизонтальной оси, проходящей через один из его концов (рис. 4.6). Трением в оси пренебрегаем. Выберем оси координат, как указано на рис. 4.6 (ось Z направлена из-за чертежа вдоль оси вращения стержня). При свободном вращении на стержень действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и реакция оси вращения $\vec{N}$. Поэтому уравнения динамики (4.25) и (4.26) примут вид

$$m\frac{d\vec{U}}{dt}=\vec{N}+m\vec{g}\,,$$

$$J\cdot\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\vec{M}_N+\vec{M}_{\square Шс}\,,$$

где $\vec{M}_N$ и $\vec{M}_{\square Шс}$ - моменты сил $\vec{N}$ и $m\vec{g}$ соответственно. Запишем эти уравнения в проекциях на выбранные оси координат

$$\begin{cases} m\cdot\dfrac{dU_x}{dt}=N_x, & (4.27)\\ m\cdot\dfrac{dU_y}{dt}=N_y-mg, & (4.28)\\ J\cdot\dfrac{d\omega}{dt}=mg\cdot\dfrac{\ell}{2}\sin\varphi, & (4.29)\end{cases}$$

где угол φ отсчитывается от оси $0Y$.

В уравнении (4.29) учтено, что $\vec{M}_N$ относительно оси вращения равен нулю. Исследование удобнее и проще всего проводить, если перейти в уравнениях (4.27)-(4.29) от переменной t к переменной φ.

Заметим, что в этом случае $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{d}{d\varphi}\cdot\dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{d}{d\varphi}\cdot\omega$, кроме этого, учтем, что $J = \dfrac{m\ell^2}{3}$ относительно оси вращения, согласно (4.13). Теперь уравнения (4.27)-(4.29) примут вид:

$$\begin{cases} m\cdot\dfrac{dU_x}{d\varphi}\cdot\omega = N_x, & (4.30)\\ m\cdot\dfrac{dU_y}{d\varphi}\cdot\omega = N_y - mg, & (4.31)\\ \dfrac{2}{3}\dfrac{d\omega}{d\varphi}\cdot\omega\cdot\ell = g\sin\varphi. & (4.32)\end{cases}$$

Легко заметить, что последнее равенство (4.32) эквивалентно условию

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{\omega^2\cdot\ell}{3} + g\cos\varphi\right) = 0,$$

что проверяется прямым дифференцированием. Равенство нулю производной означает, что сумма в скобках при вращении стержня остается постоянной, то есть

$$\frac{\omega^2\ell}{3} + g\cos\varphi = const.$$

Значение константы определим, положив, например, $\omega = 0$ при $\varphi = 0$, что соответствует началу вращения стержня из вертикального положения без толчка. В этом случае $const = g$, поэтому $\dfrac{\omega^2\ell}{3} + g\cos\varphi = g$, при заданных начальных условиях $\varphi = 0,\ \omega = 0$. Поэтому значение угловой скорости стержня в любом его положении определяется равенством

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}\cdot\sqrt{1-\cos\varphi}. \tag{4.33}$$

Используя связь (1.31), найдем теперь значения модуля скорости центра масс стержня

$$U = \omega\cdot\frac{\ell}{2} = \frac{\sqrt{3g\ell}}{2}\cdot\sqrt{1-\cos\varphi}, \tag{4.34}$$

а затем и проекций $\vec{U}$ на оси координат

$$U_x = U\cos\varphi = \frac{\sqrt{3g\ell}}{2}\cos\varphi\sqrt{1-\cos\varphi}, \tag{4.35}$$

$$U_y = -U\sin\varphi = -\frac{\sqrt{3q\ell}}{2}\sin\varphi\sqrt{1-\cos\varphi}. \tag{4.36}$$

Уравнения (4.30) и (4.31) позволяют определить проекции силы $\vec{N}$, для этого необходимо, соответственно, использовать (4.35) и (4.36):

$$N_x = \frac{3}{4}mg\sin\varphi(3\cos\varphi - 2), \tag{4.37}$$

$$N_y = \frac{1}{4}mg\left(1 - 6\cos\varphi + 9\cos^2\varphi\right). \tag{4.38}$$

Интересно отметить, что при вращении сила $\vec{N}$, вообще говоря, не направлена вдоль стержня, а составляет с вертикалью (с осью 0Y) угол

$$tg\alpha = \frac{N_x}{N_y} = \frac{3\sin\varphi(3\cos\varphi-2)}{6\cos\varphi + 9\cos^2\varphi} \neq tg\varphi. \tag{3.39}$$

Модуль силы $\vec{N}$ равен

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \frac{mg}{4}\sqrt{4(5\cos\varphi - 3)^2 + \sin^2\varphi} \tag{4.40}$$

Выводы: ***Свободное вращение стержня в вертикальной плоскости является неравномерным. Зависимости угловой скорости вращения, скорости его центра масс, а также реакции оси от положения стержня определяются формулами (4.33)-(4.40).***

Контрольные вопросы.

4.9. Покажите, что равенство (4.33) является следствием из закона сохранения механической энергии стержня.

4.10. Определите, в каких положениях стержня (φ -?) реакция его оси направлена а) горизонтально; б) вертикально; в) вдоль стержня?

