53(076)
С 232 №2616(3)

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ТАГАНРОГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

СБОРНИК
вопросов, упражнений и задач по курсу общей физики в системе РИТМ

Часть III

КАФЕДРА ФИЗИКИ

Для студентов направлений
550200, 550400, 550700,
55110, 51050, 552500, 552800

ЕГФ

Таганрог 1999

УДК 53(076.1)
Составители: Е.Е.Нестюрина, Н.А.Ретивов

Сборник вопросов, упражнений и задач по курсу общей физики в системе РИТМ. Часть III. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 1999. 110 с

В сборнике приводятся содержание теории, вопросы, упражнения, примеры решения задач и задачи по разделам курса общей физики, изучаемого на практических занятиях в четвёртом семестре. Каждый раздел помимо базовых соотношений, основных формул, уравнений, необходимых для решения задач, содержит три группы задач: А, В и С, выстроенных в порядке растущей трудоёмкости их решения. Задачи группы А и В являются обязательными задачами программного минимума.

Предназначен для студентов очного обучения 2 курса по перечисленным направлениям, а также для преподавателей кафедры и филиалов ТРТУ, ведущих занятия по курсу общей физики.

Табл. 1. Ил. 22. Библиогр.: 8 назв.

Рецензенты:

А.И.Жорник, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической физики ТГПИ;

Г.В. Куповых, канд.физ-мат. наук, доцент кафедры физики ТРТУ.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вашему вниманию предлагается третья часть сборника вопросов, упражнений и задач по курсу общей физики, преподавание которого в радиотехническом университете проводится в рамках системы РИТМ.

Сборник ориентирован на студентов второго курса четвертого семестра дневного обучения по направлениям, в которых запланировано изучение курса общей физики в течение трех семестров в объеме 440 часов.

Отличие предлагаемого учебного пособия от уже изданных заключается в его конкретном содержании. Подбор материала позволяет заполнить полный перечень практических занятий, отводимых на изучение 6 и 7 модулей курса общей физики в системе РИТМ: волновая и квантовая оптика, квантовая физика и физика твердого тела.

Каждый модуль сборника разбит по занятиям, проводимым в учебных группах по календарному плану. Каждое занятие состоит из подразделов: содержание теории, основные формулы для решения задач, справочный материал, примеры решения задач, вопросы и упражнения, задачи группы А, В и С, выстроенные в порядке растущей трудоемкости их решения.

Содержание теории приводится для ориентации студентов в вопросах, знание которых необходимо для решения задач по конкретной теме.

Основные формулы для решения задач позволяют сконцентрировать изучаемую часть материала в соотношениях, наиболее часто встречающихся при решении задач.

Справочный материал, даваемый для каждого занятия, позволяет уменьшить общий объем справочного материала по физике.

Важным элементом сборника является решение задач. Приведенные примеры решения задач имеют целью пояснить применение теории, углубить понимание физических законов, развить умение рассуждать.

Вопросы и упражнения позволяют студенту проверить свой уровень подготовки теоретического материала, необходимого для применения на практике.

Задачи группы А и В представляют собой задачи программного минимума, решение которых в полном объеме обязательно для каждого студента. Задачи группы С требуют более углубленной проработки курса общей физики, предназначены для студентов, желающих самостоятельно углубить изучаемый курс.

В группу А включены задачи из сборников [1,2], в группу В - задачи, взятые из пособий [3-5], Задачи группы С взяты, в основном, из задачников [6-8].

Шестой модуль был подготовлен Н.А Ретивовым, седьмой- Е.Е. Нестюриной. Общая редакция сборника выполнена Н.А. Ретивовым.

Составители признательны всем своим коллегам, советы и замечания **которых** были учтены при подготовке сборника.

МОДУЛЬ 6. Волновая и квантовая оптика

Занятие 1. Интерференция света

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Интерференция света. Условия максимума и минимума интерференции.
2. Опыт Юнга.
3. Зеркала и бипризмы Френеля.
4. Интерференция в тонких плёнках. Полосы равного наклона и полосы равной толщины.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Амплитуда волны, полученной в результате сложения двух когерентных волн с амплитудами A_1 и A_2, частотой ω, равна:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot \cos\frac{2\pi}{\lambda}(L_2 - L_1)},$$

где: а) $\frac{2\pi}{\lambda}(L_2 - L_1) - \Delta\varphi$ - разность фаз слагаемых волн, приходящих в данную точку пространства, которая определяет величину амплитуды результирующей волны в данной точке пространства;

б) $L_{1,2} = \sum\limits_{i=1}^{N} n_i l_i$ - оптическая длина пути световой волны, l_i- геометрическая длина пути световой волны в среде с показателем преломления n_i;

в) $L_2 - L_1 = \Delta$ - оптическая разность хода световых волн.

2. Условие наблюдения максимума интенсивности света при интерференции от двух точечных когерентных источников (мнимых при наблюдении интерференции от бипризмы и бизеркал Френеля):

$$\frac{2\pi}{\lambda}(L_2 - L_1) = \pm k2\pi \quad \text{или} \; \Delta = \pm k\lambda,$$

где k=0, 1, 2, 3,.

3. Условие наблюдения минимума интенсивности при интерференции от двух источников:

$$\frac{2\pi}{\lambda}(L_2 - L_1) = \pm(2k+1)\pi$$

или $\Delta = \pm(2k+1)\dfrac{\lambda}{2}$.

4: Координата максимумов и минимумов интенсивности света на экране при интерференции от двух параллельных щелей:

$$Y_{k\max} = \pm\frac{L}{d}\cdot k\lambda,$$

$$Y_{k\min} = \pm\frac{L}{d}\cdot\lambda\cdot(2k+1)$$

где d - расстояние между источниками волн, L - расстояние от источников до экрана.

5. Ширина интерференционной полосы (расстояние между двумя соседними максимумами или минимумами):

6. Оптическая разность хода двух световых волн при интерференции в тонких плёнках:

а) в отражённом свете

$$\Delta = 2d\cdot\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} \pm \frac{\lambda}{2};$$

б) в проходящем свете

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha},$$

где d - толщина плёнки, n - относительный показатель преломления плёнки, α-угол падения света на плёнку.

7. Радиус колец Ньютона при наблюдении интерференции:

$r_k = \sqrt{(2k-1)\cdot R\cdot\dfrac{\lambda}{2n}}$ - светлых в отражённом свете и тёмных в проходящем свете;

$r_k = \sqrt{kR\cdot\dfrac{\lambda}{n}}$ -темных в отражённом и светлых в проходящем свете,

где R - радиус кривизны линзы, k = 1,2,3,4... -номер интерференционного кольца, n -показатель преломления среды между линзой и пластиной, Я- длина волны падающего света.

Справочный материал

Показатель преломления воды (мыльной воды)	n=1,33.
Показатель преломления стекла	n=1,5.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Интерференционные полосы наблюдаются на экране при отражении монохроматического $(\lambda = 582\,нм)$ света от зеркал Френеля. Определить число интерференционных полос, приходящихся на единицу длины экрана, если угол между плоскостями зеркал $\varphi = 179°59'$, а источник света находится в плоскости экрана (рис. 1).

Решение. Интерференция наблюдается от двух источников S_1 и S_2, являющихся мнимым изображением источника S. Число интерференционных полос N на единицу длины экрана можно определить как $N = 1/\Delta l$, где $\Delta l = (l_{k+1} - l_k)$ расстояние между двумя светлыми соседними интерференционными линиями, которые расположены на расстоянии l_{k+1} и l_k от центра интерференционной картины соответственно.

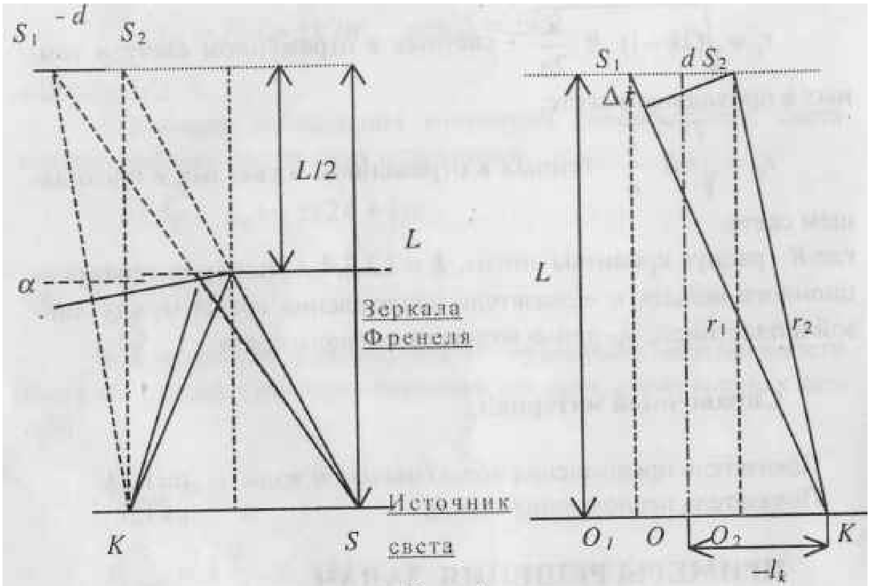


Рис. 1

Максимум интерференции от двух источников наблюдается в точке, для которой разность хода лучей Δr равна целому числу длин волн:

$$\Delta r = r_2 - r_1 = k\lambda,$$

где k-номер светлой полосы, Я-длина волны, r_k и r_2 - расстояния от источников S_1 и S_2 до данной точки , которые можно определить из треугольников ΔS_1O_1K и ΔS_2O_2K:

$$r_2^2 = L^2 + (l_k + \frac{d}{2})^2 \qquad (1)$$

$$r_1^2 = L^2 + (l_k - \frac{d}{2})^2, \qquad (2)$$

где L- расстояние от источников до экрана, d-расстояние между мнимыми источниками, которое можно определить так:

$$d = L\sin(180 - \varphi) = L\sin\alpha \approx L\alpha, \qquad (3)$$

где a - угол между плоскостями зеркал, выраженный в радианах.

Вычитая из уравнения (1) уравнение (2) и учитывая (3), получим:

$$r_2^2 - r_1^2 = 2l_k d \quad \text{или} \quad (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) = 2l_k d,$$

но $r_2 - r_1 = \Delta r$, $r_2 + r_1 = 2L$, $d = \alpha L$, тогда

$2L \cdot k\lambda = 2l_k \cdot L\alpha$ или

$$(k+1)\lambda = l_{k+1}\alpha, \qquad (4)$$

$$k\lambda = l_k\alpha. \qquad (5)$$

Вычитая из (4) уравнения (5), получим $\lambda = \Delta l\alpha$ или

$$N = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{2{,}91 \cdot 10^{-4}}{589 \cdot 10^{-9}} = 500\frac{полос}{м} = 5\frac{полос}{см}$$

Ответ. На каждом сантиметре длины экрана наблюдается 5 интерференционных полос.

Пример 2. В каких пределах может изменяться толщина пластинки, чтобы можно было наблюдать интерференционный максимум 12-го порядка для $\lambda = 600нм$ в отраженном свете? Коэффициент преломления пластинки $n = 1{,}6$.

Решение. Максимум интерференции при отражении от тонких пленок наблюдается при условии

$$(2k-1)\frac{\lambda}{2} = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} \quad \text{или}$$

$$d = \frac{(2k-1)\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}},$$

где d -толщина пластинки, α -угол падения лучей на пластинку, k-порядковый номер интерференционной полосы. Из этого условия видно, что толщина пластинки будет минимальной, если интерференция наблюдается под углом $\alpha = 0$, и максимальной, если интерференция наблюдается под углом $\alpha = \pi/2$.

$$d_{\min} = \frac{(2 \cdot 12 - 1) \cdot 600 \cdot 10^{-9}\,м}{4 \cdot 1{,}6} \approx 2{,}2 \cdot 10^{-6}\,м \approx 2{,}2мкм,$$

$$d_{\max} = \frac{(2 \cdot 12 - 1) \cdot 600 \cdot 10^{-9}\,м}{4\sqrt{1{,}6^2 - 1}} \approx 2{,}76 \cdot 10^{-6}\,м \approx 2{,}76мкм.$$

Ответ. Толщина пластинки может меняться в пределах - $2{,}2 \le d \le 2{,}76мкм$.

Пример 3. На стеклянный клин нормально к его грани падает монохроматический свет с длиной волны λ=600 нм.На каждом сантиметре поверхности клина наблюдается 10 интерференционных полос. Определить угол (α) между плоскостями, образующими клин.

Решение. Параллельный пучок лучей, падая нормально к грани клина, отражается как от верхней, так и от нижней грани. Эти лучи когерентны, и поэтому на поверхности клина будет наблюдаться устойчивая картина интерференции. Так как интерференционные полосы могут наблюдаться только при малых углах между плоскостями клина, то отражённые лучи 1 и 2 (рис.2) будут практически параллельны.

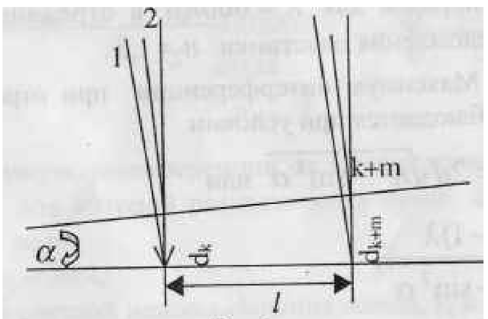


Рис.2

Темные полосы видны на тех участках клина, для которых разность хода лучей Δr, отражённых от разных поверхностей, кратна нечётному числу полуволн:

$$\Delta r = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \qquad (1)$$

где k=0, 1, 2, …

Разность хода двух лучей складывается из разности оптических путей этих лучей $2dn\cos i_2$ и половины длины волны $\frac{\lambda}{2}$. Величина $\frac{\lambda}{2}$ представляет собой добавочную разность хода, возникающую при отражении луча от оптически более плотной среды. Подставляя в формулу (1) значение разности хода Δr **получим**

$$2d_k n\cos i_2 + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2}, \qquad (2)$$

где n - коэффициент преломления стекла $(n=1{,}5)$; d_k -толщина клина в том месте, где наблюдается тёмная полоса, соответствующая номеру k ; i_2 -угол преломления лучей; λ - длина волны.

Согласно условию, угол падения равен нулю, следовательно, и угол преломления i_2 равен нулю, а $\cos i_2 = 1$. Раскрыв скобки в правой части равенства (2), после упрощения получим

$$2d_k n = k\lambda, \qquad (3)$$

$$2d_{k+m} n = (k+m)\lambda. \qquad (4)$$

Вычитая из (4) уравнения (3), получим

$$d_{k+m} - d_k = \frac{m\lambda}{2n}.$$

Как видно из рисунка, $tg\alpha = \frac{d_{k+m} - d_k}{l} = \frac{m\lambda}{2nl}$, если $\alpha \Rightarrow 0$, то

$$\alpha = \frac{m\lambda}{2nl} = \frac{10\cdot 600\cdot 10^{-9}\,м}{2\cdot 1{,}5\cdot 10^{-2}\,м} = 2\cdot 10^{-4}\ радиан.$$

$$\text{или } \alpha = \frac{180\cdot 60\cdot 60''}{3{,}14}\cdot 2\cdot 10^{-4} = 41{,}2''.$$

Ответ. Угол между плоскостями клина равен $41{,}2''$.

Пример 4. Две одинаковые плосковыпуклые линзы из кронгласа $(n=1{,}51)$ соприкасаются своими сферическими поверхностями. Определить оптическую силу такой системы. если в отражённом свете с длиной волны 0,60 мкм диаметр пятого светлого кольца Ньютона равен 1,5 мм.

Решение. Оптическая сила системы из двух линз равна сумме оптических сил каждой линзы D. По условию система состоит из одинаковых линз, поэтому $D = 2D_1$. Оптическую силу плосковыпуклой линзы D_1 можно выразить через радиус кривизны поверхности линзы R и показатель преломления стекла n, из которого она изготовлена.

$$D = 2 \cdot (n-1)\frac{1}{R}.$$

Радиус кривизны линзы можно определить из условия наблюдения максимума интерференции в отраженном свете

$$r_k^2 = 2(2k-1)\frac{\lambda}{2n_1}R, \qquad (2)$$

где r_k -радиус k -го кольца $(k = 1,2,3\ldots)$, n_1- показатель преломления среды, заполняющей пространство между линзами.