4.8. Понятие о прецессии

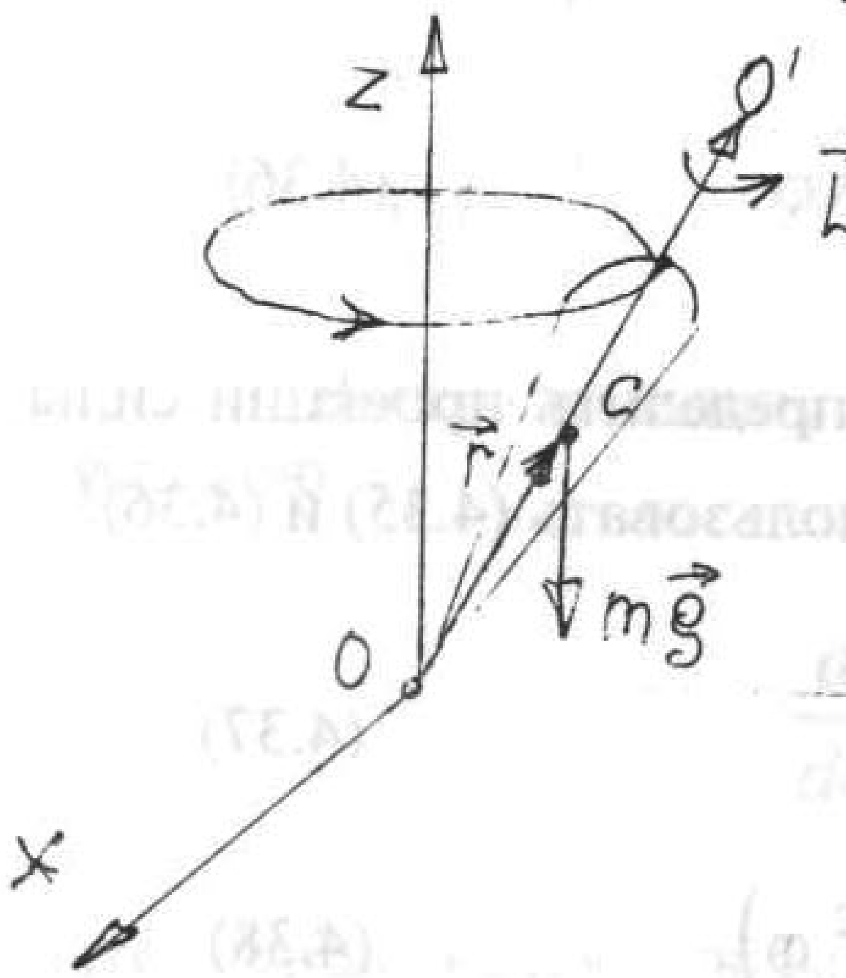


Рис.4.7

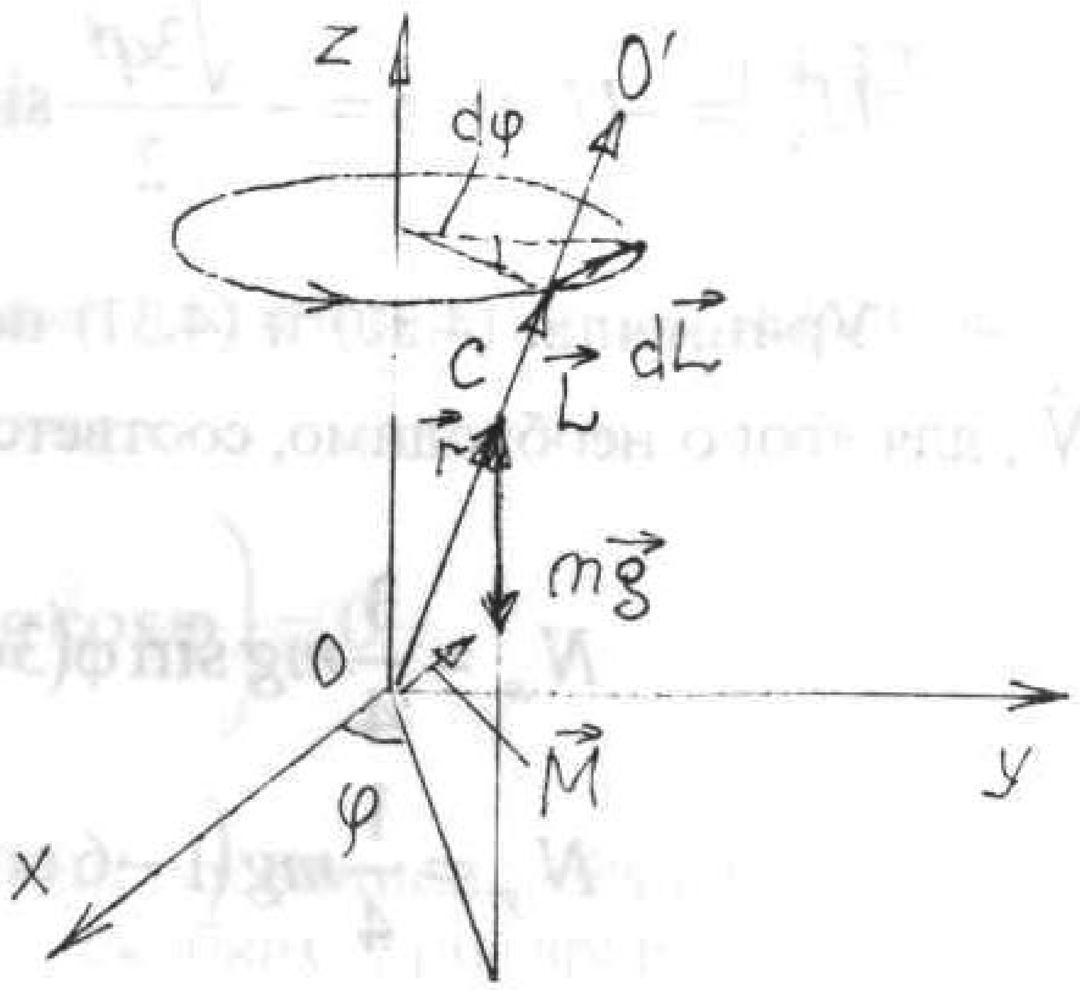


Рис.4.8

Рассмотрим здесь качественно характер движения симметричного твердого тела, имеющего одну неподвижную точку 0 (рис. 4.7), которая лежит на оси симметрии тела $00'$. В динамике вращательного движения такое тело называется ***гироскопом*** или симметричным волчком. Примером такого тела является обыкновенный детский волчок (юла). Поставим волчок на горизонтальную опору и приведем его в быстрое вращение относительно оси симметрии $00'$, в результате волчок приобретет момент импульса $\vec{L}$, направленный вдоль оси $00'$.

результате волчок приобретет момент импульса $\vec{L}$, направленный вдоль оси $00'$.

Дальнейшее движение волчка будет определяться результирующим моментом сил, действующих на волчок относительно неподвижной точки 0, который равен

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \times m\vec{g}\right]$$

и направлен перпендикулярно плоскости $Z00'$ (рис. 4.8). Заметим, что момент силы реакции опоры относительно точки 0 равен нулю.

Из-за действия момента силы тяжести $\vec{M}$, в соответствии с уравнением моментов (3.52), за время dt момент импульса волчка $\vec{L}$ получит приращение $d\vec{L}$, равное

$$d\vec{L} = \vec{M} \cdot dt .$$

Отметим, что $d\vec{L} \uparrow\uparrow \vec{M}$, а поэтому приращение $d\vec{L}$ направлено перпендикулярно плоскости $Z00'$. Таким образом, ось волчка $00'$ за время dt повернется в направлении $d\vec{L}$ на некоторый угол $d\varphi$. Поскольку взаимная ориентация векторов $\vec{M}$, $d\vec{L}$ и плоскости $Z00'$ в любой момент времени остается неизменной, то ось вращения волчка $00'$ будет поворачиваться относительно вертикали $0Z$, описывая конусообразную поверхность.

Подобный характер движения будет наблюдаться, когда симметричное твердое тело, имеющее одну неподвижную точку и вращающееся вокруг оси симметрии, подвержено действию постоянного по величине внешнего момента силы. При этом его ось вращения сама поворачивается относительно неподвижной оси - такое вращение называется ***прецессией***.

Особое распространение в технике получили так называемые уравновешенные гироскопы, когда неподвижной точкой при вращении гироскопа является его центр инерции, а собственная ось вращения гироскопа может свободно поворачиваться в любом из трех взаимно перпендикулярных направлений. Таким образом, собственная ось вращения гироскопа является свободной. Это достигается с помощью так называемого карданова подвеса (рис. 4.9), в котором оси внешнего

$(0_1 0_1)$ и внутреннего $(0_2 0_2)$ колец и собственная ось гироскопа (00) пересекаются в одной точке: центре подвеса. Уравновешенные гироскопы являются основным элементом автоматического управления в навигационных приборах движущихся объектов (самолетов, кораблей, ракет и т.д.), а также используются в приборах для измерения угловых и линейных скоростей. Действие подобных приборов основано на главном свойстве гироскопа: при любых поворотах оси внешнего кольца,

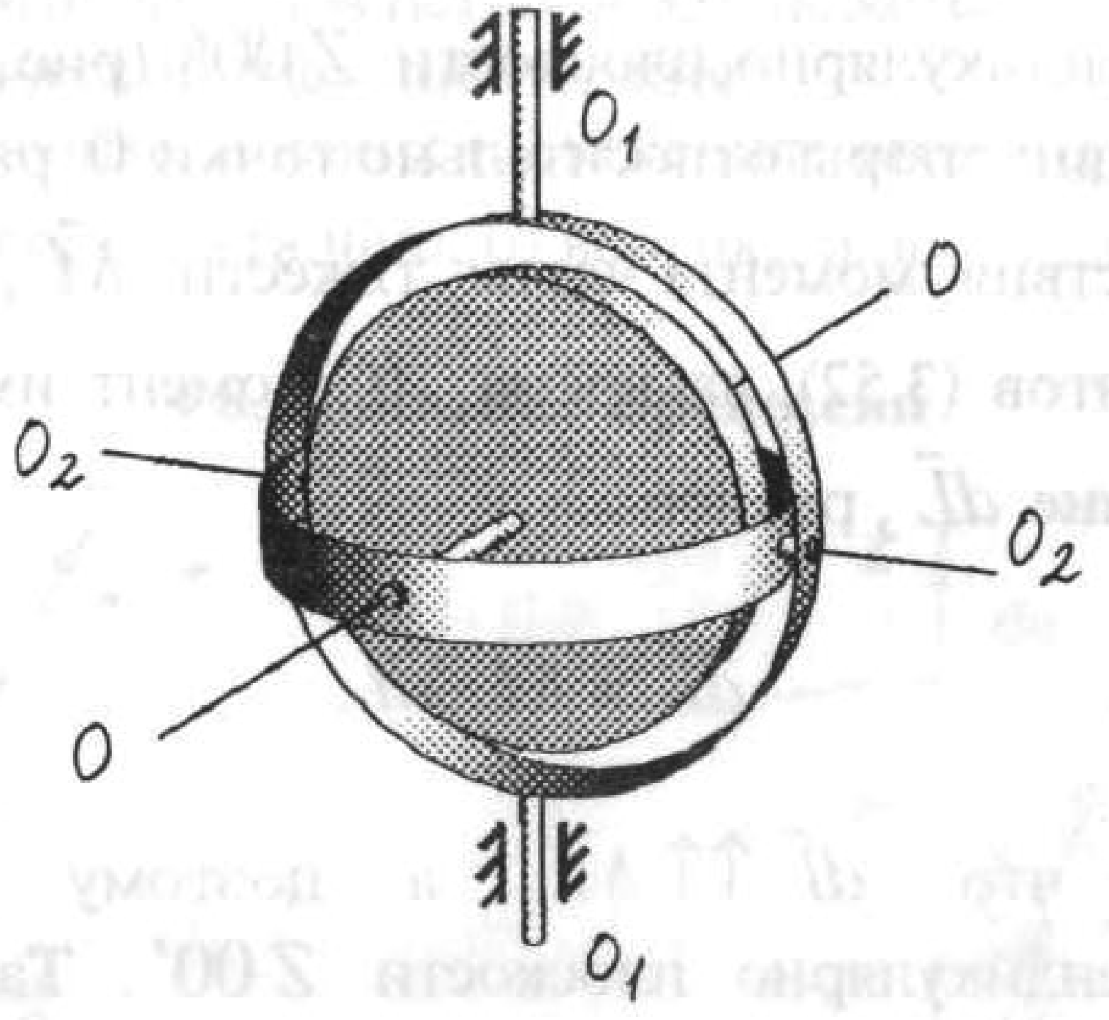


Рис. 4.9

неподвижной относительно движущегося объекта (например, самолета), собственная ось вращения гироскопа 00 не изменяет своей ориентации в пространстве. Это свойство непосредственно следует из закона сохранения момента импульса.

5. ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (СТО)

5.1. Преобразования Галилея. Принцип относительности Галилея

Как уже указывалось в п. 1.3.1, характер и вид движения материальной точки очень сильно зависит от выбора системы отсчета.

Наибольший интерес в классической механике представляют системы отсчета, в которых свободная, то есть невзаимодействующая с окружающими объектами, материальная точка движется равномерно и прямолинейно (в частности, покоится). Такие системы отсчета получили название ***инерциальных.***

В действительности совершенно свободных тел не существует, поэтому инерциальные системы отсчета являются идеализированными физическими моделями.

Рассмотрим некоторую инерциальную систему отсчета K, которую примем условно за неподвижную, и систему отсчета K', которая движется относительно системы K равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{u}$. В классической механике одним из фундаментальных предположений является утверждение, что время во всех системах отсчета течет одинаково, то есть $t = t'$. Это утверждение является следствием одной из основополагающих гипотез классической механики:

Возмущения силовых полей, несущих информацию об изменении состояния взаимодействующих тел, распространяются в пространстве мгновенно, то есть с бесконечно большой скоростью.

Положение материальной точки относительно систем отсчета K и K' в момент времени t будет описываться соотношением (рис.5.1)

$$\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t) + \vec{u} \cdot t, \qquad (5.1)$$

при условии, что при $t = 0$ начала координат систем отсчета K' и K совпадают.