Найдём из уравнения (2) R и, подставив в уравнение (1), **получим**

$$D = 2\cdot\frac{(n-1)}{n_1 \cdot r^2}\cdot(2k-1)\lambda = 2\cdot\frac{0{,}51\cdot 9\cdot 6\cdot 10^{-7}\,м}{2{,}25\cdot 10^{-6}\,м^2} = 2{,}4\,м^{-1}.$$

Ответ. Оптическая сила системы равна 2,4 диоптрии.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Какие волны называются когерентными?
2. Перечислите методы получения когерентных световых волн от обычных источников света.
3. Когда можно наблюдать полосы равной толщины и полосы равного наклона?
4. Что такое просветлённая оптика?
5. Что представляет собой голограмма? Как будет выглядеть голограмма маленького шарика?
6. Как получить голографическое изображение?
7. Чему равна амплитуда A колебания, являющегося суперпозицией N некогерентных колебаний одинакового направления и одинаковой амплитуды a!
8. На какую величину ΔX изменится оптическая разность хода интерферирующих лучей при переходе от середины одной ин-

терференционной полосы к середине другой?
9. В интерференционной установке на пути белого света был установлен один раз красный, другой раз зелёный светофильтр. В каком свете - красном или зеленом - число различимых интерференционных полос будет больше?
10. Воздушный клин, образованный двумя плоскопараллельными пластинами, освещают монохроматическим светом, при этом расстояние между полосами равно a_0. Как изменится расстояние между полосами, если пространство между пластинками, образующими клин, заполнить прозрачной жидкостью с показателем преломления /г?
11. Плоская световая волна, длина которой в вакууме λ_0 падает по нормали на прозрачную пластинку с показателем преломления n. При какой толщине b пластинки отражённая волна будет иметь:а)максимальную;б)минимальнуюинтенсивность?
12. На экране наблюдают интерференционную картину от двух когерентных источников S_1 и S_2, находящихся на расстоянии a друг от друга. Длина волны монохроматического света λ. Определить максимально возможное число интерференционных полос, если размеры экрана не ограничены.
13. Сколько полос интерференции можно наблюдать на экране в установке с зеркалами Френеля? Длина волны монохроматического света λ, угол между плоскостями зеркал α, r- расстояние от источника до вершины угла, образованного зеркалами.
14. Пленки прозрачного диэлектрика нанесены на две подложки из различных диэлектриков. Обе пленки образуют геометрически совершенно одинаковые клинообразные слои. Показатель преломления материала пленки равен /г, а подложек - n_1 и n_2, причем $n_1 < n < n_2$. Чем отличаются интерференционные картины, образующиеся при падении на пленки света одного и того же спектрального состава под одним и тем же углом?
15 Плосковыпуклая линза с радиусом кривизны R\ лежит на отражающей цилиндрической поверхности, радиус кривизны которой равен R_2. Линзу освещают сверху. Какую форму имеют интерференционные полосы?

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1. (16.5) В опыте Юнга отверстия освещались монохроматическим светом. (λ=600нм). Расстояние между отверстиями d=1 мм, расстояние от отверстия до экрана L = 3 м . Найти положение трёх первых светлых полос.

Ответ: y_1=1,8 мм; y_2=3,6 мм; y_3= 5,4 мм.

2. (16.6) В опыте с зеркалами Френеля расстояние между мнимыми изображениями источника света d=0,5 мм расстояние до экрана L= 5 м. В зелёном свете получились интерференционные полосы, расположенные на расстоянии l= 5 мм друг от друга. Найти длину волны зелёного света.

Ответ: λ=0,5 мкм.

3. (16.7) В опыте Юнга на пути одного интерферирующего луча помещается стеклянная пластинка перпендикулярно к лучу. Вследствие этого центральная светлая полоса сместилась в положение, первоначально занятое пятой светлой полосой (не считая центральной). Длина волны света λ=600нм. Какова толщина пластины?

Ответ: h=6 мкм.

4. (16.9) На мыльную плёнку падает белый свет под углом i=45° к поверхности плёнки. При какой наименьшей толщине h плёнки отражённые лучи будут окрашены в жёлтый цвет (λ=600нм)?

Ответ: h=0,13 мкм.

5. *(16.10)* Мыльная плёнка, расположенная вертикально, образует клин вследствие стекания жидкости. При наблюдении интерференционных полос в отраженном свете ртутной дуги (λ=546,1 нм) оказалось, что расстояние между пятью полосами l=2 см. Найти угол γ клина. Свет падает перпендикулярно к поверхности плёнки.

Ответ: $\gamma = 11''$.

6. (16.12) Пучок света (λ=582 нм) падает перпендикулярно к поверхности стеклянного клина. Угол клина γ =20″. Какое количество k_o тёмных интерференционных полос приходится на единицу длины клина.

Ответ: k_o=500 м$^{-1}$.

7. *(16.13)* Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Наблюдение ведется в отражённом свете. Радиусы двух соседних тёмных колец равны r_k=4,0 мм и r_{k+1}=4,38 мм. Радиус кривизны линзы R=6,4 м. Найти порядковый номер колец и длину волны λ падающего света.

Ответ: k=5, k+1=6; λ=0,5мкм.

8. *(16.15)* Установка для получения колец Ньютона освещается белым светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. Радиус кривизны линзы R=5 м. Наблюдение ведётся в проходящем свете. Найти радиусы r_c и $r_{кр}$ четвёртого синего кольца (λ_c=400 нм) и третьего красного кольца ($\lambda_{кр}$=630 нм).

Ответ: $r_{с4}$=2,8 мм; $r_{кр3}$ =3,1 мм.

9. (16.18) Установка для получения колец Ньютона освещается светом от ртутной дуги, падающим по нормали к поверхности пластинки. Наблюдение ведётся в проходящем свете. Какое по порядку светлое кольцо, соответствующее линии λ_1=579 нм, совпадает со следующим светлым кольцом, соответствующим линии λ_2=577 нм?

Ответ: k - 275.

10. (16.19) Установка для получения колец Ньютона освещается светом с длиной волны λ=589 нм, падающим по нормали к поверхности пластинки. Радиус кривизны линзы R=10 м. Пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнено жидкостью. Найти показатель преломления n жидкости, если радиус третьего светлого кольца в проходящем свете r_3 =3,65 мм.

Ответ: n =1,33.

77. (16.21) Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны λ=500 нм, падающим по нормали к поверхности пластинки. Пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнено водой. Найти толщину h слоя воды между линзой и пластинкой в том месте, где наблюдается третье светлое кольцо в отражённом свете.

Ответ: h= 470 нм.

72. (16.22) Установка для получения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим по нормали к поверхности пластинки. После того, как пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнили жидкостью, радиусы тёмных колец в отражённом свете уменьшились в 1,25 раза. Найти показатель преломления n жидкости.

Ответ: n =1,56.

13. На тонкую пластинку (n=1,5) падает параллельный пучок белого света. Угол падения i=60°. При какой толщине пластинки зеркально отражённый свет будет наиболее окрашен: 1) в зелёный цвет (λ=489,0 нм); 2) в красный цвет (λ=635,7 нм).

Ответ: $b_1=(2k+1)\cdot 10^{-7}$ м; $b_2=(2k+1)\cdot 1{,}3\cdot 10^{-7}$ м.

14. (16.24) Для измерения показателя преломления аммиака в одно из плечей интерферометра Майкельсона поместили откаченную трубку длиной l=0,14 м. Концы трубки закрыли плоскопараллельными стеклами. При заполнении трубки аммиаком интерференционная картина для длины волны λ=590 нм сместилась на k=180 полос. Найти показатель преломления n аммиака.

Ответ: n= 1,000379.

15. (16.27) На поверхность стеклянного объектива нанесена тонкая плёнка, показатель преломления которой n =1,2. При какой наименьшей толщине d этой плёнки произойдёт максимальное ослабление отражённого света в средней части видимого спектра?

Ответ: d = 115 нм.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ В

1. *(5.31)* На экране наблюдается интерференционная картина от двух когерентных источников с длиной волны λ=600 нм. При помещении на пути одного луча перпендикулярно ему мыльной плёнки интерференционная картина изменилась на противоположную. При какой минимальной толщине d мыльной плёнки это возможно?

Ответ: d =0,91 **мкм.**

2. Найти длину волны λ монохроматического излучения, если в опыте Юнга расстояние первого интерференционного максимума от центральной полосы x= 0.05 см, расстояние между щелями d =0,5см, расстояние от щелей до экрана a=5м.

Ответ: $\lambda = \frac{xd}{a} = 5\cdot 10^{-7}$ м.

3. (5.32) В опыте Юнга стеклянная пластинка толщиной d=1см помещается на пути одного из интерферирующих лучей перпендикулярно ему. На сколько могут отличаться друг от друга значения показателяпреломления n в различных местах неоднородной пластинки, чтобы изменение разности хода от этой неоднородности не превышало 0,6 мкм?

Ответ: Δn =6·10^{-5}

4. Определить расстояние между центром интерференционной картины и пятой светлой полосой в установке с зеркалами Френеля (см. рис. 1) (α = 20', r = 10 см, a = 1 м), если длина волны λ= 589 нм. Интерферирующие лучи падают на экран приблизительно перпендикулярно.

Ответ: $x = \frac{k\cdot\lambda\cdot(a+r)}{2r\alpha} \approx 2{,}8$ мм.

5. **(5.33)** На стеклянный клин падает нормально пучок света с длинной волны λ =630 нм. Угол клина α=1'. Какое число темных интерференционных полос в отраженном свете приходится на 1 см длины клина? Чему равно расстояние между соседними темными интерференционными полосами? Показатель преломления стекла n=1,7.

Ответ: m = 16, Δl = 6,37·10^{-4} м.

6. Тёмной или светлой будет в отражённом свете мыльная плёнкатолщиной $d = 0{,}1\lambda$? Плёнка находится в воздухе.

Ответ: тёмной.

7. *(5.34)* При наблюдении колец Ньютона в отраженном свете расстояние между первым и девятым темными кольцами оказалось равным 3,2 мм. Найти расстояние между вторым и восемнадцатым темными кольцами Ньютона?

Ответ: Δr =4,5 мм.

8. (5.35) Между стеклянной пластиной и лежащей на ней плосковыпуклой линзой находится жидкость. Радиус третьего светлого кольца Ньютона при наблюдении в отраженном свете с длиной волны λ =600 нм равен 0,82 мм. Найти показатель преломления жидкости, если радиус линзы 0,6 м.

Ответ: n= 1,34.

9. (5.36) Пучок белого света падает нормально на стеклянную пластинку толщиной 0,6 мкм. Какие длины волн, лежащие в пределах видимого спектра (от 400 до 700 нм), будут максимально ослаблены в результате интерференции? Показатель преломления стекла n =1,7. Наблюдение ведется в проходящем свете.

Ответ: λ =583 нм, $k = 3$; λ =453 нм, $k = 4$.

10. Плоскопараллельная стеклянная пластинка лежит на одной из поверхностей двояковыпуклой линзы. Кольца Ньютона наблюдаются в отражённом свете натриевой горелки (λ =589 нм). Найдено, что радиус тёмного кольца порядка m = 20 (центральному тёмному кольцу соответствует m = 0) равен x_1 = 2 мм. Когда пластинка была положена на другую поверхность линзы, радиус тёмного кольца того же порядка сделался равным x_2= 4 мм. Определить фокусное расстояние линзы, если показатель преломления стекла, из которого она изготовлена, n = 1,5.

Ответ: $f = \dfrac{x_1^2 \cdot x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \cdot \dfrac{1}{(n-1)m\lambda} = 54$ см.

11. (5.38) На стеклянный клин падает нормально свет с длиной волны λ_1 = 600 нм. Расстояние между желтыми соседними полосами равно 4мм. Затем на клин падает нормально свет с λ_2 = 400 нм. Найти расстояние между синими соседними полосами, если наблюдение ведется в отраженном свете.

Ответ: Δl =2,67 мм.

12. (5.39) Как и во сколько раз изменится расстояние ΔY между соседними интерференционными полосами на экране в опыте Юнга, если красный светофильтр (λ_1 = 600 нм) заменить зеленым (λ_2 = 500 нм)?

Ответ: уменьшится в 1,2 раза.

13. (5.40) Установка для наблюдения колец Ньютона в проходящем свете освещается светом $\lambda = 600$нм, падающим нормально. Найти толщину воздушного зазора в том месте, где наблюдается второе светлое кольцо.

Ответ: d = 0,6 мкм.

14. Найти расстояние Δl между двадцатым и двадцать первым светлыми кольцами Ньютона, если расстояние между вторым и третьим равно 1 мм, а кольца наблюдаются в отражённом свете.

Ответ: Δl = 0,31 мм.

15. Интерференция при отражении света наблюдается в тонком стеклянном клине. Расстояние между соседними тёмными полосами 5 мм, показатель преломления стекла n = 1,5, длина световой волны 0,58 мкм. Определить угол между гранями клина.

Ответ: $\alpha \approx 8''$

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1. Направления распространения двух плоских волн одной и той же длины Я составляют друг с другом малый угол φ. Волны падают на экран, плоскость которого приблизительно перпендикулярна к направлению их распространения. Написав уравнения обеих плоских волн и сложив поля этих волн, показать, что расстояние *Ах* между двумя соседними интерференционными полосами на экране определяется выражением $\Delta x = \dfrac{\lambda}{\varphi}$.

2. Как изменится выражение для Δx в предыдущей задаче, если интерферирующие лучи падают на экран под углом ϑ ?

Ответ: $\Delta x = \dfrac{\lambda}{\varphi \cos\vartheta}$.

3. На пути одного луча в интерференционной установке Юнга стоит трубка длиной l =2 см с плоскопараллельными стеклянными основаниями, и наблюдается интерференционная картина, когда эта трубка наполнена воздухом. Затем трубка наполняется хлором и при этом наблюдается смещение интерференционной картины на N=20 полос. Наблюдения производятся со светом линии *D* натрия (λ =589 нм) при постоянной температуре. Принимая показатель преломления воздуха n =1,000276, вычислить показатель преломления хлора. В какую сторону смещаются полосы интерференции при наполнении сосуда хлором?

Ответ: $n_{Cl} = n + N\dfrac{\lambda}{l} = 1{,}000865.$ Полосы интерференции сместятся в сторону трубки.

4. На металлическое зеркало нормально падает пучок света с длиной волны $\lambda = 500$нм, причём образуются стоячие волны. На каком расстоянии от зеркала находится 1-я пучность и 1-й узел электрического вектора светового поля?

Ответ: $X_1 = \dfrac{\lambda}{4} = 125$ нм, $X_2 = \dfrac{\lambda}{2} = 250$ нм.

5. На рис. 3 показана схема установки для наблюдения интерференции с помощью бизеркал Френеля. Угол между зеркалами $a = 12'$ расстояния от линии пересечения зеркал до узкой щели S и экрана Э равны соответственно $r = 10$см и $a = 130$ см.

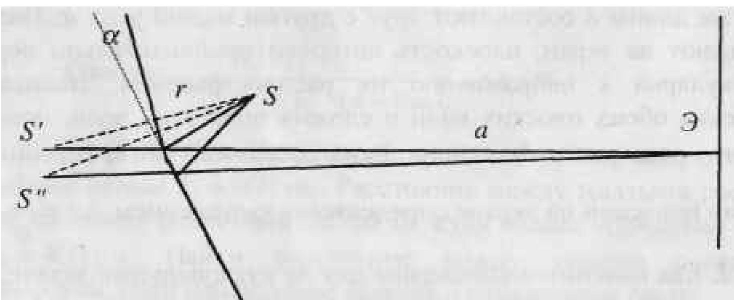


Рис. 3

Длина волны света $\lambda = 550$ нм. Определить: а) ширину интерференционной полосы на экране и число возможных максимумов; б) сдвиг интерференционной картины на экране при смещении щели на $\delta l = 1$ мм по дуге радиуса r с центром в точке O.

Ответ: а) $\Delta x = \lambda \cdot (a+r)/2ar = 1{,}1$ мм;

$N = (2a\alpha/\Delta x) + 1 = 9$;

б) сдвиг картины $\delta x = (a/r)\,\delta l$.

6. Найти распределение интенсивности света (I) на экране как функцию координаты X (расстояния от центра интерферен-

ционной картины) в установке с зеркалами Френеля, показанной на рис.1.

Ответ: $I = I_n \cos^2\left(\dfrac{2\pi \cdot r\alpha}{\lambda(a+r)} \cdot x\right)$

7. На тонкую плёнку ($n = 1{,}33$) падает параллельный пучок белого света. Угол падения $i_1 = 52°$. При какой толщине плёнки зеркально отраженный свет будет наиболее сильно окрашен в жёлтый цвет ($\lambda = 600$ нм)

Ответ: $d = (1+2k)\cdot\dfrac{\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} = 0{,}14(1+2k)\,мкм$,

где $k = 0{,}1{,}2{,}\ldots$

8. Найти минимальную толщину плёнки с показателем преломления $n = 1{,}33$, при которой свет с длиной волны 640 нм испытывает максимальное отражение, а свет с длиной волны 400 нм не отражается совсем. Угол падения света равен 30°.

Ответ: 0,65 мкм.

9. Свет с длиной волны $\lambda = 0{,}55$ мкм падает нормально на поверхность стеклянного клина. В отражённом свете наблюдают систему интерференционных полос, расстояние между соседними максимумами которых $\Delta x = 0{,}21$ мм. Найти: а) угол между гранями клина; б) степень монохроматичности света $(\Delta\lambda/\lambda)$, если исчезновение интерференционных полос наблюдается на расстоянии $l \approx 1{,}5$ см от вершины клина.

Ответ: а) $\alpha = \lambda/2n\Delta x = 3'$; б) $\Delta\lambda/\lambda \approx \Delta x/\ell = 0{,}014$.

10. Две одинаковые плосковыпуклые линзы из кронгласа ($n = 1{,}51$) соприкасаются своими сферическими поверхностями. Определить оптическую силу такой системы, если в отражённом свете с длиной волны 0,60 мкм диаметр пятого светлого кольца Ньютона равен 1,5 мм. Каков диаметр пятого кольца, если пространство между линзами заполнено сероуглеродом ($n_y = 1{,}63$)?

Ответ: 2,4 диоптрии; 1,13 мм.

11. Между двумя плоскопараллельными стеклянными пластинками положили очень тонкую проволоку. Проволока параллельна линии соприкосновения пластинок и находится на расстоянии 75 мм от неё. В отражённом свете ($\lambda = 0{,}5$ мкм) на верхней пластинке видны интерференционные полосы. Определить толщину проволоки, если на протяжении 30 мм насчитывается 16 световых полос.

Ответ: 10мкм.

12. Плосковыпуклая линза с радиусом кривизны R_1 лежит на отражающей цилиндрической поверхности, радиус кривизны которой равен R_2 . Линзу освещают сверху. Какую форму имеют интерференционные полосы?

Ответ: интерференционные полосы имеют форму эллипсов

$$\frac{x^2}{2R_1k\lambda}+\frac{y^2}{2k\lambda}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)=1.$$

13. Эффект Вавилова -Черенкова состоит в том, что электрон, равномерно движущийся в среде с показателем преломления n со скоростью $V\ (V>\frac{c}{n})$, может при известных условиях излучать свет. Найти условия, при которых такое излучение возникает, а также направление излучения, рассматривая интерференцию волн, возбуждаемых электроном в разные моменты времени.

Ответ: $\cos\theta=\frac{c}{nV}$

Занятие 2. Дифракция света

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Дифракция света.
2. Зоны Френеля.
3. Дифракция Френеля на круглых отверстиях и преградах.
4. Дифракция Фраунгофера на щели.
5. Дифракционная решётка.
6. Дифракция рентгеновских лучей.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Радиус внешней границы m-ой зоны Френеля

$r_m=\sqrt{\frac{a\cdot b}{a+b}\cdot m\lambda}$ при дифракции от точечного источника света,

$r_m=\sqrt{bm\lambda}$ при дифракции от плоской световой волны,

где a - расстояние от источника до волновой поверхности; b расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения, λ -длина волны света.

2. Площадь m-ой зоны Френеля $\Delta S=\frac{ab\pi\lambda}{a+b}$.

3. При падении плоской монохроматической световой волны нормально плоскости узкой щели шириной *a* условия для наблюдения:

а) максимумов интенсивности света

$$a\cdot\sin\phi_m=\pm(2m+1)\frac{\lambda}{2},$$

где $m=1,2,3,...$

б) минимумов интенсивности света

$$a\cdot\sin\phi_m=\pm 2m\lambda,$$

где ϕ_m - угол между нормалью к плоскости щели и направлением на m-ый максимум или минимум интенсивности света.

4. Условие максимума при дифракции на плоской решётке с постоянной d.
а) если свет падает нормально к её поверхности, то направления, в которых наблюдаются главные максимумы интенсивности света, определяются из условия

$$d \cdot \sin\varphi_k = \pm k\lambda,$$

где k=1,2,3,... порядковый номер дифракционного максимума, φ_k - угол между нормалью к поверхности решётки и направлением на дифракционный максимум;
б) если свет падает на решётку под углом i, то направления, в которых наблюдаются главные максимумы интенсивности света, определяются из условия

$$d(\sin\varphi_k - \sin i) = \pm k\lambda.$$

5. Разрешающая способность дифракционной решётки

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN,$$

где - λ и $\lambda+\Delta\lambda$- длины волн двух соседних спектральных линий, которые могут наблюдаться раздельно в спектре с помощью данной решётки; *N*- общее число щелей решётки; *k*- порядковый номер дифракционного максимума.

6. Угловой дисперсией дифракционной решётки называется величина

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda}.$$

7. Линейная дисперсия дифракционной решётки

$$Д = F\,\frac{d\varphi}{d\lambda},$$

где F-фокусное расстояние линзы, проецирующей спектр на экран.

8. Формула Вульфа-Брэгга, условие максимума при дифракции рентгеновских лучей на пространственной решётке

$$2d\sin\theta = n\lambda,$$

где d -расстояние между атомными плоскостями кристалла; *в* - угол между направлением пучка параллельных рентгеновских лучей, падающих на кристалл и гранью кристалла, Я- длина волны рентгеновских лучей, n- ряд целых чисел.

Справочный материал

Красная линия гелия	670 нм.
Жёлтая линия натрия	589 нм.
(дублет)	589,6 нм.
Границывидимогодиапазонасвета	400-780 нм.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. На круглое отверстие радиусом 1*мм* в непрозрачном экране падает нормально параллельный пучок света с длиной волны $\lambda = 0{,}5\,мкм$. На пути лучей, прошедших через отверстие, помещен экран. Определить максимальное расстояние от отверстия до экрана, при котором в центре дифракционной картины еще будет наблюдаться темное пятно.

Решение. Расстояние, при котором будет видно темное пятно, определяется числом зон Френеля, укладывающихся в отверстии. Если число зон чётное, то в центре дифракционной картины будет темное пятно.

Число зон Френеля, помещающихся в отверстии, убывает по мере удаления экрана от отверстия. Наименьшее четное число зон Френеля равно двум. Следовательно, максимальное расстояние, при котором ещё будет наблюдаться темное пятно в центре экрана, определяется условием, согласно которому в отверстии должно поместиться две зоны Френеля. Согласно рис.4, расстояние от центра экрана O до края отверстия на $2\frac{\lambda}{2}$ больше, чем расстояние от центра экрана до центра отверстия $OO_1 = R_0$

По теореме Пифагора

$$r^2 = (R_0 + 2\frac{\lambda}{2})^2 - R_0^2 = 2R_0\lambda + \lambda^2 \approx 2R_0\lambda,$$

учитывая, что $\lambda \ll R_0$.

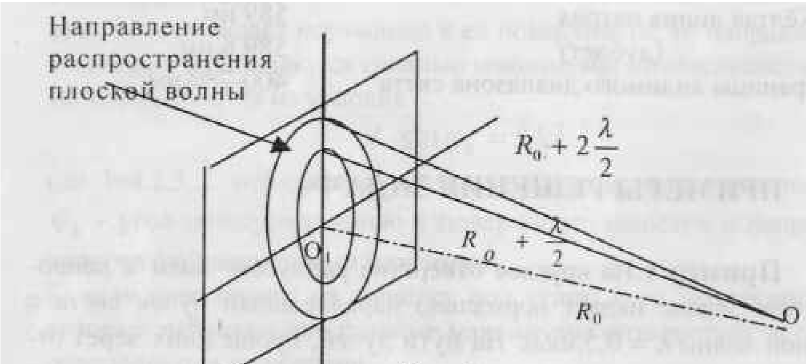


Рис. 4

Откуда $R_o = \dfrac{r^2}{2\lambda} = \dfrac{(10^{-3})^2\ м^2}{2 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6}\ м} = 1м$

Ответ. Максимальное расстояние от отверстия до экрана, при котором ещё в центре дифракционной картины может наблюдаться темное пятно, равно 1м.

Пример 2. На щельшириной $0{,}1мм$ нормально падает параллельный пучок света от монохроматического источника $\lambda = 600нм$. Определить ширину центрального максимума в дифракционной картине, проектируемой при помощи линзы, находящейся непосредственно за щелью, на экран, отстоящий от линзы нарасстоянии $L = 1м$.

Решение. Центральный максимум занимает место между ближайшим правым и левым минимумами, поэтому ширину центрального максимума примем равной расстоянию между этими двумя минимумами (рис.5). Минимум интенсивности света при дифракции от одной щели наблюдается под углом φ, определяемым условием

$$a\sin\varphi = k\lambda, \qquad (1)$$

где *a* ширина щели; λ - длина волны, $k = 1,2,3...$ порядокминимума.

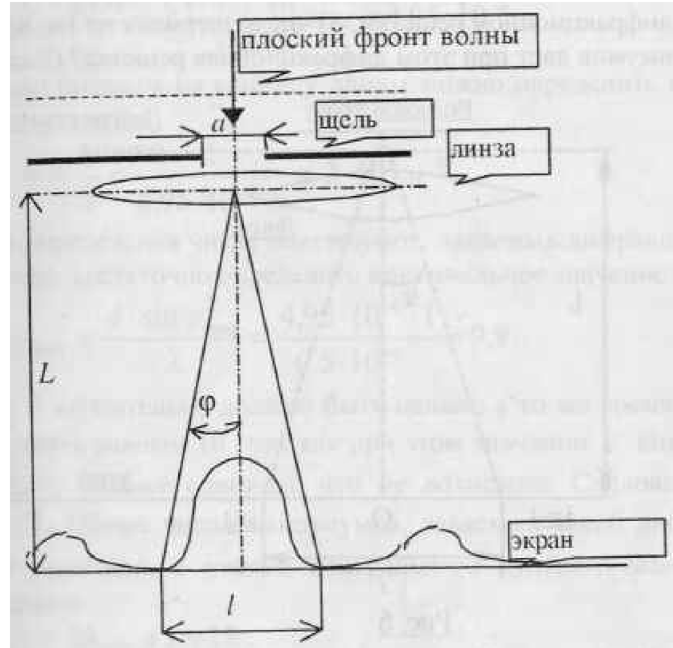


Рис.5

Расстояние между двумя минимумами на экране можно определить непосредственно по рис. 5.

$l = 2Ltg\varphi$ или

$l = 2L\sin\varphi$ (при малых углах φ). (2)

Выразив $\sin\varphi$ из (1) и подставив в (2), получим

$$l = 2L\frac{k\lambda}{a} = 2 \cdot 100\frac{1 \cdot 600 \cdot 10^{-9}}{10^{-4}} = 1{,}2 \cdot 10^{-2}\ м$$

Ответ. Ширина дифракционного максимума равна $1{,}2 \cdot 10^{-2}\ м$.

Пример 3.На дифракционную решетку (рис. 6) нормально к её поверхности падает параллельный пучок лучей с длиной волны 0.5мк. Помещенная вблизи решётки линза проектирует дифракционную картину на плоский экран, удаленный от линзы на 1м. Расстояние между двумя максимумами первого порядка, наблюдаемыми на экране, равно 20,2 см. Определить: а) постоянную дифракционной решетки, б) число штрихов на 1м, в) сколько максимумов дает при этом дифракционная решетка? (Рис.6).

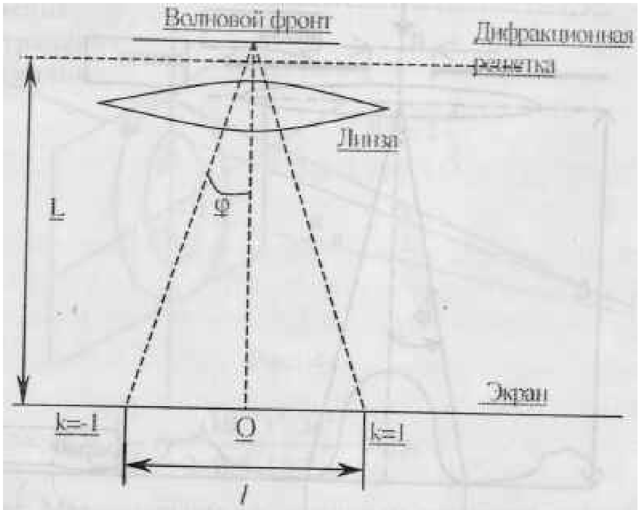


Рис. 6

Решение. а) Направления, в которых наблюдаются главные максимумы дифракционной картины, связаны с постоянной дифракционной решетки d и длиной волн λ света соотношением:

$$d \cdot \sin\varphi = k\lambda, \qquad (1)$$

где $k=1$, 2, 3...-порядок спектрального максимума.

По условию задачи, если $k=\pm1$, то расстояние между максимумами равно $l=0{,}202\,м$

$$\sin\varphi = \frac{l}{2\sqrt{L^2+(\frac{l}{2})^2}},$$

но если $L \rangle\rangle \frac{l}{2}$, то $\sin\varphi = \frac{l}{2L}$. Тогда из уравнения (1) имеем

$$d = \frac{2L\lambda}{l} = 2\frac{1\cdot0{,}5\cdot10^{-6}}{0{,}202}\,м = 4{,}95\cdot10^{-6}\,м$$

б) Число штрихов на единицу длины можно определить по формуле

$$N = \frac{1}{d} = \frac{1}{4{,}95\cdot10^{-6}\,м} = 2\cdot10^{5}\,м^{-1}$$

в) Для определения числа максимумов, даваемых дифракционной решеткой, достаточно определить максимальное значение k_{max}

$$k_{max} = \frac{d\cdot\sin\varphi_{max}}{\lambda} = \frac{4{,}95\cdot10^{-6}\cdot1}{0{,}5\cdot10^{-6}} = 9{,}9$$

Число k обязательно должно быть целым, в то же время оно не может быть равным 10, так как при этом значении $k\ \sin\varphi$ должен быть больше единицы, что не возможно. Следовательно, $k_{max}=9$. Общее число максимумов, даваемых такой дифракционной решёткой, с учётом центрального нулевого максимума будет равно

$$n = 2k_{max}+1 = 19$$

Ответ: а) $d = 4{,}95\cdot10^{-6}\,м$, б) $N = 2\cdot10^{5}\,м^{-1}$, в) $n = 19$

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Сформулируйте принцип Гюйгенса - Френеля.
2. Объясните метод построения зон Френеля.
3. Как, используя метод зон Френеля и принцип суперпозиций, объяснить прямолинейное распространение света?
4. Когда наблюдается дифракция Френеля и дифракция Фраунгофера?
5. Как влияют период дифракционной решётки и её размер на получаемую дифракционную картину?
6. Что понимают под разрешающей способностью оптического прибора и от чего она зависит?
7. Как объяснить рассеяние света?
8. Как объяснить голубой цвет неба?

9. Имеется круглое отверстие в непрозрачной преграде, на которую падает монохроматическая световая волна от удалённого точечного источника. За отверстием расположен экран. Что будет происходить с интенсивностью в центре наблюдаемой на экране дифракционной картины, если экран удалять от преграды?

10. Свет от удалённого монохроматического точечного источника падает на круглый небольшой непрозрачный диск или шарик. На расстоянии Z от него находится экран. Расстояние Z велико по сравнению с диаметром диска или шарика, так что последний закрывает лишь несколько зон Френеля. Возможно ли, чтобы в таких условиях в центре геометрической тени, полученной на экране, наблюдалось светлое пятно?

11. Какова интенсивность света / в фокусе зональной пластинки, если закрыты все зоны Френеля, кроме первой? Интенсивность света без пластинки равна I_0.

12. В спектре, полученном с помощью дифракционной решётки, спектральную линию наблюдают в первом порядке под углом φ_1. Определить наивысший порядок спектра, в котором можно наблюдать эту линию с помощью той же дифракционной решётки, если свет падает на решётку нормально к её поверхности.

13. Условие того, чтобы дифракция Френеля на отверстии практически совпадала с дифракцией Фраунгофера, заключается в том, что максимальная разность фаз двух лучей, идущих от разных точек отверстия к экрану, на котором наблюдается дифракционная картина, мала по сравнению с π. Выразить это условие через размеры отверстия d, «длину волны λ и расстояние от экрана до места наблюдения r.

14. При каком условии можно наблюдать зеркальное отражение от шероховатой поверхности при малых и больших углах падения?

15. Как с помощью дифракционной решётки и монохроматического источника света определить скорость света в прозрачном веществе, если известна скорость света в воздухе?

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

(16.28) Свет от монохроматического источника (λ= 600нм) падает нормально на диафрагму с диаметром отверстия d=6 мм. За диафрагмой на расстоянии l =3 м от нее находится экран. Какое число k зон Френеля укладывается в отверстии диафрагмы? Каким будет центр дифракционной картины на экране - темным или светлым?

Ответ: $k = 5$; центр дифракционной картины будет светлым.

2. Посередине между экраном и источником света (λ=500нм) находится круглый непрозрачный диск радиусом 0,5 мм. Каково должно быть расстояние между источником света и экраном для того, чтобы диск закрыл первые две зоны Френеля?

Ответ: l =1 м.

3. *(16.30)* Найти радиусы r_k первых пяти зон Френеля для плоской волны, если расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения b = 1м. Длина волны света λ = 500нм.

Ответ: r_1 = 0,71мм, r_2 = 1,0мм, r_3 = 1,22 мм, r_4 = 1,41 мм, r_5 = 1,58 мм.