Если оси координат $0X$ и $0X'$ систем K и K' направить вдоль $\vec{u}$, а $0Y$ и $0Y'$, $0Z$ и $0Z'$ параллельно друг другу соответственно (рис. 5.2), то выражение (5.1) в проекциях на оси координат систем K и K' примет вид

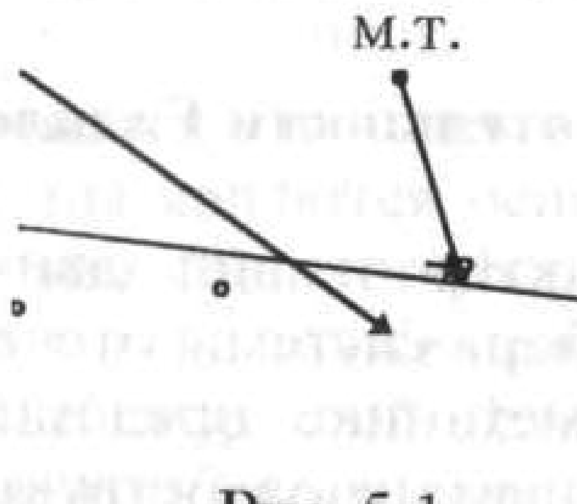


Рис. 5.1

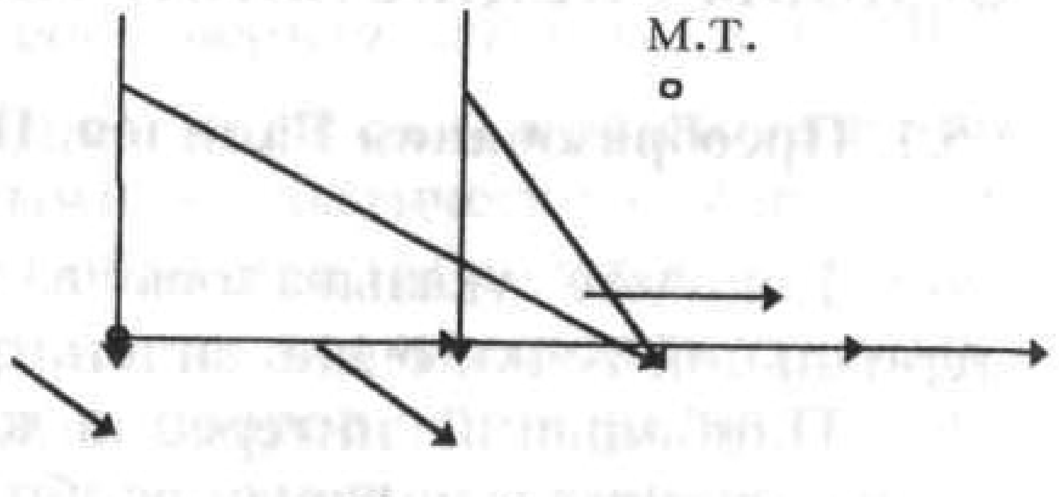


Рис. 5.2

$$\begin{cases} x = x' + u \cdot t, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = t' \end{cases} \qquad (5.2)$$

Уравнения (5.1) и (5.2) называются ***преобразованиями Галилея*** и позволяют, зная состояние материальной точки в одной инерциальной системе отсчета K', описывать состояние этой точки в другой инерциальной системе отсчета K и наоборот.

Отметим, что дифференцирование по времени выражения (5.1) дает ***классический закон сложения скоростей***

$$\vec{\upsilon}(t) = \vec{\upsilon}'(t) + \vec{u}\,. \qquad (5.3)$$

При дифференцировании выражения (5.3) с учетом $\vec{u} = const$ получим

$$\vec{a} = \vec{a}'. \qquad (5.4)$$

Из равенства (5.4) следуют два важных вывода:

1) ***Любая система отсчета K', движущаяся относительно некоторой инерциальной системы отсчета K равномерно и прямолинейно, также является инерциальной.***

Действительно, если система K инерциальна, то у свободной материальной точки в этой системе $\vec{a} = 0$, следовательно, в системе K', движущейся относительно K с $\vec{u} = const$, у этой

материальной точки $\vec{a}' = 0$ (5.4). Поэтому K' тоже инерциальна.

2) ***Все инерциальные системы отсчета совершенно равноправны. Уравнения динамики при переходе от одной инерциальной системы к другой не изменяют своего вида, то есть инвариантны по отношению к преобразованиям Галилея.***

Этот вывод фактически является содержанием ***принципа относительности Галилея.***

Контрольные вопросы.

5.1. Покажите, что в рамках ньютоновской механики закон сохранения импульса инвариантен относительно преобразований Галилея.

5.2. Опыт Майкельсона. Постулаты теории относительности

В ньютоновской механике пространству и времени приписывались некие ***абсолютные*** свойства, не зависящие от наличия материальных объектов и движения этих объектов. Это позволяло говорить о некоторой универсальной, “абсолютной” инерциальной системе отсчета.

Многочисленные попытки опытным путем обнаружить такую систему отсчета, связанную с “абсолютным” пространством, неизменно давали отрицательный результат.

Другим потрясением основ классической механики явилось невозможность на ее основе объяснить процессы распространения света. Из ньютоновской механики следовало, что скорость света должна существенным образом зависеть от относительной скорости движения источника и приемника света, а, значит, в различных инерциальных системах отсчета скорость света должна быть различной.

Одной из самых решающих попыток обнаружить “абсолютную” систему отсчета, а, значит, и относительность скорости света в различных инерциальных системах отсчета была предпринята в серии опытов А. Майкельсоном в 1881 году, а затем совместно с Е. Морли в 1887 году.

Не касаясь здесь технического описания экспериментальной установки и схемы самих опытов, отметим, что погрешность опытов почти в 50 раз была меньше ожидавшихся результатов. Многочисленное повторение опытов в различных условиях давало неизменно отрицательный результат: скорость света не зависит от относительного движения источника и приемника света, то есть в любых инерциальных системах отсчета скорость света имеет универсальное, неизменное значение, равное

$c = (2{,}997925 \pm 0{,}000003) \cdot 10^8$ м/с.

Отметим, что различные опытные данные свидетельствуют о том, что скорость света является предельной скоростью движения любых материальных объектов и любых возмущений силовых полей.

Перечисленные факты требуют пересмотра основных постулатов классической ньютоновой механики.

Объяснение опытных фактов, противоречащих классической механике, было дано А. Эйнштейном в рамках новой механики, которая получила название специальной теории относительности (СТО), или релятивистской теории.

В основе СТО лежат два постулата.

Принцип относительности Эйнштейна

Любое физическое явление независимо от его природы протекает одинаково во всех инерциальных системах отсчета.

Это означает, что не только с помощью механических опытов (принцип относительности Галилея), но и с помощью любых опытов невозможно выделить какую-либо одну инерциальную систему отсчета, по сравнению с другой: все они совершенно равноправны. Другими словами, при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой вид любого физического закона остается ***инвариантным***.

Принцип постоянства (инвариантности) скорости света

Скорость света в вакуме не зависит от относительной скорости источника света и его приемника и одинакова во всех инерциальных системах отсчета.

Механика, построенная на этих принципах, коренным образом изменила представления о пространстве и времени как существующих независимо от материальных объектов.

5.3. Преобразования Лоренца

Преобразования Галилея (5.1) и (5.2) противоречат опытным фактам, концентрированными выводами из которых являются постулаты СТО. А. Эйнштейн показал, что для одновременного выполнения постулатов СТО необходимо заменить преобразования Галилея другими преобразованиями, которые были получены Лоренцом раньше создания СТО.

В случае перехода от системы отсчета K' к системе K (рис. 5.2) преобразования Лоренца имеют вид

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + u \cdot t'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \dfrac{t' + u \cdot x'/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \end{cases} \qquad (5.5)$$

Переход от системы K к системе K' осуществляется заменой в (5.5) (x, y, z, t) на (x', y', z', t') и наоборот, а u на $-u$.

Из вида (5.5) непосредственно следует, что при $u \ll c$ преобразования Лоренца переходит в преобразования Галилея (5.2), а это означает, что механика Ньютона является предельным случаем СТО.

В соответствии с тем, что скорость света в вакууме является предельной, из (5.5) видно, что при $u > c$ формулы преобразований Лоренца теряют смысл.

Мы не будем здесь приводить прямой вывод преобразований Лоренца. В их справедливости предлагаем убедиться читателю из рассмотрения следующего примера.

Пусть в некоторый момент $t_0 = t'_0 = 0$ начала координат систем K и K' совпадали. Если в этот момент в начале координат систем K и K' точечный источник испускает короткую вспышку света, то спустя промежуток времени t в системе K свет достигнет точек, лежащих на поверхности сферы с центром в начале координат системы K и радиусом R, равным $R = ct$, то есть

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 \cdot t^2. \qquad (5.6)$$

Этот же процесс в системе K' будет описываться уравнением

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = c^2 (t')^2, \qquad (5.7)$$

в соответствии с принципом постоянства скорости света.

Очевидно, что преобразования координат, удовлетворяющие постулатам СТО, должны оставлять вид уравнений (5.6) и (5.7) инвариантным при переходе от одной системы отсчета K' к другой K и наоборот.

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что преобразования Галилея (5.2) не удовлетворяют этим требованиям, а преобразования Лоренца оставляют инвариантными уравнения (5.6) и (5.7).

В этом пункте необходимо более подробно обсудить содержание понятия “система отсчета”. Как указывалось в 1.3.1, в понятие системы отсчета входит система координат, связанная с телом отсчета, и часы, неподвижные относительно тела отсчета. Для описания какого-либо события в данной системе отсчета необходимо знать, где относительно тела отсчета и в какой момент времени это событие происходит. На эти вопросы можно ответить, если каждой точке пространства приписать координаты путем откладывания вдоль осей координат эталонного масштаба, принятого за единицу.

Для сравнения моментов времени, в которые происходят два события в разных точках, необходимо в этих точках иметь часы, которые должны идти синхронно.

Опишем процесс синхронизации часов. Пусть в точках А и В данной системы отсчета находятся часы.