(16.31) Дифракционная картина наблюдается на расстоянии / от точечного источника монохроматического света (λ = 600нм). На расстоянии $a = 0{,}5l$ от источника помещена круглая непрозрачная преграда диаметром D=1см. Найти расстояние l, если преграда закрывает только центральную зону Френеля.

Ответ: l =167 м.

5. *(16.32)* Дифракционная картина наблюдается на расстоянии / =4м от точечного источника монохроматического света (λ = 500нм). Посередине между экраном и источником света помещена диафрагма с круглым отверстием. При каком радиусе R отверстия центр дифракционных колец, наблюдаемых на экране, будет наиболее темным?

Ответ: R=\мм.

6. *(16.35)* На щель шириной a =20 мкм падает нормально параллельный пучок монохроматического света (λ = 500нм). Найти ширину изображения A щели на экране, удаленном от ще-

ли на расстояние $l = 1$ м. Шириной изображения считать расстояние между первыми дифракционными минимумами, расположенными по обе стороны от главного максимума освещенности.

Ответ: A=5 см.

7. (16.36) На щель шириной $a = 6\lambda$ падает нормально параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ. Под каким углом φ будет наблюдаться третий дифракционный минимум интенсивности света?

Ответ: $\varphi = 30°$.

8. (16.39) На дифракционную решетку нормально падает пучок света. Натриевая линия (λ_1 =589 нм) дает в спектре первого порядка угол дифракции $\varphi_1 = 17°8'$. Некоторая линия дает в спектре второго порядка угол дифракции $\varphi_2 = 24°12'$. Найти длину волны λ_2 этой линии и число штрихов N на единицу длины решетки.

Ответ: $\lambda_2 = 409{,}9$ нм; $N = 500$ мм$^{-1}$.

9. (16.42) На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной гелием. На какую линию λ_2 в спектре третьего порядка накладывается красная линия гелия ($\lambda_1 = 670$ нм) спектра второго порядка?

Ответ: $\lambda_2 = 447$ нм.

√**10.** *(16.44)* Найти наибольший порядок k спектра для желтой линии натрия (λ=589 нм), если постоянная дифракционной решетки d= 2 мкм.

Ответ: k=3.

11. (16.45) На дифракционную решетку нормально падает пучок монохроматического света. Максимум третьего порядка наблюдается под углом $\varphi = 36°48'$ к нормали. Найти постоянную d решётки, выраженную в длинах волн падающего света.

Ответ: $d = 5\lambda$.

12. (16.49) Какова должна быть постоянная d дифракционной решётки, чтобы в первом порядке был разрешён дублет натрия λ_1 = 589 нм и λ_2= 589,6 нм? Ширина решётки a=2,5 см.

Ответ: d=25,4 мкм.

13. На дифракционную решётку с периодом d=5 мкм под углом $\alpha = 30°$ падает свет длиной волны λ= 600 нм. Определить углы, под которыми наблюдаются максимумы второго порядка.

Ответ: $\varphi_1 = 47°44'$; $\varphi_2 = 15°04'$.

14. (16.52) Угловая дисперсия дифракционной решётки для λ = 668 нм в спектре первого порядка $d\varphi/d\lambda = 2{,}02 \cdot 10^5$ рад/м. Найти период d дифракционной решётки.

Ответ: d=5 мкм.

15. На грань кристалла каменной соли падает параллельный пучок рентгеновских лучей (λ = 0,147 нм). Определить расстояние между атомными плоскостями кристалла, если дифракционный максимум второго порядка наблюдается, когда лучи падают под углом $31°30'$ к поверхности кристалла.

Ответ: 0,28 нм.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ В

1. *(5.41)* Свет с длиной волны λ=631 нм нормально падает на щель шириной b = 15 мкм. Найти угол между двумя первыми минимумами, расположенными по обе стороны от центрального максимума.

Ответ: 2φ = 4,8°.

2. *(5.43)* На узкую щель падает нормально монохроматическая волна λ= 550 нм. Угол отклонения лучей, соответствующий второму дифракционному максимуму, φ= 30°. Определить ширину щели b.

Ответ: b =2,75мкм.

*3.*На непрозрачную преграду с отверстием радиуса r = 1,00 мм падает плоская монохроматическая световая волна. Когда расстояние от преграды до установленного за ней экрана равно b_1= 0,575 м, в центре дифракционной картины наблюдается максимум интенсивности. При увеличении расстояния до значения b= 0,862 м максимум интенсивности сменяется на минимум. Определить длину волны λ света.

Ответ: λ = 580 нм.

4. (5.49) На пути плоской световой волны (λ = 650 нм) поставили диафрагму с круглым отверстием и на расстоянии

d = 85 см от неё -экран. При каком минимальном значении радиуса отверстия центр дифракционной картины на экране имеет минимальную освещённость?

Ответ: $r_{min} = 1$ мм.

5. Плоская монохроматическая световая волна падает нормально на круглое отверстие. На расстоянии b - 9,0 м от него находится экран, где наблюдают некоторую дифракционную картину. Диаметр отверстия уменьшил $\eta=3$ раза. Найти новое расстояние b_1, на котором надо поместить экран, чтобы получить на нем дифракционную картину, подобную той, что наблюдалась в предыдущем случае, но уменьшенную в η раз.

Ответ: $b_1 = b/\eta^2 = 1,0$ м.

6. Точечный источник монохроматического света расположен перед зонной пластинкой на расстоянии $a = 1,5$ *м* от неё. Изображение источника образуется на расстоянии $b = 10$ м от пластинки. Найти фокусное расстояние зонной пластинки.

Ответ: $f = a\cdot b/(a+b) = 0,6$ м.

7. (5.50) Дифракционная картина наблюдается на расстоянии l от точечного источника монохроматического света (λ=700мм). На расстоянии $d = 0,4l$ от источника помещена круглая непрозрачная преграда диаметром 2 мм. Чему равно расстояние /, если преграда закрывает только центральную зону Френеля?

Ответ: $l = 5,95$ м.

8. (5.44) На дифракционную решётку падает нормально пучок света от разрядной трубки. Чему равна постоянная дифракционной решётки d, если в направлен $\varphi = 42°$ впадает максимум двух линий λ_1 = 670,8 нм и λ_2 = 460,6 нм?

Ответ: d= 5 мкм.

9. (5.45) На каком расстоянии друг от друга на экране расположены две спектральные линии λ_1 = 580,0 нм и λ_2 = 590,0 нм в спектре первого порядка, полученном при помощи дифракционной решётки с периодом d=5 мкм? Фокусное расстояние линзы, проектирующей свет на экран, равно 1 м.

Ответ: Δx - 2,0 мм.

10. (5.47) Нормально к поверхности дифракционной решётки падает монохроматический свет. Постоянная дифракционной решетки в 12 раз больше длины волны света. Найти общее число N дифракционных максимумов, которое теоретически можно наблюдать в этом случае.

Ответ: $N=2k+l=25$.

11. (5.48) При нормальном падении света на дифракционную решетку угол дифракции для линии λ_1= 650 нм в спектре второго порядка равен 45°. Найти угол дифракции для линии λ_2= 400 нм в спектре третьего порядка.

Ответ: $\varphi_2 = 40,7°$.

12. (5.42) Какое наименьшее число штрихов N должна иметь дифракционная решётка, чтобы в спектре второго порядка наблюдались раздельно две линии с длинами волн λ_1=671,6 нм и λ_2=670,1 нм? Какова наименьшая длина l такой решётки, если постоянная решётки d=0,1 мм?

Ответ: N=223, l =22,3мм.

13. (5.46) Узкий пучок рентгеновских лучей падает под углом скольжения 30° на грань монокристалла, расстояние между атомными плоскостями которого равно 46 пм. При зеркальном отражении от этой грани образуется максимум первого порядка. Найти длину волны рентгеновских лучей.

Ответ: λ = 46 пм.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1. Точечный источник света с λ =0,50 мкм расположен на расстоянии $a = 1,0$м перед диафрагмой с круглым отверстием радиусом r = 1,0 мм. Найти расстояние *b* от диафрагмы до точки наблюдения, для которой число зон Френеля в отверстии равно $m = 3$.

Ответ: $b = ar^2/(m\lambda - r^2) = 2$ м.

2. На пути плоской световой волны с длиной λ помещена непрозрачная плоскость, в которой имеется очень длинная щель шириной *a*. За преградой на расстоянии *b* от неё поставлен экран. Определить число зон Френеля, открытых щелью, для точки наблюдения, расположенной на экране против:
а) середины щели, б) края щели.

Ответ: а) $m = a^2/2bk$; б) $m = a^2/b\lambda$.

3. Между точечным источником света и экраном поместили диафрагму с круглым отверстием, радиус которого r можно менять в процессе опыта. Расстояния от диафрагмы до источника и экрана равны $a = 1$ м и $b = 1,25$ м. Определить длину световой волны. Если максимум освещённости в центре дифракционной картины на экране наблюдается при $r_1 = 1,00$ мм и следующий максимум при $r_2 = 1,29$ мм.

Ответ: $\lambda = (r_2^2 - r_1^2)(a+b)/2ab = 0,60$ мкм.

4. Плоская монохроматическая световая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием. Какова интенсивность света I за экраном в точке, для которой отверстие равно: а) первой зоне Френеля; б) внутренней половине первой зоны; в) половине первой зоны (по диаметру).

Ответ: а) $I \approx 4I_0$; б) $I \approx 2I_0$; в) $I = I_0$.

5. На пути плоской световой волны с $\lambda = 540$ нм поставили тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием $f = 50$ см, непосредственно за ней - диафрагму с круглым отверстием и на расстоянии $b = 75$ см от диафрагмы - экран. При каких радиусах отверстия центр дифракционной картины на экране имеет: а) максимальную освещённость? б) минимальную освещённость?

Ответ: а) $r = \sqrt{(2k+1)\cdot\lambda fb/(b-f)} = 0,90\sqrt{2k+1}$ мм,

б) $r = 1,27\sqrt{k}$, где $k = 0,1,2,3,4...$

6. Зонная пластинка даёт изображение источника, удалённого от неё на расстояние 3 м, на расстоянии 2 м от своей поверхности. Где получится изображение источника, если его отодвинуть в бесконечность?

Ответ: **1,2 м.**

7. Свет с длиной волны 535 нм падает нормально на дифракционную решетку. Найти ее период, если одному из фраунгоферовых максимумов соответствует угол дифракции 35° и наибольший порядок спектра равен пяти.

Ответ: 2,8 мкм.

8. Определить длину волны монохроматического света, падающего нормально на дифракционную решетку с периодом $d = 2,2$ мкм, если угол между направлениями на максимумы первого и второго порядков $\Delta\vartheta = 15°$.

Ответ: $\lambda = (d \sin\Delta\vartheta)/\sqrt{5 - 4\cos\Delta\vartheta} = 0,53$ мкм.

9. На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает параллельный пучок лучей с длиной волны 500 нм. Помещенная вблизи решетки линза проектирует дифракционную картину на плоский экран, удаленный от линзы на 1 м. Расстояние между двумя максимумами первого порядка, наблюдаемыми на экране, равно 20,2см. Определить: а) постоянную дифракционной решетки; б) число штрихов на 1 см; в) сколько максимумов дает при этом дифракционная решетка; г) максимальный угол отклонения лучей, соответствующих последнему дифракционному максимуму.

Ответ: а) $d = 4,95$ мкм; б) $N = 2020$ см$^{-1}$; в) $k_{max} = 9$; г) $\varphi_{max} = 55°30'$.

10. Прозрачная дифракционная решетка имеет период $d = 1,5$ мкм. Найти угловую дисперсию D, соответствующую максимуму наибольшего порядка спектральной линии с $\lambda = 530$ нм, если свет падает на решётку: а) нормально; б) под углом $\theta = 45°$ к нормали.

Ответ: $D = \dfrac{k}{d\sqrt{1-(\frac{k\lambda}{d} - \sin\theta)^2}}$, а) D - 6,5 угл.мин/нм, где $k = 2$;

б) $D = 13$ угл.мин/нм, где $k = 4$.

11. Свет с $\lambda = 589$ нм падает нормально на дифракционную решётку с периодом $d = 2,5$ мкм, содержащую $N = 10^4$ штрихов. Найти угловую ширину дифракционного максимума второго порядка.

Ответ: $\Delta\vartheta = \dfrac{2\lambda}{Nd\sqrt{1-(\frac{k\lambda}{d})^2}} = 11''$.

12. В спектрографе установлена дифракционная решётка, период которой $d = 1$ мкм, а длина рабочей части $l = 100$ мм. Фокусное расстояние объектива $f = 1$ м. 1) Определить длину Δx видимого спектра, получающегося на фотопластинке, установленной в фокальной плоскости объектива. 2) Оценить: а) линейную дисперсию прибора $Д$; б) разрешающую способность прибора R.

Ответ: 730 мм; а) $Д = \dfrac{fm}{d\left[1-\left(\dfrac{m\lambda}{d}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = 1 мм/нм$

б) $R = 10^5$.

13. Определить ширину спектральной линии водорода $\lambda = 656$ нм в спектре первого порядка, даваемого решёткой длиной 3 см. Фокусное расстояние линзы, проецирующей спектр на экран, равно 15 см. (Шириной спектральной лини называется половина расстояния между двумя минимумами, лежащими рядом с этой линией).

Ответ: =3,3 мкм.

14. Найти минимальное разрешаемое угловое расстояние радиотелескопа с диаметром зеркала D = 50 м, предназначенного для изучения радиоизлучения Галактики, для длин волн $\lambda_1 = 1$ м и $\lambda_2 = 10$ см.

Ответ: $\delta\varphi_1 = 1°8'24''$; $\delta\varphi_2 = 6'40''$

Занятие 3. Поляризация. Тепловое излучение

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1 Поляризация света при отражении и преломлении.
2 Угол Брюстера.
3 Закон Малюса.
4 Двойное лучепреломление.
5 Искусственное двойное лучепреломление, эффект Керра.
6 Тепловое излучение, законы теплового излучения.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДА Ч

1. Формула Фарадея. При отражении естественного света от диэлектрического зеркала интенсивность световых колебаний в отражённом луче, совершающихся в направлении, перпендикулярном к плоскости падения света $I_\perp$ и параллельном плоскости падения света I_{11} соответственно равны:

$$I_\perp = 0{,}5I_o\left[\frac{\sin(i-\beta)}{\sin(i+\beta)}\right]^2,\quad I_{11} = 0{,}5I_o\left[\frac{tg(i-\beta)}{tg(i+\beta)}\right]^2,$$

где I_o - интенсивность падающего естественного света; i - угол падения; β - угол преломления света.

2. Закон Брюстера. При отражении естественного света от диэлектрика с относительным показателем преломления $n_{21} = \dfrac{n_2}{n_1}$, получается световая волна, полностью поляризованная в плоскости падения (электрический вектор колеблется в направлении, перпендикулярном плоскости падения), если угол падения i удовлетворяет условию

$$tg\, i_Б = n_{21}.$$

3. Закон Малюса. Интенсивность света, прошедшего через поляризатор и анализатор определяется выражением

$$I = I_o \cos^2 \varphi,$$

где φ - угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора; I_o - интенсивность плоскополяризованного света, прошедшего через поляризатор.

4. Скорость распространения обыкновенного и необыкновенного лучей в двоякопреломляющем кристалле соответственно будут

$$V_o = c/n_o \quad \text{и} \quad V_e = c/n_e$$

где n_o и n_e - показатели преломления кристалла для обыкновенного и необыкновенного лучей.

5. Пластинка в четверть или в полволны - пластинка из одноосного, двоякопреломляющего кристалла, вырезанная параллельно оптической оси, создающая сдвиг по фазе между обыкновенным и необыкновенным лучами, проходящими перпендикулярно пластинке, на $\pm\pi/4$ или на $\pm\pi/2$ соответственно. Толщина d таких пластинок удовлетворяет условию

$$d = [(m \pm 1/4)\lambda_o]\cdot(|n_o - n_e|) \text{ или } d = [(m \pm 1/2)\lambda_o](|n_o - n_e|),$$

где $m = 0, 1, 2\ldots$; λ_o - длина световой волны в вакууме.

6. Угол поворота плоскости поляризации монохроматического света при прохождении через оптически активное вещество:

а) для твердых тел $\varphi = \varphi_o \cdot l$;

б) для растворов $\varphi = \varphi_o \cdot C \cdot l$,

где φ_o -удельное вращение; l -толщина оптически активного вещества; С-концентрация оптически активного вещества в растворе.

7. Эффект Керра. Разность показателей преломления поляризованной жидкости для обыкновенного и необыкновенного лучей монохроматического света в направлении, перпендикулярном вектору напряжённости электрического поля $\vec{E}$, равна

$$n_0 - n_e = B \cdot \lambda_0 \cdot E^2,$$

где B-постоянная Керра.

8. Энергетическая светимость или излучательная способность абсолютно чёрного тела

$$R_э = \Delta W/\Delta S,$$

где ΔW-энергия, излучаемая с поверхности тела за единицу времени; ΔS-площадь излучающей поверхности.

Закон Стефана-Больцмана. Энергетическая светимость $R_э$ поверхности абсолютно чёрного тела

$$R_э = \int_0^\infty r_\lambda d\lambda = \sigma \cdot T^4$$

где r_λ-спектральная плотность энергетической светимости; σ-постоянная Стефана - Больцмана; T - абсолютная температура излучающего тела.

10. Энергетическая светимость серого тела

$$R_э' = a_T R_э,$$

где a_T -коэффициент поглощения "серого" тела.

11. Законы Вина.

а) Закон смещения или первый закон Вина

$$\lambda_m \cdot T = C',$$

где λ_m -длина волны, на которую приходится максимум энергии излучения в спектре абсолютно чёрного тела; C'- постоянная Вина в законе смещения.

б). Второй закон Вина. Максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости r_{λ_0} абсолютно черного тела равно

$$r_{\lambda_0} = C''T^5,$$

где C'' — постоянная Вина.

12. Формула Планка. Спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi \cdot h\nu^3}{c^2}\left(\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right)^{-1},$$

где h-постоянная Планка, ν - частота излучения, c - скорость света, k- постоянная Больцмана.

Справочный материал

Показатель преломления стекла	$n = 1{,}5$.
Показатель преломления воды	$n = 1{,}33$.
Диапазон видимого спектра	700 нм$\geq\lambda\geq$420 нм.
Постоянная Стефана-Больцмана	$\sigma = 5{,}67\cdot10^{-8}$ Вт/(м$^2\cdot$К^4).
Постоянная Вина в законе смещения	$C' = 2{,}9\cdot10^{-3}$ м$\cdot$К.
Постоянная Вина	$C'' = 1{,}29\cdot10^{-5}$ Вт/(м$^3\cdot$К^5).
Скорость света в вакууме	$c = 3\cdot10^8$ м/с.
Постоянная Больцмана	$k = 1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К.
Постоянная Планка	$h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж$\cdot$с.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Естественный свет падает на полированную грань стеклянной пластины, погружённой в жидкость. Отражённый от пластины луч повёрнут на угол $\varphi = 97^\circ$ по отношению к падающему лучу (рис.7). Определить коэффициент преломления жидкости, если отраженный луч максимально поляризован.

Решение. Для определения коэффициента преломления материала пластины относительно жидкости воспользуемся законом Брюстера. Луч света, отражённый от диэлектрика, максимально поляризован в том случае, если тангенс угла падения численно равен относительному коэффициенту преломления n_{21} второй среды относительно первой

$$tg\alpha = n_{21} = \frac{n_2}{n_1},$$

где n_2 - коэффициент преломления второй среды (стеклянной пластины), n_1 - коэффициент преломления жидкости, который следует определить.

Согласно условию задачи, отраженный луч повёрнут на угол φ относительно падающего луча, что соответствует углу

падения $\alpha = \frac{\varphi}{2}$ в соответствии с законом (угол падения равен углу отражения).

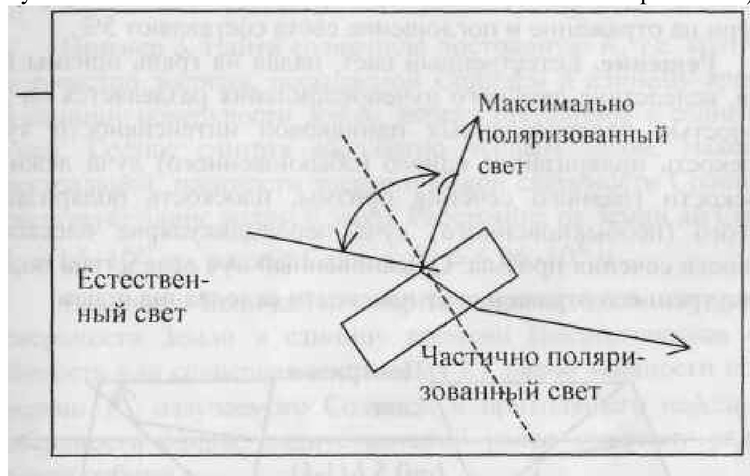


Рис.7

Тогда $$tg\frac{\varphi}{2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Откуда найдём коэффициент преломления жидкости

$$n_1 = \frac{n_2}{tg\frac{\varphi}{2}}$$

Подставляя числовые значения n_2=1,5 (для стекла), получим

$$n_1 = \frac{1{,}5}{tg\left(\frac{97}{2}\right)^\circ} = \frac{1{,}5}{1{,}13} = 1{,}33.$$

Ответ: n_1 =1,33, такой жидкостью, судя по величине показателя преломления, может быть вода.

Пример 2. Две призмы Николя N_1 и N_2 расположены так, что угол между плоскостями пропускания (главными плоскостями) составляет 60°. Определить: 1) во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении его через одну призму? 2) во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении его через две призмы? При прохождении каждой призмы потери на отражение и поглощение света составляют 5%.

Решение. Естественный свет, падая на грань призмы Николя, вследствие двойного лучепреломления разделяется на два полностью поляризованных одинаковой интенсивности луча. Плоскость поляризации одного (обыкновенного) луча лежит в плоскости главного сечения призмы, плоскость поляризации другого (необыкновенного) луча перпендикулярна плоскости главного сечения призмы. Обыкновенный луч вследствие полного внутреннего отражения от плоскости склеивания призм

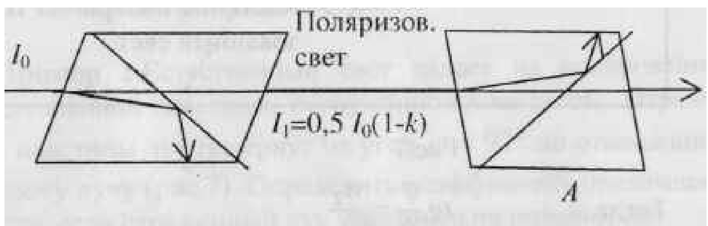


Рис.8

направляется на боковую грань призмы (рис.8) и там полностью поглощается. Интенсивность луча, прошедшего через первую призму, I_1 с учётом потерь на отражение и поглощение призмой (k-коэффициент поглощения), будет

$I_1=0{,}5I_0(1-k)$.

Интенсивность света, прошедшего через вторую призму I_2, зависит от угла между главными плоскостями призм φ по закону Малюса и от коэффициента поглощения k и определится уравнением

$$I_2 = I_1\cos^2\varphi(1-k) = 0{,}5I_o(1-k)^2\cos^2\varphi\ .$$

$$n_1 = \frac{I_1}{I_o} = 0{,}5(1-k) = 0{,}5(1-0{,}05) = 0{,}475 \text{ (раз)}$$

Интенсивность света, прошедшего через две призмы, уменьшится в

$$n_2 = \frac{I_2}{I_o} = 0{,}5(1-k)^2\cdot\cos^2\varphi = 0{,}11\text{(раз)}.$$

Пример 3. Найти солнечную постоянную K, т.е. количество лучистой энергии, посылаемой Солнцем в единицу времени на единицу поверхности Земли, перпендикулярной к солнечным лучам. Солнце считать абсолютно черным телом, максимум спектральной плотности энергетической светимости Солнца соответствует длине волны 0,5мкм. Расстояние от Земли до Солнца $R_з = 1{,}5\cdot10^{11}$ *м*, радиус Солнца $R_c = 6{,}96\cdot10^8$ *м*.

Решение. Количество энергии, приходящей на единицу поверхности Земли в единицу времени (энергетическая освещённость или солнечная постоянная K), равно мощности потока энергии P, излучаемого Солнцем и приходящего на единицу поверхности сферы, радиус которой равен среднему радиусу земной орбиты

$$K = \frac{P}{4\pi R_з^2} \qquad (1)$$

Мощность потока энергии, излучаемой Солнцем, равна произведению энергетической светимости Солнца $R_э$ на площадь его поверхности

$$P = R_э\cdot4\pi R_c^2 \qquad (2)$$

Энергетическая светимость $R_э$ абсолютно черного тела определяется законом Стефана -Больцмана

$$R_э = \sigma\cdot T^4, \qquad (3)$$

где σ — постоянная Стефана -Больцмана; *T*- абсолютная температура излучающей поверхности.

Температуру поверхности Солнца можно определить по закону смещения Вина, зная длину волны $\lambda_{\max}$, на которую приходится максимум излучения

$$T=\frac{C'}{\lambda_{\max}}, \qquad (4)$$

где C' – постоянная Вина. Подставим выражения (2-4) в (1) получим

$$K=\frac{\sigma\left(\frac{C'}{\lambda_{\max}}\right)^4\cdot 4\pi R_c^2}{4\pi R_з^2}=\sigma\cdot\left(\frac{C'}{\lambda_{\max}}\right)^4\cdot\left(\frac{R_c}{R_з}\right)^2=$$

$$5{,}67\cdot10^{-8}\left(\frac{2{,}9\cdot10^{-3}}{5\cdot10^{-7}}\right)^4\cdot\left(\frac{6{,}96\cdot10^{8}}{1{,}5\cdot10^{11}}\right)^2=1{,}38\cdot10^3\ \frac{Вт}{м^2}.$$

Ответ: $K=1{,}38\frac{кВт}{м^2}$.

ВОПРОСЫ **И УПРАЖНЕНИЯ**

1. Что называется естественным светом, плоско поляризованным, частично поляризованным, эллиптически поляризованным и поляризованным по кругу?
2. Какие существуют способы получения поляризованного света?
3. Как практически можно отличить плоско поляризованный свет от естественного?
4. Что такое угол Брюстера, закон Брюстера?
5. Двойное лучепреломление.
6. Можно ли с помощью поляризатора отличить эллиптически поляризованный свет от частично поляризованного? Почему?
7. Как, используя пластинку в четверть волны и поляризатор, отличить частично поляризованный свет от эллиптически поляризованного и поляризованного по кругу?

S. Нарисуйте лучевые поверхности для оптически положительного и оптически отрицательного кристалла.

9. В чем заключается физический смысл универсальной функции Кирхгофа?

К). Термодинамическая температура уменьшилась вдвое. Во сколько раз изменится энергетическая светимость чёрного тела?

11. Как сместится максимум спектральной плотности энергетической светимости $r_{\nu,T}$ чёрного тела при повышении температуры?
12. При каких условиях из формулы Планка получается закон Вина и при каких- формула Рэлея -Джинса?
13. Два тела одинаковой формы и размеров, но обладающие разной лучеиспускательной способностью (коэффициентом поглощения), нагреты до одинаковой температуры и помещены в вакуум. В результате излучения тела остывают. Кривые на рис.9 показывают изменение температуры тел в процессе остывания. По оси абсцисс отложено время остывания от момента помеще-

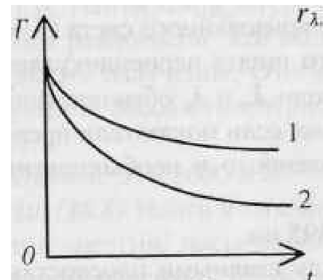


Рис.9

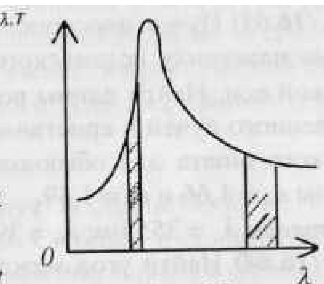


Рис.10

ния тел в вакуум, а по оси ординат -температура тел. Какая из кривых характеризует остывание тела с большей лучепоглощательной способностью, а какая с меньшей?

14. В энергетическом распределении излучения абсолютно чёрного тела (рис.10) выделены два участка, площади которых равны. Одинаковы ли мощности излучения, приходящиеся на соответствующие интервалы длин волн?
15. Одинаковое ли число излучаемых квантов приходится на интервалы, указанные в предыдущей задаче?
16. Как зависит от температуры объёмная теплоёмкость вакуума?

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1.(16.58) Найти угол $i_Б$ полной поляризации при отражении света от стекла, показатель преломления которого n = 1,57.

Ответ: $i_Б$ =57°30'.

2. (16.62) Луч света проходит через жидкость, налитую в стеклянный сосуд *(n* = 1,5) и отражается от дна. Отражённый луч полностью поляризован при падении его на дно сосуда под углом $i_Б$ =42°37'. Найти показатель преломления *n* жидкости. Под каким углом i должен падать на дно сосуда луч света, идущий в этой жидкости, чтобы наступило полное внутреннее отражение?

Ответ: n =1,63; i =66,9°.

. (16.63) Пучок плоскополяризованного света (λ = 589 нм) падает на пластинку исландского шпата перпендикулярно к его оптической оси. Найти длины волн λ_o и λ_e обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле, если показатели преломления исландского шпата для обыкновенного и необыкновенного лучей равны n_o = 1,66 и n_e = 1,49.

Ответ: λ_o = 355 нм; λ_e =395нм.

4. (16.64) Найти угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора, если интенсивность естественного света, проходящего через поляризатор и анализатор, уменьшается в 4 раза.

Ответ: φ = 45°.

5. *(16.65)* Естественный свет проходит через поляризатор и анализатор, поставленные так, что угол между их главными плоскостями равен *(р.* Поляризатор и анализатор поглощают и отражают 8% падающего на них света. Оказалось, что интенсивность луча вышедшего из анализатора, равна 9% интенсивности естественного света, падающего на поляризатор. Найти угол φ.

Ответ: φ =62°32'.

6. Угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора равен 45°. Во сколько раз уменьшится интенсивность света, выходящего из анализатора, если угол увеличить до 60°?

Ответ: в 2 раза.

7. При прохождении света через слой 5% сахарного раствора толщиной 15 см плоскость поляризации света повернулась на угол 6,5°. На сколько повернёт плоскость поляризации 13% раствор с толщиной слоя в 12 см?

Ответ: на 13.5°.

8. (18.3) Какую энергетическую светимость $R_э'$ имеет затвердевающий свинец? Отношение энергетических светимостей свинца и абсолютно чёрного тела для данной температуры (T = 600 К) k = 0.6.

Ответ: $R_э'$ = 4,6 кВт/м^2.

9. (18.6) Диаметр вольфрамовой спирали в электрической лампочке d=0.3 мм, длина спирали l = 5 см. При включении лампочки в сеть напряжением U = 127 В через лампочку течёт ток I = 0,31 А. Найти температуру спирали. Считать, что при установившемся равновесии всё выделяющееся в нити тепло теряется в результате излучения. Отношение энергетической светимости вольфрама и абсолютно чёрною тела для данной температуры k = 0,31.

Ответ: T = 2600 К.

10. (18.8) Найти солнечную постоянную K, т.е. количество лучистой энергии, посылаемой Солнцем в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярной к солнечным лучам и находящуюся на таком же расстоянии от него, как и Земля. Температура поверхности Солнца T = 5800 К. Излучение Солнца считать близким к излучению абсолютно чёрного тела. Среднее расстояние от Земли до Солнца $1{,}5\cdot10^{11}$ м. $R_c = 6{,}96\cdot10^8$ м

Ответ; K = 1,38 кВт/м^2.

11. (18.11) Какую энергетическую светимость $R_э$ имеет абсолютно чёрное тело, если максимум спектральной плотности его энергетической светимости приходится на длину волны λ = 484 нм?

Ответ: $R_э$ = 73,5 МВт/м^2

12. (18.16) На какую длину волны λ приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно чёрного тела, имеющего температуру, равную температуре человеческою тела. т.е. T - 3 К) К?

Ответ: λ -9.3мкм.

13. (18.19) Поверхность тела нагрета до температуры T = 1000 К. Затем одна половина этой поверхности нагревается на ΔT = 100 К. другая охлаждается на ΔT = 100 К. Во сколько раз изменится энергетическая светимость R_e поверхности згою тела?

Ответ: увеличится в 1.06 раз.

14. (18.22) На сколько уменьшится масса Солнца за год вследствие излучения? За какое время τ масса Солнца уменьшится вдвое? Температура поверхности Солнца T = 5800 К. Излучение Солнца считать постоянным.

Ответ: $\Delta m = \Delta W/c^2 = 1{,}4\cdot 10^{17}$ кг; $\tau = 7\cdot 10^{12}$ лет.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ В

1. (5.52) Интенсивность света, прошедшего через анализатор и поляризатор, составляет 12% от интенсивности естественного света, падающею на поляризатор. Коэффициент поглощения света для поляризатора и анализатора одинаков и равен 0,07. Найти угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора. Потери на отражение не учитывать.

Ответ: α = 58.3°.

• *2. (5.53)* Степень поляризации *P* частично поляризованного света равна 0.5. Во сколько раз отличается максимальная интенсивность света I_{max}, прошедшего через анализатор, от минимальной интенсивности I_{min}

Ответ: в 3 раза.