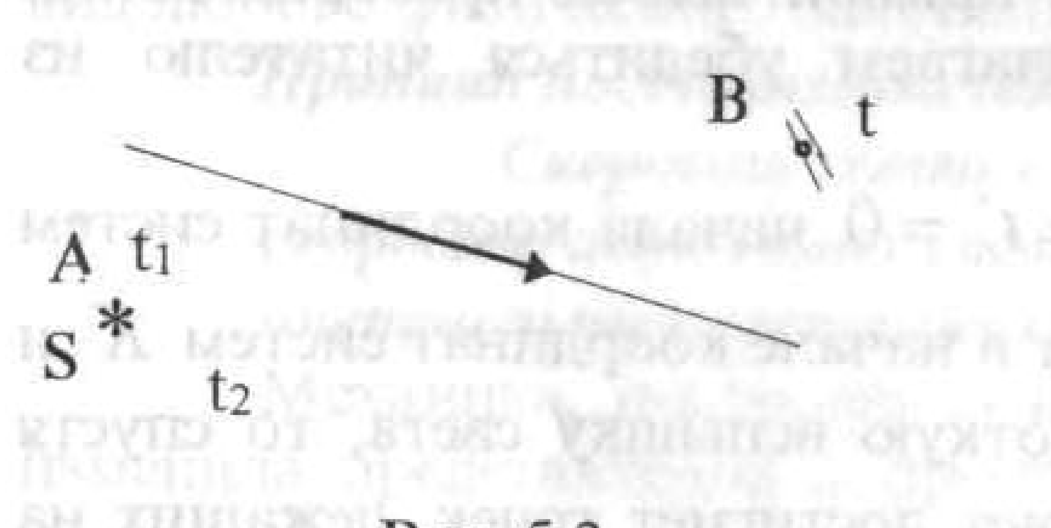


Рис. 5.3

Из точки А в направлении В испускается световой импульс, который после отражения возвращается в точку А. Часы в А и В считаются синхронизированными, если момент испускания t_1 светового импульса по часам А, момент его отражения t по часам В и момент возврата в точку А t_2 по часам А связаны соотношением

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2}. \tag{5.2}$$

Такую синхронизацию проводят для всех часов, находящихся в каждой точке данной системы отсчета.

Теперь можно сказать, что два события, происходящие в разных точках данной системы отсчета, одновременны, если соответствующие показания часов, находящихся в этих точках, совпадают.

В заключение этого пункта отметим, что время t и t', входящее в преобразования Лоренца, измеряется по часам, которые синхронизированы в системе K и в системе K', соответственно.

Контрольные вопросы.

5.2. Покажите, что преобразования Галилея являются предельным случаем преобразований Лоренца.

5.3. Убедитесь, что преобразования Лоренца удовлетворяют утверждению, что скорость света в вакууме является предельной скоростью движения материальных объектов.

5.4. Следствия из преобразований Лоренца

В этом пункте будут рассмотрены некоторые наиболее впечатляющие физические эффекты, существование которых можно объяснить в рамках СТО.

5.4.1. Лоренцовское сокращение длины

Сущность эффекта заключается в следующем: продольные размеры тела, движущего относительно наблюдателя, оказываются меньше, чем для наблюдателя, относительно которого это тело покоится.

Напомним, что размеры какого-либо тела определяются как разность координат его крайних точек, которые должны быть измерены в данной системе отсчета ***в один и тот же момент времени.***

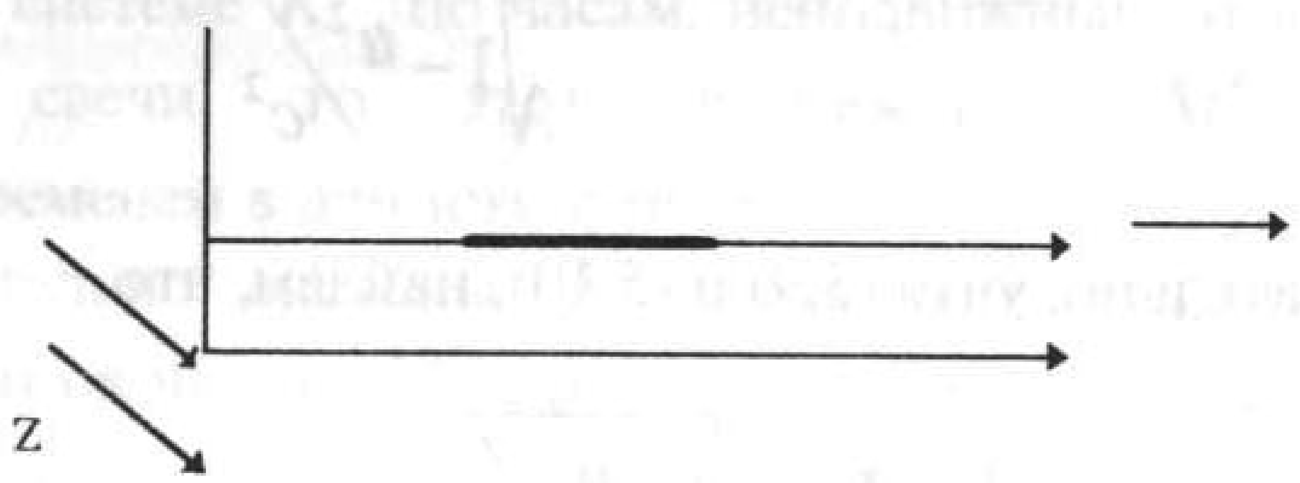


Рис. 5.4

В качестве примера рассмотрим тонкий стержень, неподвижный относительно системы K' и расположенный вдоль оси $0X'$ (рис. 5.4).

Очевидно, что, поскольку стержень неподвижен относительно системы K', то координаты его начала x_1' и конца x_2' с течением времени остаются неизменными, поэтому требование одновременности $t_1' = t_2'$ их измерения в этой системе отсчета несущественно.

Длина стержня

$$\Delta x' = x_2' - x_1' = \ell_0, \tag{5.9}$$

неподвижного относительно данной системы отсчета K', называется ***собственной длиной***.

В системе K, относительно которой стержень движется со скоростью $\vec{u}$, его длина

$$\ell = \Delta x = x_2 - x_1, \qquad (5.10)$$

причем координаты x_1 и x_2 должны быть измерены наблюдателем, находящимся в системе K, одновременно, то есть $t_1 = t_2$.

Используя обратные преобразования Лоренца для координат концов неподвижного относительно системы K' стержня

$$x_1' = \frac{x_1 - u \cdot t_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}; \quad x_2' = \frac{x_2 - u \cdot t_2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad t_1 = t_2,$$

получим

$$\Delta x' = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Окончательно, учтя (5.9) и (5.10), найдем, что

$$\ell = \ell_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \qquad (5.11)$$

Таким образом, действительно, длина стержня ℓ, измеренная наблюдателем, относительно которого стержень движется, оказывается меньше длины неподвижного стержня ℓ_0.

Контрольные вопросы.

5.4. Покажите, что собственная длина ℓ_0 является инвариантом относительно преобразований Лоренца.

5.5. Убедитесь, что поперечные размеры тела в различных инерциальных системах отсчета одинаковы.

5.4.2. Относительность промежутков времени

Оказывается, что длительность одного и того же явления, измеренного по неподвижным и движущимся относительно наблюдателя (явления) часам, различна. Это различие, естественно, наблюдается только при движениях со скоростями, сравнимыми со скоростью света в вакууме, то есть является релятивистским эффектом.

Для примера рассмотрим длительность горения обыкновенной стеариновой свечи. Пусть эта свеча неподвижна относительно системы K', следовательно, за время ее горения $\Delta t'$ от момента t_1' до момента t_2'

$$\Delta t' = t_2' - t_1' \qquad (5.12)$$

ее положение в системе отсчета K' не изменяется, то есть $x_1' = x_2'$.

Промежуток времени Δt_0, измеренный по часам, неподвижным относительно тела, участвующего в данном явлении, называется в релятивистской механике ***собственным временем***. Поскольку промежуток времени $\Delta t'$ в данном случае измеряется наблюдателем, находящимся в системе K', по часам, неподвижным относительно K' и относительно свечи, то этот промежуток $\Delta t' = \Delta t_0$ является собственным временем в данном примере.

Относительно системы K свеча движется, поэтому начало горения t_1 и его окончание t_2 происходят в различных точках системы K. Наблюдатель, находящийся в системе K и измеряющий моменты t_1 и t_2 движущейся относительно него свечи по часам системы K, определяет время ее горения как

$$\Delta t = t_2 - t_1. \qquad (5.13)$$

Отметим еще раз, что Δt - длительность явления (горения свечи), измерена движущимися часами.

Теперь из (5.5) следует, что

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{u \cdot x_1'}{c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad t_2 = \frac{t_2' + \frac{u \cdot x_2'}{c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad x_1' = x_2'. \qquad (5.14)$$

Поэтому

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

или окончательно,

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \qquad (5.15)$$

Таким образом, для наблюдателя, находящегося в системе K, относительно которого свеча движется, она горит дольше, чем для наблюдателя системы K'.

В более общей форме этот результат можно трактовать так: ***движущиеся часы идут медленнее $(\Delta t_0 < \Delta t)$, чем покоящиеся.***

Кроме того, из (5.15) видно, что собственное время минимально.

Одним из наиболее убедительных экспериментальных подтверждений справедливости полученного результата являются опыты по регистрации космических лучей вблизи поверхности Земли. Известно, что в результате взаимодействия космических лучей с атмосферой Земли в ее верхних слоях образуются нестабильные частицы μ - мезоны (мю - мезоны), собственное время жизни которых, измеренное в экспериментах на ускорителях, составляет приблизительно $2 \cdot 10^{-6}$ с. За это время для наблюдателя, движущегося вместе с мезоном, мезон, двигаясь даже со скоростью света, смог бы пролететь расстояние всего около 600м. Однако, образуясь в верхних слоях атмосферы, мезоны регистрируются у поверхности Земли, т.е. за время жизни успевают пролететь $\sim 20 \div 30$ км. Это непосредственно означает, что для наблюдателя, относительно которого мезон движется, его время жизни значительно больше, чем $\Delta t_0 \approx 2 \cdot 10^{-6}$ с, и позволяет ему пролететь от точки рождения до поверхности Земли.

Контрольные вопросы.

5.6. Покажите, что собственное время одинаково во всех инерциальных системах отсчета, то есть инвариантно относительно преобразований Лоренца.

5.4.3. Относительность одновременности

В механике больших скоростей $(\upsilon \sim c)$ существует еще один интересный эффект, связанный с относительностью понятия одновременности.

Определим вначале это понятие.

События называются <u>одновременными</u>, если они происходят в один и тот же момент времени, измеренный по часам этой системы координат.

Пусть в системе отсчета K' происходят два каких-либо события:

- первое в точке x_1' в момент t_1';

- второе в точке x_2' в момент t_2'.

Для этих событий в системе K:

а) если эти события в системе K' пространственно совмещены $(x_1' = x_2')$ и происходят одновременно $(t_1' = t_2')$, то, как непосредственно следует из (5.5), пространственная совмещенность $(x_1 = x_2)$ и одновременность $(t_1 = t_2)$ сохраняется в любой другой инерциальной системе отсчета;

б) если в системе K' в ее различных точках $(x_1' \neq x_2')$ происходят два одновременных события $(t_1' = t_2')$, то в системе отсчета K, движущейся относительно K', эти события остаются пространственно разобщенными $(x_1 \neq x_2)$ и становятся ***неодновременными*** $(t_2 \neq t_1)$. Действительно, из преобразований (5.5)

$$x_1 = \frac{x_1' + ut_1'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \qquad t_1 = \frac{t_1' + \frac{u \cdot x_1'}{c^2}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}};$$

$$x_2 = \frac{x_2' + ut_2'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}; \qquad t_2 = \frac{t_2' + u\cdot x_2'/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}};$$

С учетом

$$t_1' = t_2'.$$

следует

$$x_2 - x_1 = \frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \neq 0 \quad \text{и}$$

$$t_2 - t_1 = \frac{(x_2' - x_1')\cdot u/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \neq 0. \qquad (5.16)$$

Последнее соотношение и доказывает тот факт, что ***одновременность*** в механике релятивистских скоростей понятие ***относительное.***

5.5. Релятивистский закон сложения скоростей

Одним из важнейших вопросов релятивистской кинематики является установление правила преобразования скоростей при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Дело в том, что закон сложения скоростей (5.3), следующий из преобразований Галилея, предполагает существование движений со скоростями, большими скорости света в вакууме, что противоречит основным принципам СТО. Установить вид преобразования скорости в релятивистском случае несложно. Для этого продифференцируем равенства (5.5)

$$dx = \frac{dx' + u\cdot dt'}{\sqrt{1-u^2/c^2}};$$

$$dy = dy';$$

$$dz = dz';$$

$$dt = \frac{dt' + \frac{u}{c^2}\cdot dx'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

Первые три равенства почленно разделим на четвертое:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + u\,dt'}{dt' + \frac{u}{c^2}\cdot dx'}; \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{dy'\sqrt{1-u^2/c^2}}{dt' + \frac{u}{c^2}\cdot dx'};$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz'\sqrt{1-u^2/c^2}}{dt' + \frac{u}{c^2}\cdot dx'}.$$

В правых частях последних равенств произведем почленное деление числителя и знаменателя на dt' и с учетом $\frac{dx}{dt} = \upsilon_x, \frac{dy}{dt} = \upsilon_y, \frac{dz}{dt} = \upsilon_z, \frac{dx'}{dt'} = \upsilon_x', \frac{dy'}{dt'} = \upsilon_y', \frac{dz'}{dt'} = \upsilon_z'$ получим выражения для проекций векторов скорости $\vec{\upsilon}$ и $\vec{\upsilon}'$ в виде

$$\upsilon_x = \frac{\upsilon_x' + u}{1 + \frac{u\cdot\upsilon_x'}{c^2}}; \; \upsilon_y = \frac{\upsilon_y'\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 + u\cdot\upsilon_x'/c^2}; \; \upsilon_z = \frac{\upsilon_z'\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 + u\cdot\upsilon_x'/c^2}. \quad (5.17)$$

Выражения для проекций скоростей в системе K' легко получить заменой в соотношениях (5.17) $\vec{\upsilon}$ на $\vec{\upsilon}'$ и наоборот, и u на $-u$, то есть

$$\upsilon_x' = \frac{\upsilon_x - u}{1 - u\cdot\upsilon_x/c^2}; \; \upsilon_y' = \frac{\upsilon_y\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - u\cdot\upsilon_x/c^2}; \; \upsilon_z' = \frac{\upsilon_z\sqrt{1-u^2/c^2}}{1 - u\cdot\upsilon_x/c^2}. \quad (5.18)$$

Равенства (5.17) и (5.18) в теории относительности носят название ***релятивистского закона сложения скоростей*** и позволяют, зная скорость частицы в одной инерциальной системе отсчета, находить скорость этой частицы в другой инерциальной системе отсчета.

Легко видеть, что для систем отсчета K и K', изображенных на рис. 5.2, в случае $u << c$; $|\vec{\upsilon}'| << c$ формулы (5.17) переходят в классический закон сложения скоростей (5.3), записанный в проекциях на оси координат систем K и K':

$$\upsilon_x = \upsilon'_x + u; \qquad \upsilon_y = \upsilon'_y; \qquad \upsilon_z = \upsilon'_z.$$

Контрольные вопросы.

5.7. Покажите, используя (5.17) или (5.18), что если в одной из инерциальных систем отсчета скорость частицы приближается к скорости света в вакууме c, то и в любой другой инерциальной системе отсчета она стремится к c.

5.6. Релятивистские импульс и масса частицы

В этом и последующих пунктах будут введены основные понятия и соотношения релятивистской динамики. Необходимость пересмотра классических представлений динамики Ньютона при переходе к динамике релятивистских скоростей вытекает из следующих соображений.

Как уже указывалось в пункте 5.1, из преобразований Галилея (5.2) следует (5.4), что непосредственно свидетельствует об инвариантности второго закона Ньютона по отношению к преобразованиям Галилея.

Нетрудно показать, что в релятивистском случае связь между ускорениями $\vec{a}$ и $\vec{a}'$ в различных инерциальных системах отсчета более сложная. В частности, для a_x и a'_x она имеет вид

$$a_x = a'_x \cdot \left(\frac{\sqrt{1 - u^2/c^2}}{1 + u \cdot \upsilon'_x/c^2} \right)^3. \tag{5.19}$$

Это означает, что произведение $m\vec{a} = \dfrac{d(m\vec{\upsilon})}{dt}$ ***с независящей от скорости массой*** m не является ***инвариантом*** относительно преобразований Лоренца. Поэтому классическое определение импульса частицы $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ для релятивистского случая требует уточнения. Можно показать, что правильное выражение для импульса частицы в релятивистском случае имеет вид

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}. \tag{5.20}$$

Наиболее строго это следует из требования ***инвариантности*** закона сохранения импульса относительно преобразований Лоренца. В случае $\upsilon << c$ релятивистское выражение (5.20) переходит в классическое, как и должно быть, $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$.

Если ввести понятие релятивистской массы частицы

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}, \tag{5.21}$$

где m - независящая от скорости (инвариантная) величина, называемая ***массой покоя***, то формально сохраняется классический вид определения импульса $\vec{p} = m_r\vec{\upsilon}$.

Релятивистски инвариантный основной закон динамики

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} \right) \tag{5.22}$$

имеет ту же форму, что и классический второй закон Ньютона, но с учетом релятивистского (5.20) выражения для импульса частицы.

Отметим, что из определения релятивистской массы (5.21) непосредственно следует, что СТО допускает движение со скоростью $\upsilon = c$ только таких частиц, у которых масса покоя m равна ***нулю***. Более того, из

(5.21) видно, что такие частицы могут существовать только в единственном состоянии, двигаясь точно со скоростью c.

Контрольные вопросы.

5.8. Докажите справедливость (5.19).

5.9. Как будут изменяться компоненты скорости $\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z$ релятивистской частицы, если на нее подействует сила, направленная в ту же сторону, что и υ_x?

5.7. Релятивистская энергия

Рассмотрим ситуацию, когда на частицу действует некоторая сила $\vec{F}$, которая, очевидно, совершает над частицей при ее перемещении на $d\vec{r}$ работу

$$\delta A = \left(\vec{F} \cdot d\vec{r}\right),$$

что приводит к эквивалентному приращению кинетической энергии частицы

$$dT = \delta A.$$

Элементарную работу δA определим, используя (5.22):

$$dT = \delta A = \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \right) \cdot d\vec{r} \right).$$

Учтя, что $d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt$, получим для приращения кинетической энергии

$$dT = \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \right) \cdot \vec{\upsilon}dt \right) = \left(d\left(\frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \right) \cdot \vec{\upsilon} \right).$$

Преобразуем правую часть последнего равенства:

$\vec{\upsilon} \cdot d\left(\dfrac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \right)$. Для этого выполним дифференцирование дроби в правой части и учтем, что $\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon} = d\left(\dfrac{\upsilon^2}{2}\right)$, после чего получим:

$$dT = \frac{md\left(\upsilon^2/2\right)}{\left(1-\upsilon^2/c^2\right)^{3/2}} = \frac{mc^2 d\left(\upsilon^2/c^2\right)}{2\left(1-\upsilon^2/c^2\right)^{3/2}} = d\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} \right).$$

Интегрирование последнего равенства дает релятивистское выражение для кинетической энергии частицы

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - mc^2, \qquad (5.23)$$

которое существенно отличается от классического. Однако, как и должно быть, в предельном случае $\upsilon << c$ соотношение (5.23) переходит в известное $T = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$. Действительно, разлагая в (5.23) дробь $\dfrac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$ в ряд по малым степеням отношения υ^2/c^2 и пренебрегая слагаемыми более высоких степеней, чем υ^2/c^2, получим

$$T = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - 1 \right) \approx mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} - 1\right) = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Нетрудно заметить, что в (5.23) определяющей является величина

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = m_r \cdot c^2, \qquad (5.24)$$

которая называется ***полной релятивистской энергией частицы***, а

$$E_0 = mc^2 \qquad (5.25)$$

- ее ***энергией покоя***.