3. (5.54) Пучок естественного света падает на систему из 5 николей, плоскость пропускания каждого из которых повёрнута па угол α = 15° относительно плоскости пропускания предыдущего николя. Определить, какая часть светового потока проходит через данную систему николей? Потери на отражение и поглощение не учитывать.

Ответ: I/I_0 = 0,379.

4. (5.55) Кварцевую пластинку толщиной d=1.5 мм поместили между параллельными николями, в результате чего плоскость поляризации монохроматического света повернулась на угол φ = 45°. При какой минимальной толщине кварцевой пластинки поле зрения поляризатора станет совершенно тёмным? Что произойдёт в последнем случае, если николи скрестить под углом α = 90 ?

Ответ: d = 3 мм. Поле зрения станет максимально светлым.

5? (5.56) При прохождении монохроматического света через раствор сахара с концентрацией c_1 = 15%, находящегося в трубке, по l_1 =25 см, плоскость поляризации света повернулась наугол φ_1 = 18°. При пропускании света сре дру гой раствор сахара находящиися в трубке длинои l_2 =15 см, плоскость поляризации повернулась на угол φ_2 = 6.7°. Определить концентрацию второю раствора.

Ответ: c_2 = *9.3%*

(). (5.57) Предельный угол полного внутреннего отражения на границе жидкости с воздухом α_0 = 43°. Определить угол рюстера $i_Б$ для луча, падающего из воздуха па поверхность этой жидкости.

Ответ: $i_Б$ = 55.8°.

7. *(5.58)* Угол максимальной поляризации при отражении света от кристалла каменной соли равен 57°. Определить скорость распространения с в ом кристалле.

Ответ: $1.948\cdot 10^8$ м/с.

8. (5.59) Естественный свет переходит из воды в стекло таким образом, что луч. отражённый от границы раздела этих сред, оказывается максимально поляризованным. Определить угол между падающим и преломлённым лучами. Показатель преломления стекла n_1 = 1.5. воды n_2 = 1.3.

Ответ: φ = 172°.

9. *(5.60)* Два иколя расположены ак. что угод между их плоскостями пропускания равен α_0 = 60°. Определить: 1) во сколько раз уменьшится енсивность естественного света при прохождение через один николь: 2) во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении через оба николя? При прохождении каждою из николеи суммарные потери света на отражение и поглощение составляю 5%.

Ответ: 1) в 2.1 раза. 2) в 8.86 раза.

10. (6.6) При нагревании абсолютно черно чела длина волны, на которую приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости, изменилась от 600 до 500 нм. Во сколько раз при этом изменилась энергетическая светимость $R_э$ тела?

Ответ: увеличится в 2.07 раз.

//. (6.7) Температура абсолютно черною тела изменилась от 2000 К до 1000 К. Во сколько раз уменьшилась его энергетическая светимость $R_э$? Во сколько раз уменьшилась при этом максимальная спектральная плотность энергетической светимости $r_{λ,T}$?

Ответ: $R_{э1}/R_{э2} = 16$; $r_{λ,T1}/r_{λ,T2} = 32$.

12. *(6.8)* В результате нагревания поток излучения абсолютно черного тела увеличился в 3 раза. Какова будет температура тела T_2. если начальная температура $T_1 = 600$ K?

Ответ: $T_2 = 790$ К.

13. (6.9) Длина волны, на которую приходится максимум энергии излучения абсолютно черного тела, $λ_m = 700$ нм. Определить температуру тела, а также максимальное значение спектральной плотности энергетической светимости для этой длины волны.

Ответ: $T = 4140$ К; $r_{λ,T} = 1{,}57 \cdot 10^{12}$ Вт/м^2.

14. *(6.10)* Определить площадь излучающей поверхности абсолютно черного тела. если поток излучения равен 10 кВт, а максимум энергии излучения приходится на длину волны $λ_m = 500$ нм.

Отчет: $S = 1{,}56 \cdot 10^{-4}$ м^2.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1. На какой угловой высоте над горизонтом должно находится Солнце, чтобы солнечный свет, отраженный от поверхности воды, был максимально поляризован?

Ответ: $α = 37°$.

2. Естественный луч света надает на полированную грань стеклянной пластины, погружённой в жидкость. Отражённый от пластины луч повёрнут на угол $φ = 97°$ по отношению к падающему лучу. Определить коэффициент преломления жидкости, если отражённый луч максимально поляризован.

Ответ: 1,33.

3. Поляризатор освещён параллельным пучком естественного света, падающего перпендикулярно к его поверхности. Освещённость поляризатора 84 лк. Какова освещенность экрана, поставленного за анализатором, если плоскости поляризатора и анализатора будут сдвинуты на 60° и каждый николь поглотит 4% проходящего через него света?

Ответ: **9,67 лк.**

4. Плоскополяризованный свет интенсивностью $I_0 = 100$ лм/м^2 проходит последовательно через два совершенных поляризатора, плоскости которых образуют с плоскостью колебаний в исходном луче углы $α_1 = 20°$ и $α_2 = 50°$ (углы отсчитаны от плоскости колебаний по часовой стрелке, если смотреть вдоль луча). Определить интенсивность света по выходе из второго поляризатора.

Ответ: $I = 66$ лм/м^2.

5. На плоскопараллельную стеклянную пластинку под углом Брюстера падает узкий пучок света интенсивностью I_0. Определить с помощью формулы Френеля: а) интенсивность прошедшего пучка, если падающий свет плоскополяризован, причём плоскость колебаний его перпендикулярна к плоскости падения, б) степень поляризации прошедшего через пластинку пучка, если падающий свет естественный.

Ответ: а) $I = I_0(1-ρ)^2 = 16I_0 n^4/(1+n^2)^4 = 0{,}725I_0$; б) 0.16, где $ρ$ -коэффициент отражения поверхности.

6. Между двумя параллельными николями помешают кварцевую пластинку толщиной 1 мм, вырезанную параллельно оптической оси. При этом плоскость поляризации монохроматического света, падающего на анализатор, повернулась на угол 20°. При какой минимальной толщине пластинки свет не пройдёт через анализатор?

Ответ: 4,5 мм.

7. Монохроматический пучок света проходит через ячейку Керра со скрещенными николями. Конденсатор заполнен сероуглеродом, длина пластин конденсатора 10 мм, расстояние между ними 2.2 мм. Если на конденсатор подать напряжение 7,15 кВ, яркость света, выходящего из анализатора, оказалась максимальной. Определите константу Керра для света данной частоты.

Ответ: $4{,}75\cdot10^{-12}$ м/В^2.

8. Имеются два абсолютно черных источника теплового излучения. Температура одного из них $T_1 = 2500$ K. Найти температуру другого источника, если длина волны, отвечающая максимуму его испускательной способности, на $\Delta\lambda = 0{,}5$ мкм больше длины волны, соответствующей максимуму испускательной способности первого источника.

Ответ: 1750 K.

9. Имеются две полости (рис. 11) с малыми отверстиями одинаковых диаметров $d = 1$ см и абсолютно отражающими наружными поверхностями. Расстояние между отверстиями $l = 10$ см. В полости 1 поддерживается постоянная температура $T_1 = 1700$ K. Вычислить температуру, установившуюся в полости 2.

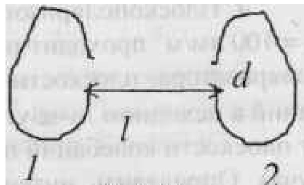


Рис.11

Ответ: $T_2 = T_1\sqrt{d/2l} = 400$ K.

10. Оцените температуру поверхности Солнца, если известно, что расстояние от Земли до Солнца $1{,}5\cdot10^8$ км, радиус Солнца $6{,}9\cdot10^5$ км и солнечная постоянная (энергия излучения, приходящая от Солнца на единицу площади за единицу времени) $1{,}35$ кВт/м^2. (Солнце считать абсолютно черным телом).

Ответ: 5800 K.

11. По тонкой нихромовой пластинке шириной 1 см и площадью поперечного сечения 10^{-3} см^2 идёт ток. Коэффициент поглощения пластинки 0.34. При каком значении силы тока пластинка будет наиболее эффективным источником света, если максимальная чувствительность человеческого глаза соответствует электромагнитному излучению с длиной волны 550 нм.? ($\rho = 0{,}11$ мОм·м).

Ответ: ~165 A.

12. Определить установившуюся температуру T находящейся в вакууме черной пластины, помещённой перпендикулярно к солнечным лучам. ($R_c = 6{,}9\cdot10^8$ м, $R_{зо} = 1{,}5\cdot10^{11}$ м, $T_c = 5800$ K).

Ответ: 392 K.

13. В замкнутом пространстве находится идеальный газ, концентрация молекул которого n_0. При какой температуре объёмная плотность кинетической энергии поступательного движения молекул газа равна объёмной плотности энергии электромагнитного излучения абсолютно чёрного тела? (Число Лошмита $n_0 = 2{,}7\cdot10^{25}$ м$^{-3}$).

Ответ: $T = \left(\dfrac{3n_0 k\cdot c}{8\sigma}\right)^{1/3} = 9\cdot10^5$ K

14. Какую концентрацию молекул n_0 должен иметь идеальный одноатомный газ при температуре $T = 273$ K, чтобы его внутренняя энергия единицы объёма равнялась объёмной плотности электромагнитного излучения абсолютно чёрного тела при той же температуре? Чему равно давление газа при этих условиях?

Ответ: $n_0 = 7{,}42\cdot10^{14}$ м$^{-3}$; $p = 2{,}8\cdot10^{-6}$ Па.

15. На сколько градусов понизилась бы температура земного шара за столетие, если бы на Землю не поступала солнечная энергия? Радиус Земли принятьравным $6{,}4\cdot10^6$ м, удельную теплоёмкость 200 Дж/(кг·К), плотность 5500 кг/м^3, среднюю температуру 300 K, коэффициент поглощения 0,8.

Ответ: **0,5 K.**

Занятие 4. Квантовая оптика

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Энергия, импульс, масса фотона.
2. Фотоэффект и его закономерности.
3. Давление света.
4. Эффект Комптона.
5. Тормозное рентгеновское излучение.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Энергия фотона

$$\varepsilon = h\cdot\nu = \hbar\omega = h\frac{c}{\lambda}.$$

где λ -длина волны, c -скорость света в вакууме, h - постоянная Планка, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, ν-частота света, $\omega = 2\pi\cdot\nu$-циклическая частота.

2. Масса и импульс фотона

$$m_\phi = \frac{\varepsilon}{c^2} \qquad p_\phi = m_\phi c = \frac{h}{\lambda} = \hbar\cdot k = \frac{\varepsilon}{c}.$$

где $k = 2\pi/\lambda$ - волновой вектор (волновое число).

3. Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта

$$h\nu = A + W_{max} = A + \frac{m_e v_{max}^2}{2}$$

где $h\nu$ - энергия фотона, A -работа выхода электрона из металла. $W_{max} = \frac{m_e v_{max}^2}{2}$ -максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов.

4. Красная граница фотоэффекта

$$\lambda_o = \frac{hc}{A},$$

где λ_o -максимальная длина волны света, при которой ещё возможен **фотоэффект.**

5. Давление света

$$p = \frac{E}{c}(1+\rho),$$

где E -энергия, падающая на единицу поверхности за единицу времени, c -скорость света в вакууме, ρ -коэффициент отражения света поверхностью.

6. Формула Комптона. Изменение длины волны рентгеновских лучей при рассеянии на свободных электронах определяется формулой

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_o c}(1-\cos\theta) = 2\frac{h}{m_o c}\cdot\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

где λ_1 -длина волны падающего рентгеновского излучения; λ_2 -длина волны фотона, рассеянного под угол θ к первоначальному направлению движения, после взаимодействия с электроном; m_0 -масса покоя электрона; $\lambda_0 = \frac{h}{m_o c}$-комптоновская длина волны.

7. Коротковолновая граница тормозного рентгеновского излучения

$$h\nu_{max} = \frac{hc}{\lambda_{min}} = \frac{mv^2}{2} = eU$$

где U -ускоряющая разность потенциалов.

Справочный материал

Заряд электрона	$e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.
Масса покоя электрона	$m_0 = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг.
Комптоновская длина волны	$\lambda_0 = 0{,}24\cdot10^{-11}$ м.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Средняя длина волны излучения лампы накаливания с металлической спиралью равна 1200 нм. Найти число **фотонов,** испускаемых за единицу времени лампой мощностью 500 Вт.

Решение. В установившемся режиме вся энергия, потребляемая лампой накаливания, излучается металлической нитью. Мощность теплового излучения можно выразить как произведение энергии одного кванта $\varepsilon = h\nu = h\dfrac{c}{\lambda}$ на количество квантов, излучаемых нитью в единицу времени N

$$P = h\frac{c}{\lambda}\cdot N$$

Отсюда

$$N = \frac{P\lambda}{h\cdot c} = \frac{500\cdot 12\cdot 10^{-10}}{6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}} = 5\cdot 10^{21}$$

Ответ: N=5·10^{21} фотонов в единицу времени.

Пример 2. Монохроматический пучок электромагнитных волн падает на тонкую платиновую фольгу, находящуюся в вакууме в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1{,}5\cdot 10^{-3}$ Тл. Радиус кривизны траектории электронов, выбитых из металла в плоскости, перпендикулярной полю, оказался равным 0,01 м. Определить длину волны подающего излучения, если красная граница фотоэффекта для платины равна $235\cdot 10^{-9}$м.

Решение. Фотоны электромагнитного поля при поглощении их металлом вызывают фотоэффект, т.е. выбивают из метала электроны. Энергия фотона $\varepsilon = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda_o}$ идет на увеличение потенциальной энергии электрона, равной работе выхода электрона из металла $A_{вых} = \dfrac{hc}{\lambda_k}$, и электрон приобретает кинетическую энергию W_k.

$$\frac{hc}{\lambda_o} = \frac{hc}{\lambda_k} + W_k \qquad (1)$$

Кинетическую энергию фотоэлектронов можно выразить через их импульс $W_k = \dfrac{P^2}{2m}$, где $P=eBR$- импульс электрона, m- масса электрона, e-заряд электрона, B- индукция магнитного поля, в котором фотоэлектроны, вектор скорости которых перпендикулярен вектору индукции магнитного поля, описывают окружность радиусом R.

Подставим значение кинетической энергии электронов в уравнение Эйнштейна для фотоэффекта (1) и получим

$$\frac{1}{\lambda_o} = \frac{1}{\lambda_k} + \frac{(eBR)^2}{2mhc} = \frac{1}{235}\cdot 10^{9} + \frac{(1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-2})^2}{2\cdot 9{,}1\cdot 6{,}63\cdot 10^{-65}\cdot 3\cdot 10^{8}} =$$

$=1{,}59^{7}$ м$^{-1}$или λ_0=49,6 нм.

Ответ. Длина волны падающего электромагнитного излучения λ_0=49,6 нм.

Пример 3. При исследовании излучения, возникшего в результате рассеяния на графите под углом $\theta = 90°$ рентгеновского пучка с длиной волны $\lambda = 0{,}0714$ нм (K_α-молибдена), дифракционный максимум первого порядка несмещенной компоненты получился при падении на кристалл рентгеновского спектрографа под углом скольжения φ = 30°. На какой угол $\delta\varphi$ нужно было повернуть кристалл для того, чтобы максимум несмещённой компоненты был замещен максимумом смещенной компоненты?

Решение. Первый максимум дифракционной картины при отражении от кристалла рентгеновских лучей определяется формулой Вульфа-Брегга

$$2d\cdot\sin\phi = \lambda_0; \qquad (1)$$
$$2d\cdot\sin(\phi + \Delta\phi) = \lambda, \qquad (2)$$

где λ_o- длина волны рентгеновских лучей не рассеянных на электронах, $\lambda = \lambda_o + 2\lambda_K\cdot\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ - длина волны рентгеновских лучей, при комптоновском рассеянии на свободных электронах. $\lambda_K = \dfrac{h}{m_e c} = 0{,}24\cdot 10^{-11}$ м - комптоновская длина волны.