Выражению (5.23) с учетом (5.24) и (5.25) теперь можно придать другой вид:

$$T = \Delta E = E - E_0 = m_r \cdot c^2 - mc^2 = c^2 \cdot \Delta m_r. \qquad (5.26)$$

Здесь следует отметить очень важный факт, что приращение полной энергии частицы в виде

$$\Delta E = \Delta m_r \cdot c^2$$

имеет более глубокий смысл, чем просто величина, определяющая кинетическую энергию релятивистской частицы. А. Эйнштейн обобщил это соотношение, предположив, что любое изменение массы материального объекта приводит к соответствующему изменению полной энергии этого объекта и наоборот:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2. \qquad (5.27)$$

В этом смысле говорят об эквивалентности энергии и массы:

$$E = mc^2. \qquad (5.28)$$

Формулы А. Эйнштейна (5.27) и (5.28) в равной степени выражают один из ***фундаментальных законов природы***: закон взаимосвязи (эквивалентности) энергии и массы любой системы.

Отметим, что выражения (5.27) и (5.28) не учитывают потенциальную энергию системы, как целого, во внешних силовых полях.

Выводы:

1. ***Релятивистская кинетическая энергия частицы определяется приращением ее полной энергии (5.23), (5.26).***
2. ***Полная энергия системы и ее масса связаны универсальной формулой А. Эйнштейна (5.28).***

Контрольные вопросы.

5.10. Определите величину относительного возрастания массы воды при ее нагревании от $t_1 = 0^0C$ до $t_k = 100^0C$. Удельная теплоемкость воды $c_1 = 4.19 \cdot 10^3$ Дж/кг·К.

5.11. Оцените величину относительного возрастания массы метеорита при его падении из бесконечности на поверхность Земли.

5.12. Определите величину относительного возрастания массы при распаде ядра дейтерия ${}_1^2H$ на протон и нейтрон. Энергия связи ядра дейтерия $W = 2.2$Мэе $= 3.52 \cdot 10^{-13}$ Ђс, а его масса покоя $m_Ш = 3.34 \cdot 10^{-27}$ ђс.

5.8. Связь релятивистской энергии и импульса частицы

Искомое соотношение не трудно получить, рассмотрев выражения для релятивистской энергии

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$$

и импульса частицы

$$\vec{p} = \frac{m\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}.$$

Разделив второе равенство для $\vec{p}$ на первое, получим искомое выражение в векторной форме

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2} \cdot \vec{\upsilon}. \qquad (5.30)$$

Если же из этих формул отключить скорость частицы υ (для этого формулу для $\vec{p}$ нужно записать в скалярной форме), то после несложных преобразований будем иметь

$$E = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}\,. \qquad (5.31)$$

Отметим, что формулы связи энергии и импульса частицы (5.30) и (5.31) равнозначны, так как получены из одних и тех же соотношений для E и $\vec{p}$.

Из формул (5.30) и (5.31) еще раз вытекает тот факт, что двигаться со скоростью, равной скорости света в вакууме c, могут только те частицы, у которых масса покоя ***тождественно*** равна нулю. Действительно, если $\upsilon = c$, то из (5.30) имеем $p = \dfrac{E}{c}$. То же самое соотношение может быть получено из (5.31) при $m \equiv 0$.

Для любознательных читателей отметим здесь, что связь между полной энергией и импульсом частицы в форме (5.31) является ***инвариантом*** по отношению к преобразованиям энергии и импульса при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Контрольные вопросы.

5.13. Покажите, что в нерелятивистском случае формула (5.31) переходит в

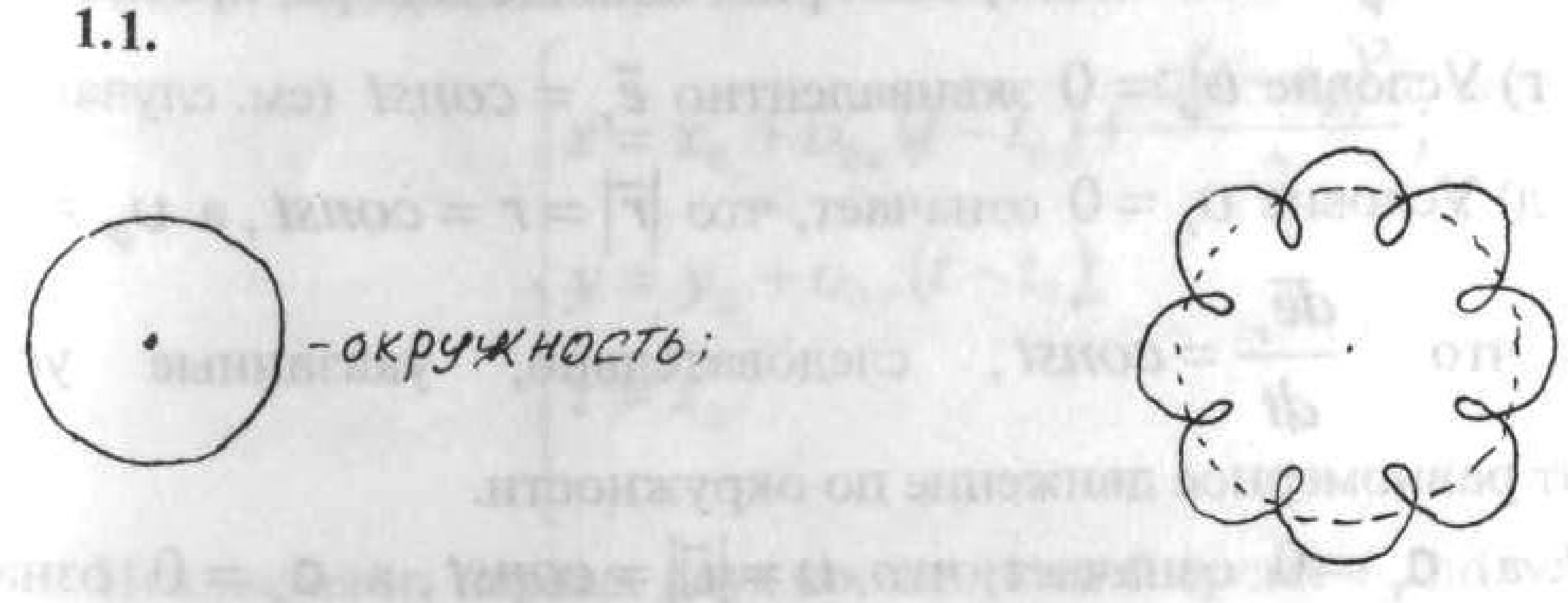
$$E = mc^2 + \frac{p^2}{2m},$$

отличающуюся от классического выражения для кинетической энергии $T = \dfrac{p^2}{2m}$ слагаемым mc^2.

6. ОТВЕТЫ НА КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Кинематика

1.1.



1.2. а) $|\Delta\vec{r}| = \ell_{12}$ - движение прямолинейное, $\ell_{12} \neq S_{12}$ - на участке 1-2 направление движения изменяется;

$|\Delta\vec{r}| \neq \ell_{12}$ - движение криволинейное, $\ell_{12} = S_{12}$ - направление движения не изменяется.

1.4. $$|\vec{\upsilon}| = \left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}\cdot\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta S} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}.$$

$$\left(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta S} = 1\right)$$

1.5. Может, если движение на прямолинейном участке траектории изменяет направление. Равенство $|\vec{\upsilon}| = \upsilon_{р}$ выполняется при неизменном направлении движения, когда $|\Delta\vec{r}| = S$.

1.6. а) Условие $\vec{e}_r = const$ означает, что при движении (см. 1.10) может изменяться только модуль радиус-вектора. Поэтому движение прямолинейное на одной из ветвей прямой, проходящей через точку отсчета. Характер этого движения может быть любой, он определяется зависимостью модуля радиус-вектора от времени $r = r(t)$.

б) Условие $\vec{\upsilon} = const$, означает, что направление вектора $\vec{\upsilon}$ неизменно (движение прямолинейное) и модуль скорости постоянен (движение равномерное).

в) $\upsilon_r = 0 \Rightarrow \dfrac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow r = const \Rightarrow$ траектория лежит на поверхности сферы.

$\upsilon_\varphi \neq 0 \Rightarrow$ вид траектории, вообще говоря, произволен.

г) Условие $\upsilon_\varphi = 0$ эквивалентно $\vec{e}_r = const$ (см. случай а)).

д) Условие $\upsilon_r = 0$ означает, что $|\vec{r}| = r = const$, а $\upsilon_\varphi = const$ означает, что $\dfrac{d\vec{e}_r}{dt} = \overrightarrow{const}$, следовательно, указанные условия определяют равномерное движение по окружности.

1.7. а) $a_\tau = 0$ означает, что $\upsilon = |\vec{\upsilon}| = const$, а $a_n = 0$ означает, что $R = \infty$. Оба условия выполняются, если движение равномерное и прямолинейное;

б) равнопеременное прямолинейное движение;

в) прямолинейное движение, характер его определяется зависимостью $a_\tau(t)$;

г) равномерное движение по винтовой линии.

1.8. Возможен только тривиальный случай $\vec{a}_n = 0$ (прямолинейное движение).

1.9. В этом случае $\vec{R}$ является радиусом кривизны траектории относительно мгновенной оси вращения.

1.10. а) равномерное вращение;

б) равнопеременное вращение вокруг мгновенной оси;

в) равнопеременное вращение вокруг неподвижной оси;

г) условие $\vec{\varepsilon} \perp \vec{\omega}$ означает, что $\vec{\varepsilon} = \omega \dfrac{d\vec{e}_\omega}{dt}$, а $|\vec{\varepsilon}| = \omega \left|\dfrac{d\vec{e}_\omega}{dt}\right| = const$ означает, что $\left|\dfrac{d\vec{e}_\omega}{dt}\right| = const$, то есть материальная точка равномерно $(\omega = const)$ вращается по окружности, плоскость которой в свою очередь равномерно поворачивается относительно неподвижного диаметра.

1.11. Если выбрать систему координат так, чтобы одна из ее плоскостей (например X0Y) совпадала с плоскостью, в которой лежат постоянные векторы $\vec{\upsilon}_0$ и $\vec{a}$, то в этом случае $\upsilon_{0z} = 0$ и $a_z = 0$, поэтому

из (1.38) сразу следует $z = z_0$, что и означает движение в плоскости, параллельной X0Y. Если при этом одну из осей (например 0X) направить вдоль $\vec{a}$, то (1.38) примет вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + \upsilon_{0x}(t - t_0) + \dfrac{a(t-t_0)^2}{2}; \\ y = y_0 + \upsilon_{0y}(t - t_0); \\ z = z_0. \end{cases}$$

Исключая из первых двух соотношений время t, получим:

$$x - x_0 = \frac{\upsilon_{0x}}{\upsilon_{0y}}(y - y_0) + \frac{a}{2\upsilon^2{}_{0y}}(y - y_0)^2$$ - уравнение параболы, лежащей в плоскости $z = z_0$.