Учитывая, что $\Delta\phi \approx 0$, уравнение (2) можно записать следующим образом:

$$2d(\sin\phi + \Delta\phi\cdot\cos\phi) = \lambda_o + 2\lambda_K\cdot\sin^2\frac{\theta}{2}. \qquad (3)$$

Разделим уравнение (3) на уравнение (1), получим

$$\Delta\phi \cdot ctg\phi = \frac{2\lambda_K}{\lambda_н}\cdot \sin^2\frac{\theta}{2} \text{ или } \Delta\phi = \frac{2\lambda_K}{\lambda_н}\cdot \sin^2\frac{\theta}{2}\cdot tg\phi =$$

$$= \frac{2\cdot 0.243\cdot 10^{-11}}{7.14\cdot 10^{-11}}\cdot 0.5\cdot 0.577 = 0.0196 рад = 1^0 8'.$$

Ответ: $\Delta\varphi = 1°8'$.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Что такое работа выхода электрона и от чего она зависит?
2. Что называется задерживающим напряжением и чем определяется эта величина?
3. Как при заданной частоте света, падающего на катод, изменить фототок насыщения?
4. Как, используя опыты по фотоэффекту, определить постоянную Планка?
5. Может ли золотая пластинка служить фотосопротивлением?
6. В опытах по фотоэффекту зависимость разности потенциалов $U_з$, необходимой для прекращения фототока от частоты падающего света, изображается наклонными прямыми (рис.12). Как по наклону этих прямых определить постоянную Планка и работу выхода электрона из металла?
7. В каком опыте (1 или 2 см. рис.12) для катода использовали металл с большей работой выхода?
8. Два плоских электрода, находящихся в вакууме на расстоянии d, соединены между собой через активное сопротивление (рис.13). Один из электродов освещают светом, в спектре которого имеется излучение с длиной волны $\lambda \le \frac{hc}{A_{вых}}$. Какой по величине ток будет существовать в цепи?
9. В какую сторону начнёт вращаться крыльчатка в демонстрационном радиометре Крукса при освещении её светом и почему?

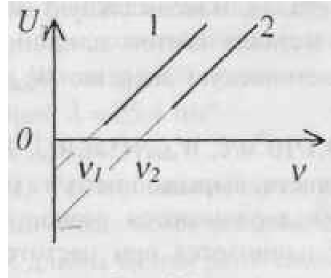


Рис. 12

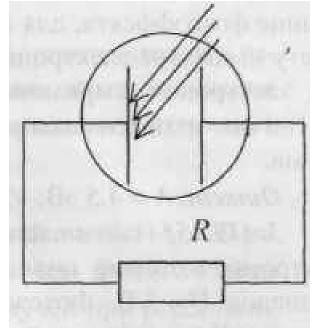


Рис. 13

10. Почему свободный электрон не может полностью поглотить фотон?
11. В чём отличие взаимодействия фотона и электрона при фотоэффекте и при комптоновском рассеянии?
12. Может ли свободный электрон излучать кванты света?
13. В результате комптоновского рассеяния в одном случае фотон полетел под углом θ_1 к первоначальному направлению падающего фотона (рис. 14), а другом - под углом θ_2. В каком случае длина волны излучения после рассеяния больше, и в каком случае электрон, участвующий во взаимодействии, получил большую энергию?

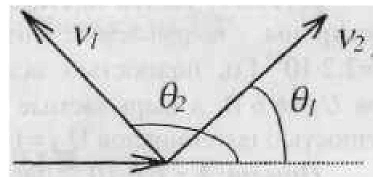


Рис. 14

14. Сравнить энергию фотона (λ = 500 нм) с кинетической энергией поступательного движения молекул водорода при комнатной температуре.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

7. Средняя длина волны излучения лампы накаливания с металлической спиралью равна 1200 нм. Найти число фотонов, испускаемых за единицу времени лампой мощностью 200 Вт.

Ответ: $N = 1{,}2\cdot 10^{21}$

2. (19.14) Длина волны света, соответствующая красной границе фотоэффекта, для некоторого металла $\lambda = 215$ нм. Найти работу выхода A электрона из металла, максимальную скорость V_{max} электронов, вырванных из металла светом длиной волны $\lambda = 180$ нм, и максимальную кинетическую энергию W_{max} электронов.

Ответ: $A = 4{,}5$ эВ; $V_{max} = 9{,}1\cdot10^5$ м/с; $W_{max} = 3{,}8\cdot10^{-19}$ Дж.

3. (19.15) Найти частоту ν света, вырывающего из металла электроны, которые полностью задерживаются разностью потенциалов $U = 3$ В. Фотоэффект начинается при частоте света $\nu_{min} = 6\cdot10^{14}$ Гц. Найти работу выхода A электрона из металла.

Ответ: $\nu = (A + eU)/h = 13{,}2\cdot10^{14}$ Гц;

$A = 39{,}78\cdot10^{-20}$ Дж $= 2{,}5$ эВ.

4. (19.18) Фотоны с энергией $W = 4{,}9$ эВ вырывают электроны из металла с работой выхода $A = 4{,}5$ эВ. Найти максимальный импульс P_{max}, передаваемый поверхности металла при вылете каждого электрона.

Ответ: $P_{max} = 3{,}45\cdot10^{-25}$ кг·м/с.

5. (19.19) Найти постоянную Планка h, если известно, что электроны, вырываемые из металла светом с частотой $\nu = 2{,}2\cdot10^{15}$ Гц, полностью задерживаются разностью потенциалов $U_1 = 6{,}6$ В, а вырываемые светом с частотой $\nu = 4{,}6\cdot10^{15}$ Гц разностью потенциалов $U_2 = 16{,}5$ В.

Ответ: $h = 6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж·с.

6. (19.23) В одном из опытов П.Н.Лебедева при падении света па зачерненный кружок $(\rho = 0)$ угол поворота крестовины, подвешенной па упругой нити, был равен $\varphi = 10'$. Найти световое давление p и мощность N падающего света. Диаметр кружка $d = 5$ мм, расстояние от центра кружка до оси вращения $l = 9{,}2$ мм, постоянная момента кручения $(M = k\varphi)$ $k = 2{,}2\cdot10^{-11}$ Н·м/рад.

Ответ: $p = 0{,}335$ мкПа; $N = 2{,}1$ мВт.

7. (19.26) Найти световое давление p на стенки электрической 100-ваттной лампы. Колба представляет собой сферический сосуд радиусом $r = 5$ см. Стенки лампы отражают 40% и пропускают 60% падающего на них света. Считать, что вся потребляемая мощность идет на излучение.

Ответ: $p = 10{,}4$ мкПа.

8. (19.30) Какова была длина волны λ_0 рентгеновского излучения, если при комптоновском рассеянии этого излучения графитом под углом $\varphi = 60°$ длина волны рассеянного излучения оказалась равной $\lambda = 25{,}4$ пм?

Ответ: $\lambda_0 = 24{,}2$ пм.

*9. **(19.31)*** Рентгеновские лучи с длиной волны $\lambda_0 = 20$ пм испытывают комптоновское рассеяние под углом $\theta = 90°$. Найти изменение $\Delta\lambda$ длины волны рентгеновских лучей при рассеянии, а также энергию W_e и импульс электрона отдачи.

Ответ: $\Delta\lambda = 2{,}42$ пм; $W_e = 6{,}6$ кэВ; $p_e = 4{,}4\cdot10^{-23}$ кг·м/с.

10. (19.32) При комптоновском рассеянии энергия падающего фотона распределяется поровну между рассеянным фотоном и электроном отдачи. Угол рассеяния $\theta = \pi/2$. Найти энергию W и импульс p рассеянного фотона.

Ответ: $W = 0{,}26$ МэВ; $p = 9{,}3\cdot10^{-12}$ кг·м/с.

П. (19.33) Энергия рентгеновских лучей $W = 0{,}6$ МэВ. Найти энергию W_e электрона отдачи, если длина рентгеновских лучей после комптоновского рассеяния изменилась па 20%.

Ответ: $W_e = 0{,}1$ МэВ.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ В

1. (6.12) Определить красную границу фотоэффекта λ_0 для цезия, если при облучении его поверхности светом длиной волны $\lambda = 400$ нм максимальная скорость фотоэлектронов равна $V_{max} = 0{,}65$ м/с.

Ответ: $\lambda_0 = 6{,}49\cdot10^{-7}$ м.

2. (6.13) Какая доля энергии фотона W_0 израсходована на работу выхода фотоэлектрона, если красная граница фотоэффекта $\lambda = 307$ пм и максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона $W_{max} = 1$ эВ?

Ответ: $A = 0{,}8\ W_0$.

3. (6.14) При облучении ультрафиолетовым светом платипластинки задерживающая разность потенциалов U_1

= 3,7 В. Если платиновую пластинку заменить другой пластинкой, то задерживающая разность потенциалов будет $U_2 = 6$ В. Определить работу выхода электронов с поверхности второй пластинки. (Работа выхода электронов из платины A_1=6.3 эВ).

Ответ: A_2 =4 эВ.

4. (6.16) На цинковую пластину падает пучок ультрафиолетовых лучей с длиной волны $\lambda = 0{,}2$ мкм. Определить максимальную кинетическую энергию и максимальную скорость фотоэлектронов.

Ответ: $W_{max} = 5{,}81$ эВ, $V_{max} = 1{,}43 \cdot 10^6$ м/с.

5 Импульс света, содержащий $5 \cdot 10^4$ фотонов с длиной волны 0.3 мкм, падает на поверхность фотокатода, спектральная чувствительность которого для этой длины волны равна 4,5 мА/Вт. Найти число фотоэлектронов, освобождённых этим импульсом света.

Ответ: 930 фотоэлектронов.

6. (6.21) Рентгеновский фотон с энергией $W_{ф1}$, равной удвоенному значению энергии покоя электрона, был рассеян на свободном электроне на угол $\theta = 120°$. Определить энергию рассеянного фотона и кинетическую энергию электрона отдачи.

Ответ: $W_{ф2} = 0{,}255$ МэВ; $W_e = 0{,}766$ МэВ.

7.(6.28) При эффекте Комптона γ-квант с энергией $W_ф$=1,533 МэВ был рассеян на некоторый угол θ. Найти угол рассеяния γ- кванта, если кинетическая энергия электрона отдачи оказалась равной W_e=0,5 l 1 МэВ.

Ответ: θ =80,8°.

• *8. (6.30)* Фотон с энергией $W_ф$=0,3 МэВ рассеян на свободном электроне, в результате чего длина волны рассеянного фотона изменилась на $\Delta\lambda = 3{,}0$ пм. Найти угол рассеяния фотона и кинетическую энергию электрона отдачи.

Ответ: θ= 104°; W_e= 126 кэВ.

9. (6.32) Давление монохроматического света (λ =400 нм) на чёрную поверхность (ρ=0), расположенную перпендикулярно падающим лучам, равно 15 мкПа. Определить число фотонов, падающих ежесекундно на поверхность площадью 1 см^2.

Ответ: $N = 9{,}06 \cdot 10^{15}$.

10. (6.33) Монохроматическое излучение с длиной волны λ = 600 нм падает нормально на плоскую зеркальную поверхность (ρ=1) и давит на неё с силой 4 нН. Определить число N фотонов, падающих на эту поверхность за 1 с.

Ответ: $N = 18{,}1 \cdot 10^{17}$.

11. (6.34) На зеркальную поверхность (ρ=1) площадью 8 см^2 падает нормально поток излучения 0,4 Вт. Определить давление и силу давления света на эту поверхность.

Ответ: $p = 3{,}33 \cdot 10^{-6}$ Па; $F = 26{,}6 \cdot 10^{-10}$ Н.

12. (6.36) Монохроматическое излучение с длиной волны λ = 582 нм падает нормально на поверхность и производит на неё давление 4,9 мкПа. Определить число фотонов N, которое ежесекундно падает на единицу площади этой поверхности. Коэффициент отражения света $\rho = 0{,}25$.

Ответ: $N = 3{,}44 \cdot 10^{21}$.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1. Найти плотность потока квантов на расстоянии 1 м от точечного изотропного источника света мощностью 1 Вт, если источник испускает монохроматический свет с длиной волны λ = 0,7 мкм.

Ответ: $4 \cdot 10^{17}$ квант/м^2·с.

2. Фотон испущен с поверхности звезды, масса которой $M = 2 \cdot 10^{30}$ кг и радиус $R = 10^8$ м. Предположив, что фотон обладает массой с присущими ей гравитационными свойствами, найти относительное уменьшение его энергии на большом расстоянии от звезды. Вычислить гравитационное смещение длины волны излучения ($\Delta\lambda/\lambda$), испускаемого с поверхности звезды.

Ответ: $\dfrac{\Delta\hbar\omega}{\hbar\omega} = 2{,}1 \cdot 10^{-6}$; $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \dfrac{GM}{Rc^2} = 2{,}12 \cdot 10^{-6}$.

3. Монохроматический пучок электромагнитных волн падает на тонкую металлическую фольгу, находящуюся в вакууме в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ Гл. Радиус кривизны траектории электронов, выбитых из металла в плоскости, перпендикулярной полю, оказался равным 0,1 м. Определить длину волны подающего излучения, если красная граница фотоэффекта для фольги равна $0,15\cdot10^{-9}$м.

Ответ: $0,12\cdot10^{-9}$ м.

4. До какого потенциала можно зарядить удалённый от других тел цинковый шарик, облучая его ультрафиолетовым светом с длиной волны $\lambda = 200$ нм? Работа выхода электрона из цинка равна A = 3,74 эВ.

Ответ: $\varphi = 2,5$ В.

5. Катод вакуумного фотодиода равномерно освещается монохроматическим светом с λ = 450 нм. Площадь катода S - \ см^2. Освещенность E = 100 лк. (Такая освещенность в белом свете нужна для того, чтобы можно было читать без напряжения). Определить ток насыщения $I_{нас}$, текущий через диод. При указанной длине волны световому потоку в 1 лм соответствует поток энергии 0,04 Вт. Квантовый выход фотоэффекта (т.е. число фотоэлектронов, приходящееся на один падающий фотон) принять равным 0,05.

Ответ: $I_{нас} = 1$ мкА.

6. Рубиновый лазер излучает в импульсе длительностью τ = 0,1 мкс энергию E = 10 Дж в виде узкого почти параллельного пучка света. Найти среднее за время импульса давление такого пучка света, если его сфокусировать в пятнышко диаметром d = 10 мкм на поверхность, перпендикулярную пучку, с коэффициентом отражения ρ = 0,5.

Ответ: $\langle E\rangle = \dfrac{4E}{\pi\cdot d^2 c\tau}(1+\rho) = 65\cdot10^5$ Па.

7. Небольшое идеально отражающее зеркальце массой /7? = 10 мг подвешено на невесомой нити длиной l = 10 см. Найти угол, на который отклонится нить, если по нормали к зеркальцу в горизонтальном направлении произвести "выстрел" коротким импульсом лазерного излучения с энергией E - 13 Дж.

Ответ: $\theta = 0,5°$.

S. Какой диаметр должен иметь алюминиевый шарик, находящийся в космическом пространстве, чтобы его притяжение к солнцу уравновешивалось силой светового давления солнечных лучей? Коэффициент отражения шарика 0,9. При решении задачи считать, что Солнце излучает как абсолютно черное тело, по-

верхность которого имеет температуру 6000 К.

Ответ: 0,9 мкм.

9. Фотон с энергией $\hbar\cdot\omega$ рассеялся под углом $\theta = \pi/2$ на покоившемся свободном электроне. Найти величину комптоновского изменения длины волны рассеянного фотона и угол, под которым полетит электрон по отношению к направлению падающего фотона.

Ответ: $\Delta\lambda = 2\dfrac{2\pi\cdot\hbar}{mc}\sin^2\dfrac{\theta}{2}$; $tg\phi = \dfrac{ctg(\theta/2)}{1+\dfrac{\hbar\cdot\omega}{mc^2}}$

10. Определить максимальное изменение длины волны при рассеянии света на протонах (масса протона $1,67\cdot10^{-27}$ кг).

Ответ: $\Delta\lambda = 2,64\cdot10^{-15}$ **м.**

11. При исследовании излучения, возникшего в результате рассеяния на графите под углом $\theta = 90°$ рентгеновского пучка с длиной волны $\lambda = 0,0714$ нм (K_α-молибдена), дифракционный максимум первого порядка несмещенной компоненты получился при падении на кристалл рентгеновского спектрографа под углом скольжения $\varphi = 30°$. На какой угол $\delta\varphi$ нужно было повернуть кристалл для того, чтобы максимум несмещённой компоненты был замещён максимумом смещенной компоненты.

Ответ: $\delta\varphi = 1°8'$.

12. Узкий пучок рентгеновских лучей падает на монокристалл NaCl. Наименьший угол скольжения, при котором ещё наблюдается зеркальное отражение от системы кристаллических плоскостей с межплоскостными расстоянием $d = 0.28$ пм равен $\theta = 4,1°$. Каково напряжение на рентгеновской трубке?

Ответ: U=31 кВ.

МОДУЛЬ 7. Квантовая физика и физика твердого тела

Занятие 1. Волновые свойства частиц

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Волновые свойства частиц.
2. Соотношения неопределенностей.
3. Волна де Бройля и ее свойства.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Формула де Бройля

1.1. Формула де Бройля, выражающая связь длины волн с импульсом p движущейся частицы, для двух случаев:

а) в классическом приближении ($v<<c$; $p=m_0v$)

$$\lambda=2\pi\hbar/p=2\pi\hbar/m_0v;$$

б) в релятивистском случае (скорость v частицы сравнима со скоростью света c в вакууме, $p=mv=m_0v/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$)

$$\lambda=\frac{2\pi\hbar}{m_0v}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

1.2. Связь длины волны де Бройля с кинетической энергией T частицы:

а) в классическом приближении $\lambda=\frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0T}}$

б) в релятивистском случае $\lambda=\frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{T(T+2E_0)}}$,

где E_0 - энергия покоя частицы ($E_0=m_0c^2$);

в) связь между кинетической энергией и импульсом релятивистской частицы

$$p^2\cdot c^2=T(T+2m_0c^2).$$

1.3. Фазовая скорость волн де Бройля

$$v=\frac{\omega}{k},$$

где ω-круговая частота; k- волновое число ($k=2\pi/\lambda$).