1.12. Уравнения (1.39), (1.40) получаются непосредственно из (1.37) и (1.38) с учетом (1.27), (1.30) и (1.33) для модулей векторов.

1.13. а) Можно, вокруг мгновенной оси вращения.

б) Нельзя.

1.14. Может.

2. Динамика материальной точки

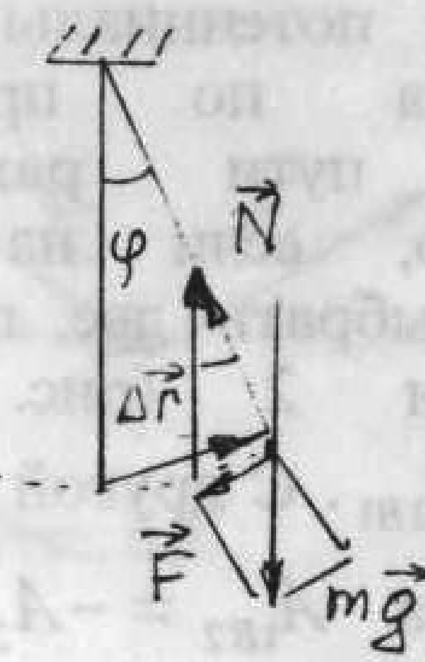


Рис. 6.1

2.2. Если $m_1 = m_2$ и $q_1 = q_2$, то

$$\frac{q}{m} = \sqrt{\frac{\gamma}{k}} \cong 8.6\cdot 10^{-11}\,\frac{\text{жс‘}}{\text{ħ‹}}.$$

2.3. Из рис. 6.1. видно, что при отклонении нити на угол φ от вертикали $(\upsilon = 0)$, $N = mg\cos\varphi$, а $F = mg\sin\varphi$. Если при этом $\varphi \ll \dfrac{\pi}{2}$, то $\sin\varphi \approx \varphi \approx \dfrac{|\Delta\vec{r}|}{\ell}$, поэтому $F \approx mg\dfrac{|\Delta\vec{r}|}{\ell}$.

В пределе при $\varphi \to 0$, $\vec{F} \uparrow\downarrow \Delta\vec{r}$.

2.4. При $\alpha \le \alpha_0$ (покой), $F_{тр} = mg\sin\alpha$.

При $\alpha > \alpha_0$ (скольжение), $F_{тр} = \mu mg\cos\alpha$, причем при $\alpha = \alpha_0 \Rightarrow tg\alpha_0 = \mu$. Здесь α - угол наклона.

3. Законы сохранения в механике

3.1. Может, при условии, что $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0$.

3.2. Могут, если до взаимодействия $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = 0$.

3.4. $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{F}$ - равнодействующая внешних сил, если система частиц - твердое тело.

3.5. $A_{12} = F \cdot \Delta r_{12,F}$, где $\Delta r_{12,F}$ - проекция результирующего вектора перемещения $\Delta\vec{r}_{12}$ на направление действия силы.

3.6. $A = 0$, так как $\vec{F} \perp \vec{\upsilon}$.

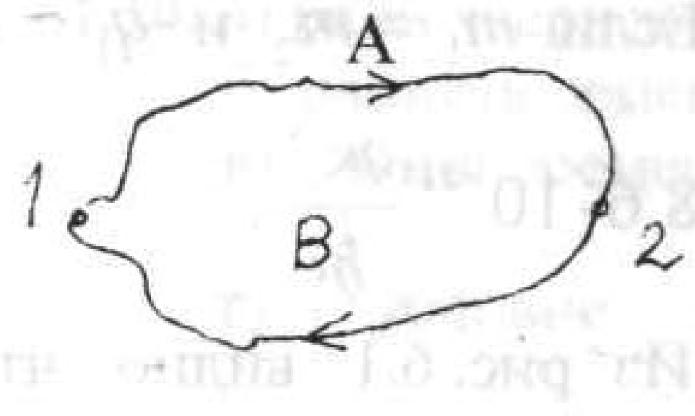


Рис. 6.2

3.7. В потенциальном силовом поле работа по произвольному замкнутому пути равна нулю. Действительно, если на замкнутой траектории выбрать две произвольные точки 1 и 2 (рис. 6.2.), то $A_0 = A_{1A2} + A_{2B1}$. С другой стороны, так как поле потенциально, то $A_{1A2} = A_{1B2}$, а $A_{1B2} = -A_{2B1}$. Поэтому $A_0 = 0$. В непотенциальном силовом поле работа по замкнутому пути может быть равна нулю, если $\vec{F} \perp \vec{\upsilon}$ в любой точке этого силового поля (пример: магнитное поле).

3.8. Силовое поле, изображенное на рис. 3.6, непотенциально, так как $A_0 \neq 0$. Действительно, для контура 12341 имеем $A_{12341} = A_{12} + A_{23} + A_{24} + A_{41} = A_{23} + A_{41}$. Здесь учтено, что (рис. 6.3)

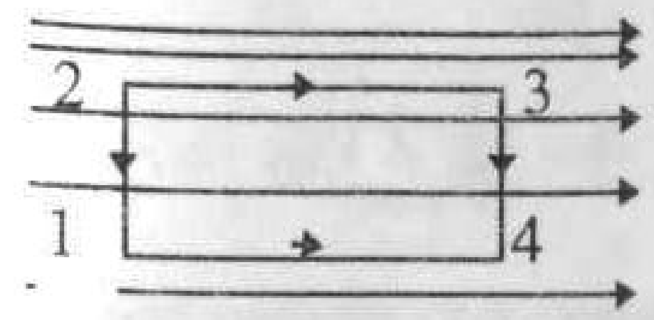


Рис. 6.3

$A_{12} = A_{34} = 0$, так как $\vec{F}_{12} \perp \vec{\upsilon}$ **и** $\vec{F}_{34} \perp \vec{\upsilon}$. Кроме того, для указанного поля $|\vec{F}_{41}| < |\vec{F}_{23}|$, поэтому $A_{23} > |A_{41}|$. С учетом $A_{23} > 0$, $A_{41} < 0$ имеем $A_{12341} > 0$.

3.9. Может, если $U < 0$ и $|U| > T$.

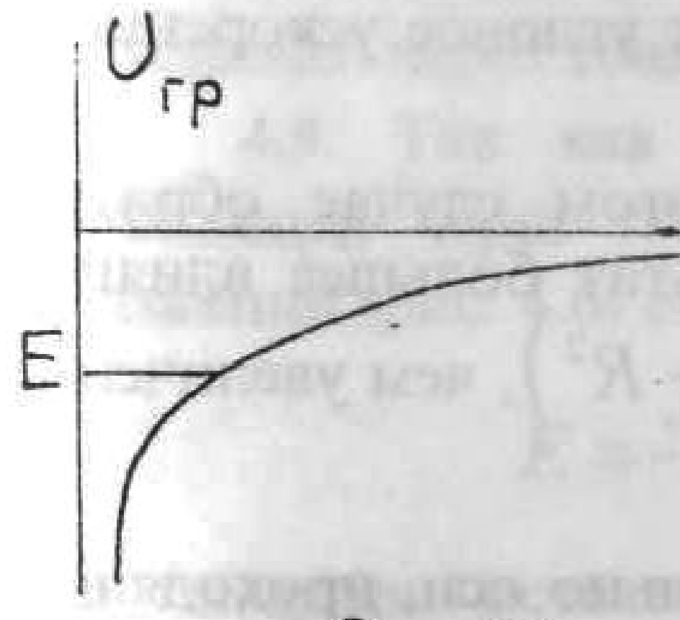


Рис. 6.4

3.10. Для того, чтобы тело было спутником некоторой планеты, оно должно совершать финитное движение. Так как потенциальная энергия тела в гравитационном поле планеты определяется соотношением (3.28), то из рис. 6.4 непосредственно видно, что полная механическая энергия должна быть в этом случае отрицательной.

3.12. В этом случае алгебраическая сумма проекций моментов сил на данное направление должна равняться нулю.

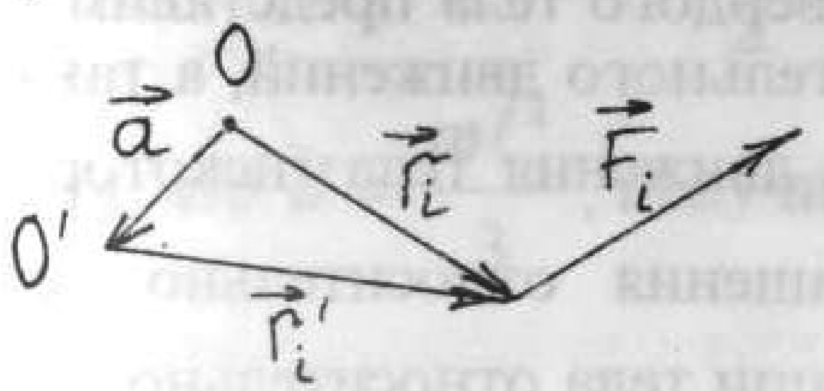


Рис. 6.5

3.13. Пусть $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0$, $\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i, \vec{F}_i] = 0$ относительно некоторой точки 0. Тогда относительно любой другой точки 0′ (рис. 6.5)

$$\vec{M}_{0'} = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i{}', \vec{F}_i] = \sum_{i=1}^{N} [(\vec{r}_i - \vec{\mathbf{a}}), \vec{F}_i] = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i, \vec{F}_i] - \left[\vec{\mathbf{a}}, \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i\right] = \vec{M}_0 = 0.$$

3.14. $L = |\vec{L}| = |[\vec{r}, \vec{p}]| = r \cdot p \cdot \sin\alpha = p \cdot r_{\min} = m\upsilon \cdot r_{\min}$.

Обозначения ясны из рис. 6.6. В ответе учтено, что

$$r_{\min} = r \cdot \sin\alpha = r\sin(\pi - \beta) = r \cdot \sin\beta .$$

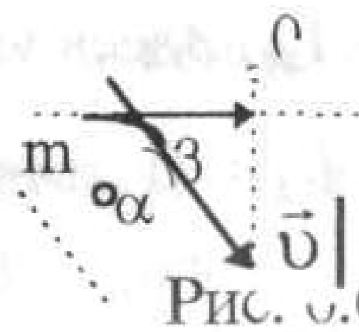


Рис. [illegible].6

4. Элементы динамики вращательного движения твердого тела

4.1. Можно. В этом случае ось вращения $0Z$ является мгновенной осью, а векторы $\vec{\varepsilon}_z$ и $\vec{M}_z$ определяют угловое ускорение и момент сил относительно этой мгновенной оси.

4.2. Угловое ускорение уменьшается в этом случае обратно пропорционально радиусу окружности. На результат большее влияние оказывает увеличение момента инерции точки $\left(J \sim R^2\right)$, чем увеличение величины момента касательной силы $(M \sim R)$.

4.4. При вращении твердого тела относительно оси, проходящей через неподвижный центр масс.

4.5. $T = \frac{1}{2} m\upsilon_0^2 + m\vec{R}_{љ.\sim} \cdot [\vec{\upsilon}_0 \cdot \vec{\omega}] + \frac{1}{2} J_0 \omega^2 .$

Здесь учтено, что плоское движение твердого тела представимо в виде совокупности поступательного и вращательного движений, а также (1.44) и (3.5). $\vec{\upsilon}_0$ - скорость поступательного движения тела (некоторой его точки 0); $\vec{\omega}$ - угловая скорость вращения относительно оси, проходящей через точку 0; J_0 - момент инерции тела относительно этой оси; $\vec{R}_{љ.''}$ - радиус-вектор центра масс относительно точки 0.

4.6. $$\delta A = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{f}_i \cdot d\vec{r}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{f}_i \cdot \vec{\upsilon}_i\right) dt = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{f}_i \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i]\right) dt .$$

Произведя циклическую перестановку сомножителей в смешанном произведении, получим:

$$\delta A = \left(\vec{\omega} \cdot \sum_{i-1}^{N} \left[\vec{r}_i \cdot \vec{f}_i\right]\right) dt = \left(\vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_{i‰'—\sim р}\right) dt = 0,$$

так как сумма моментов внутренних сил равна нулю (см. п. 3.9).

4.7. Смотри предыдущий ответ.

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N} \delta A_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i d\vec{r}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i \cdot \vec{\upsilon}_i\right) dt = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i \cdot [\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i]\right) dt =$$

$$= \left(\vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \cdot \vec{F}_i\right]\right) dt = \left(\vec{\omega} \cdot \vec{M}\right) dt = \left(\vec{M} \cdot d\vec{\varphi}\right) = M_z \cdot d\varphi$$

(последнее равенство справедливо в случае неподвижной оси вращения).

4.8. Да. $\delta A = \left(\vec{M} \cdot d\vec{\varphi}\right)$, где $\vec{M}$ - результирующий момент силы относительно некоторой неподвижной в данный момент времени точки 0, а $d\vec{\varphi}$ - элементарный угол поворота относительно мгновенной оси, проходящей через точку 0.

4.9. Так как стержень вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через точку 0, то его полная энергия в произвольном положении (рис. 4.6) определяется выражением

$$E = \frac{J\omega^2}{2} + mgh, \qquad \text{где} \quad h = \frac{\ell}{2} \cos\varphi .$$

Эта энергия остается постоянной, так как поле силы тяжести потенциально, а момент силы N относительно оси вращения равен нулю, поэтому работы не совершает. Итак,

$$\frac{J\omega^2}{2} + mg\frac{\ell}{2}\cos\varphi = mg\frac{\ell}{2} .$$

Учтя, что $J = \frac{m\ell^2}{3}$, получим для ω выражение

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}(1 - \cos\varphi)}$$

4.10. а) $\vec{N}$ - направлен горизонтально, если $N_y = 0$. Из (4.38) имеем $1 - 6\cos\varphi + 9\cos^2\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{1}{3} \Rightarrow \varphi_1 \approx 70^0 30'$ и $\varphi_2 \approx 289^0 30'$.

б) $\vec{N}$ - направлен вертикально, если $N_x = 0$. Из (4.37) имеем $\sin\varphi(3\cos\varphi - 2) = 0$. Откуда $\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi_1 = 0; \varphi_2 = 180^0$.

$$3\cos\varphi - 2 = 0 \Rightarrow \varphi_3 \approx 48^0 12'; \varphi_4 \approx 311^0 48'.$$

в) $\vec{N}$ - направлен вдоль стержня, если $\alpha = \varphi$ или $\alpha = \varphi + \pi$. В обоих случаях $tg\alpha = tg\varphi$, поэтому с учетом (4.37) и (4.38) имеем

$$tg\varphi = \frac{3\sin\varphi(3\cos\varphi - 2)}{1 - 6\cos\varphi + 9\cos^2\varphi},$$

что выполняется только при двух положениях стержня:

$$\varphi = 0 \quad \text{и} \quad \varphi = \pi.$$

5. Основы специальной теории относительности

5.1. Пусть в некоторой инерциальной системе отсчета K импульс системы N материальных точек постоянен:

$$\vec{P}_0 = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_i = const.$$

В другой инерциальной системе K' скорости материальных точек преобразуются в соответствии с (5.3):

$$\vec{\upsilon}_i = \vec{\upsilon}\,'_i + \vec{u}.$$

Поэтому

$$\vec{P}' = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}\,'_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_i - \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{u} = \vec{P}_0 - M \cdot \vec{u} = \overrightarrow{const}',$$

так как $\vec{u}$ - постоянна. Здесь учтено, что $\sum_{i=1}^{N} m_i = M$.

5.3. Координаты и время являются действительными и конечными величинами только при $u < c$.

5.4. В любой инерциальной системе отсчета, относительно которой стержень покоится $(u = 0)$, $\ell = \ell_0$ (см. 5.11).

5.5. Независимость поперечных размеров тела от его скорости непосредственно следует из равенств (5.5) $y = y'$ и $z = z'$.

5.6. Смотри ответ на К.В. 5.4.

5.7. Пусть в системе K скорость частицы направлена вдоль $0X$, то есть $\vec{\upsilon}(\upsilon_x, 0, 0)$, тогда из (5.18) следует, что при $\upsilon_x \to c$

$$\upsilon'_x = \frac{(\upsilon_x - u)\cdot c^2}{c^2 - u\cdot\upsilon_x} \to \frac{(c-u)\cdot c^2}{c^2 - u\cdot c} = c, \quad \text{а} \quad \upsilon'_y = 0, \quad \upsilon'_z = 0.$$

Поэтому $\upsilon' = \sqrt{(\upsilon'_x)^2 + (\upsilon'_y)^2 + (\upsilon'_z)^2} \to c.$

5.8. Из первого равенства (5.17) следует, что

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d}{dt'}\left(\frac{\upsilon'_x + u}{1 + \frac{u\upsilon'_x}{c^2}}\right)\cdot\frac{dt'}{dt}.$$

Продифференцировав дробь в правой части по t', учтя на основании последнего равенства (5.5), что $\frac{dt'}{dt} = \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{u\upsilon'_x}{c^2}}$, а также, что $\frac{d\upsilon_x}{dt} = a_x$ и $\frac{d\upsilon'_x}{dt'} = a'_x$, получим (5.19).

5.9. Основной закон динамики (5.22) в этом случае в проекциях на координатные оси имеет вид

$$F = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\upsilon_x}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right); \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{m\upsilon_y}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right) = 0; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{m\upsilon_z}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right) = 0,$$

или $F = \frac{dp_x}{dt}$; $p_y = \frac{m\upsilon_y}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} = const$; $p_z = \frac{m\upsilon_z}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} = const$. Из

$F = \frac{dp_x}{dt} > 0$, следует, что p_x- увеличивается, следовательно растет и модуль $P = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$, а значит растет модуль скорости частицы υ и υ_x. Поэтому из условий $p_y = const$ и $p_z = const$ видно, что υ_y и υ_z - уменьшаются. Итак, υ_x ***-увеличивается***, υ_y и υ_z ***- уменьшаются***.

5.10. $\dfrac{\Delta E}{E} = \dfrac{\Delta m}{m} = \dfrac{C\Delta t}{c^2} \approx 5.4 \cdot 10^{-12}$.

5.11. $\dfrac{\Delta m}{m} = \dfrac{g \cdot R_з}{c^2} \approx 7 \cdot 10^{-10}$.

5.12. $\dfrac{\Delta m}{m} = \dfrac{W}{m_Ш \cdot c^2} \approx 1.2 \cdot 10^{-3}$.

5.13. Запишем (5.31) в виде $E = mc^2\sqrt{1+\dfrac{p^2}{m^2c^2}}$. Учитывая, что в нерелятивистском случае $p << mc$, получим $\sqrt{1+\dfrac{p^2}{m^2c^2}} \approx 1+\dfrac{p^2}{2m^2c^2}$ или $E \approx mc^2 + \dfrac{p^2}{2m}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Уколов Александр Сергеевич

Лекции по общему курсу физики
Часть 1

Механика
Учебное пособие

Ответственный за выпуск Уколов А.С.
Редактор Белова Л.Ф.
Корректор Пономарева Н.В.

ЛР № 020565 Подписано к печати 10.11.99
Бумага офсетная Формат $60x84^1/_{16}$
Печать офсетная Усл.п.л. - 8.75 Уч. - изд.л. 8.4
Тираж 1500 Заказ 413
"С"

Издательство Таганрогского государственного радиотехнического университета
ГСП 17 А, Таганрог, 28, Некрасовский, 44
Типография Таганрогского государственного радиотехнического университета
ГСП 17 А, Таганрог, 28, Энгельса,1