1.4. Групповая скорость волн де Бройля

$$u=\frac{d\omega}{dk}.$$

1.5. Соотношения де Бройля

$$E=\hbar\,\omega,\ \vec{p}=\hbar\,\vec{k},$$

где E - энергия движущейся частицы; p - импульс частицы; $\vec{k}$-волновой вектор; $|\vec{k}|=k=2\pi/\lambda$; $\hbar$ - постоянная Планка ($\hbar=h/(2\pi)=1{,}05\cdot10^{-34}$ Дж·с.

2. Соотношения неопределённостей

2.1. Для координаты и импульса частицы

$$\Delta p_x\cdot\Delta x\geq\hbar,$$

где Δp_x- неопределённость проекции импульса частицы на ось x; Δx-неопределённость её координаты.

2.2. Для энергии и времени

$$\Delta E\cdot\Delta t\geq\hbar,$$

где ΔE- неопределённость энергии данного квантового состояния; Δt-время пребывания системы в этом состоянии.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Найти длину волны де Бройля λ для электрона, обладающего кинетической энергией: 1) $T=100$ эВ; *2)* $T=3{,}0$ МэВ.

Решение. 1) Так как $T<<m_0c^2$, где $m_0c^2=0{,}51$ МэВ - энергия покоя электрона, то в данном случае электрон является классической частицей. Значит, его импульс и кинетическая энергия связаны соотношением

$$T=\frac{mv^2}{2}=\frac{m^2v^2}{2m}=\frac{p^2}{2m}.$$

Отсюда $p=\sqrt{2mT}$

Подставив это значение в формулу длины волны де Бройля $\lambda=\frac{2\pi\hbar}{p}$, получим $\lambda_1=2\pi\hbar/\sqrt{2mT}$

Заменим в формуле величины их числовыми значениями: $2\pi\hbar = h = 6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с, $m=9{,}11\cdot10^{-31}$ кг. $T = 1{,}00\cdot10^{2}\cdot1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж. Выполнив вычисление, найдем

$\lambda_1 = 1{,}2\cdot10^{-10}$ м = 1,23 A

2) Во втором случае $T>m_0c^2$. Поэтому электрон следует считать релятивистской частицей. Для этого случая воспользуемся выражением для импульса

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{T(2m_0c^2+T)}.$$

где $m_0 = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг-масса покоя электрона. Следовательно,

$$\lambda_2 = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{T(2m_0c^2+T)}}$$

Произведя вычисление, получим λ_2 = 0,62 A .

Ответ. Длина волны де Бройля для электрона с кинетической энергией 100 эВ равна $\lambda_1 = 1{,}2\cdot10^{-10}$ м = 1,23 A, с кинетической энергией 3,0 МэВ равна $\lambda_2 = 0{,}62$ A

Пример 2. Электрон, начальной скоростью которого можно пренебречь, прошел ускоряющую разность потенциалов U. Найти длину волны де Бройля λ для двух случаев: $U_1 = 51$ В; 2) $U_2 = 510$ кВ.

Решение. Длина волны де Бройля λ частицы зависит от ее импульса p и определяется формулой

$$\lambda = 2\pi\hbar / p$$

Импульс частицы можно определить, если известна ее кинетическая энергия *T*. Связь импульса с кинетической энергией для нерелятивистского случая (когда $T<<E_0$, где E_0- энергия покоя электрона)

$$p = \sqrt{2m_0T}. \qquad \text{(O}$$

для релятивистского (когда $T\approx E_0$) соответственно выражается формулой

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{(2E_0+T)T}. \qquad (2)$$

Тогда, длина волны де Бройля, с учетом (1) и (2), будет иметь вид

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0T}} \qquad (3)$$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{(1/c)\sqrt{(2E_0+T)T}} \qquad (4)$$

Сравним кинетические энергии электрона, прошедшего заданные в условии задачи разности потенциалов $U_1 = 51$ В и $U_2 = 510$ кВ, с энергией покоя электрона и в зависимости от этого решим вопрос, какую из формул (3) и (4) следует применить для вычисления длины волны де Бройля.

Как известно, кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U_1, $T_1 = |e|U_1$, T_1=51 эВ, что много меньше энергии покоя электрона $E_0 = m_0c^2$=0,51 МэВ. Следовательно, можно применить формулу (3).

Для упрощения расчетов заметим, что $T_1 = 10^{-4}m_0c^2$, подставив это выражение в формулу (3), перепишем ее в виде

$$\lambda_1 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0\cdot10^{-4}m_0c^2}} = \frac{10^2}{\sqrt{2}}\frac{2\pi\hbar}{m_0c}.$$

Учитывая, что $\left[\frac{2\pi\hbar}{m_0c}\right]$ есть комптоновская длина волны λ_C, получим

$$\lambda_1 = (10^2/\sqrt{2})\lambda_C$$

Так как $\lambda_C = 2{,}43\cdot10^{-12}$ м, то

$$\lambda_1 = \frac{10^2}{\sqrt{2}}\cdot2{,}43\cdot10^{-12} \text{ м} = 172 \text{ пм}.$$

Во втором случае кинетическая энергия $T_2 = |e|U_2 = 510$ кэВ =0,51 МэВ, т.е. равна энергии покоя электрона. Следовательно, необходимо применить релятивистскую формулу (4).

Учтя, что $T_2 = 0{,}51$ МэВ $= m_0c^2$, по формуле (4) найдем

$$\lambda_2 = \frac{2\pi\hbar}{\frac{1}{c}\sqrt{(2m_0c^2 + m_0c^2)m_0c^2}} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{3}m_0c}$$

или $\lambda_2 = \frac{\lambda_C}{\sqrt{3}}$.

Подставивзначение λ_C в последнюю формулу и произведя вычисления, получим $\lambda_2 = 1{,}4$ пм.

Ответ. Длина волны де Бройля для ускоряющего напряжения 51 В равна $\lambda_1 = 172$ пм, для ускоряющего напряжения 510 кВ равна $\lambda_2 = 1{,}4$ пм.

Пример 3. Средняя кинетическая энергия электрона в невозбужденном атоме водорода равна 13,6 эВ. Исходя из соотношения неопределенностей, найти наименьшую неточность, с которой можно вычислить координату электрона в атоме.

Решение. Как следует из соотношения неопределенностей, неточность координаты частицы

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p_x}$$

Величина Δp_x неизвестна, однако сам импульс p (точнее его среднее квадратичное значение) легко найти, поскольку нам известна средняя кинетическая энергия T электрона. Рассматривая электрон как нерелятивистскую частицу (так как $T \ll m_0c^2$), выражение для импульса имеет вид

$$p = \sqrt{2mT}$$

Неопределенность импульса Δp_x не должна превышать значенияимпульса p, $\Delta p_x \leq p$, тогда

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mT}}$$

Произведя вычисления, найдем $\Delta x \geq 5 \cdot 10^{-11}$ м.

Следовательно, наименьшая, допустимая соотношением неопределенностей неточность $(\Delta x)_{\text{мин}}$, с которой можно определить координату электрона в атоме водорода, есть величина порядка $5 \cdot 10^{-11}$ м.

Ответ. Наименьшая неточность, с которой можно вычислить координату электрона в атоме есть величина порядка $5 \cdot 10^{-11}$ м.

Пример 4. Кинетическая энергия T электрона в атоме водорода составляет величину порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные линейные размеры атома.

Решение. Неопределенность координаты и импульса электрона связаны соотношением

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar, \tag{1}$$

где Δx неопределенность координаты электрона; Δp неопределенность его импульса.

Из этого соотношения следует, что чем точнее определяется положение частицы в пространстве, тем более неопределенным становится импульс, а следовательно, и энергия частицы. Пусть атом имеет линейные размеры l, тогда электрон атома будет находиться где-то в пределах области с неопределенностью $\Delta x = l/2$. Соотношение неопределенностей (1) можно записать в этом случае в виде $(l/2)\Delta p \geq \hbar$, откуда

$$l \geq 2\hbar/(\Delta p) \tag{2}$$

Физически разумная неопределенность импульса Δp не должна превышать значения самого импульса p, т.е. $\Delta p \leq p$.

Импульс p связан с кинетической энергией T соотношением $p = \sqrt{2mT}$. Заменим Δp значением $\sqrt{2mT}$ (такая замена не увеличит /). Переходя от неравенства (2) к равенству, получим

$$l_{\min} = 2\hbar/\sqrt{2mT}$$

Подставив числовые значения и произведя вычисления, найдем $l_{\min} = 124$ пм.

Ответ. Минимальные линейные размеры атома имеют величину порядка $l_{\min} = 124$ пм.

Пример 5. Параллельный пучок электронов падает нормально на диафрагму с узкой прямоугольной щелью, ширина которой $a = 2{,}0$ мкм. Определить скорость электронов (считая ее одинаковой для всех частиц), если известно, что на экране, отстоящем от щели на расстоянии l =50 см, ширина центрального дифракционного максимума b =80 мкм.

Решение. Дифракция электронов является следствием волновой природы частиц. Поэтому для определения скорости электронов применим формулу де Бройля, откуда

$$v = 2\pi\hbar/m\lambda. \quad (1)$$

Чтобы найти длину волны де Бройля Я, воспользуемся тем обстоятельством, что дифракционная картина, возникающая при прохождении через узкую щель параллельного пучка электронов, вполне соответствует дифракционной картине, полученной от этой же щели при освещении ее параллельным пучком монохроматического света, длина волны которого равна длине волны де Бройля для электрона. Это значит, что в случае дифракции электронов положение дифракционных минимумов можно определить по формуле

$$a\sin\varphi = \pm k\lambda \qquad (k = 1, 2, 3,\dots), \quad (2)$$

где a - ширина щели; λ - длина волны де Бройля для электрона; k - порядок минимума. Считая, что центральный дифракционный максимум заключен между двумя минимумами первого порядка (расстояние между которыми равно b), и учитывая соотношение между величинами b и l, получим $\sin\varphi \approx \mathrm{tg}\varphi = b/2l$.

Отсюда, полагая в формуле (2) k = 1, имеем $\lambda = ab/2l$.

Подставив это значение λ в (1), найдем

$$v = 4\pi\hbar l/mab. \quad (3)$$

Произведем вычисление по (3), предположив, что $v \ll c$. Считая электрон классической частицей, пренебрежем зависимостью его массы от скорости. Тогда $m = m_0 = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг и расчет дает

$$v = 4{,}5\cdot10^6 \text{ м/с}. \quad (4)$$

Так как в действительности масса движущегося электрона не меньше его массы покоя m_0, то истинное значение скорости v, определяемое по (3), будет не больше, чем вычисленное нами. Таким образом, предположение о том, что $v \ll c$, соответствует действительности, и, значит, результат (4) правильный.

Ответ. Скорость электронов равна $v = 4{,}5\cdot10^6$ м/с.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. В чём заключается гипотеза де Бройля?
2. От чего зависит длина волны де Бройля?
3. Как связана длина волны де Бройля с энергией частицы в нерелятивистском и релятивистском случаях?
4. Написать выражение для дебройлевской длины волны Я релятивистской частицы массы /;?: а) через её скорость v; б) через кинетическую энергию T.
5. Что называется принципом неопределённости Гейзенберга?
6. В чем состоит корпускулярно-волновой дуализм свойств света?
7. Можно ли, пользуясь соотношениями неопределённостей, по известному импульсу фотона определить область его локализации?
8. Какой смысл вкладывается в соотношение неопределённостей $\Delta E\cdot\Delta t \geq \hbar$?
9. Найти зависимость дебройлевской длины волны λ от кинетической энергии Г ультрарелятивистской частицы $(T \gg mc^2)$.
10. Найти зависимость дебройлевской длины волны λ от кинетической энергии Г нерелятивистской частицы $(T \ll mc^2)$.
11. Докажите, что соотношение неопределенности Гейзенберга для фотона $\Delta x\cdot\Delta p_x \geq h$ можно получить, рассматривая дифракцию плоской волны на узкой щели шириной Δx.
12. Оцените, можно ли применять законы классической физики к электронам, движущимся в кинескопе телевизора?
13. Согласно классической кинетической теории при $T = 0$ К прекращается движение молекул. В частности, по отношению к твердому телу это означает, что тепловое колебательное движение атомов или молекул, образующих его кристаллическую решетку, также прекращается. Справедливо ли такое заключение с точки зрения квантовой механики?

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

(19.34) Найти длину волны де Бройля λ для электронов, прошедших разность потенциалов $U_1 = 1$ В и $U_2 = 100$ В.

Ответ: $\lambda_1 = 1{,}23$ нм; $\lambda_2 = 0{,}123$ нм.

2. (19.35) Найти длину волны де Бройля для пучка протонов, прошедших разность потенциалов $U_1 = 1$ В и $U_2 = 100$ В.

Ответ: $\lambda_1 = 29$ пм; $\lambda_2 = 2{,}9$ пм.

3.(19.36) Найти длину волны де Бройля λ для: а) электрона, движущегося со скоростью $v = 10^6$ м/с; б) атома водорода, движущегося со средней квадратичной скоростью при температуре $T = 300$ К; в) шарика массой $m = 1$ г, движущегося со скоростью $v = 1$ см/с.

Ответ: а) $\lambda_1 = 130$ пм; б) $\lambda_2 = 144$ пм; в) $\lambda_3 = 6{,}6\cdot10^{-29}$ м, т.е. волновые свойства шарика обнаружить невозможно.

4.(19.38) Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов $U_1 = 200$ В, имеет длину волны де Бройля $\lambda = 2{,}02$ пм. Найти массу m частицы, если её заряд численно равен заряду электрона.

Ответ: $m = 1{,}67\cdot10^{-27}$ кг.

5. (19.40) α-частица движется по окружности радиусом $r = 8{,}3$ мм в однородном магнитном поле, напряженность которого $H = 18{,}9$ кА/м. Найти длину волны де Бройля λ для α-частицы.

Ответ: $\lambda = 10$ пм.

6. (19.41) Найти длину волны де Бройля λ для атома водорода, движущегося при температуре $T = 293$ *К* с наиболее вероятной скоростью.

Ответ: $\lambda = 180$ пм.

7.(45.22) Определить неточность Δx в определении координаты электрона, движущегося в атоме водорода со скоростью $v = 1{,}5\cdot10^6$ м/с, если допускаемая неточность Δv в определении скорости составляет 10% от её величины. Сравнить полученную неточность с диаметром d атома водорода, вычисленным по теории Бора для основного состояния, и указать, применимо ли понятие траектории в данном случае.

Ответ: 0,77 нм; 0,106 нм; т.к. $\Delta x >> d$, то понятие траектории в данном случае не применимо.

8. (45.23) Электрон с кинетической энергией $T = 15$ эВ находится в металлической пылинке диаметром $d = 1$ мкм. Оценить относительную неточность Δv, с которой может быть определена скорость электрона.

Ответ: $\Delta v/v = 10^{-4}$.

9. (45,24) Во сколько раз дебройлевская длина волны λ частицы меньше неопределённости Δx её координаты, которая соответствует относительной неопределённости импульса в 1 %?

***Ответ:* в** 16 раз.

10. *(45.27)* Используя соотношение неопределённостей $\Delta x\cdot\Delta p \geq \hbar$, оценить низший энергетический уровень электрона в атоме водорода. Принять линейные размеры атома $l \approx 0{,}1$ нм.

Ответ: $E_{min} = \dfrac{2\hbar^2}{ml^2} = 15$ эВ.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ В

1. (45.4) Определить длину волны де Бройля Я электрона, если его кинетическая энергия $T = 1$ кэВ.

Ответ: $\lambda = 39$ пм.

2. (6.54) Сравнить длину волны де Бройля для электрона и шарика 0,1 г, имеющих одинаковые скорости.

Ответ: $\lambda_m/\lambda_e = 9{,}1\cdot10^{-27}$.

3. (6.55) Сравнить длину волны де Бройля для электрона и протона, прошедших ускоряющую разность потенциалов $U = 1000$ В

Ответ: $\lambda_e/\lambda_p = 42{,}8$.

4. (6.57) Какую ускоряющую разность потенциалов U должен пройти электрон, чтобы его длина волны де Бройля стала 1 А?

Ответ: $U = 150$ В.

5. (6.58) Электрон обладает кинетической энергией 1,53 МэВ. Во сколько раз изменится длина волны де Бройля, если кинетическая энергия электрона уменьшится втрое?

Ответ: $n = 2{,}24$.

6. (6.60) При каком значении кинетической энергии длина волны де Бройля электрона равна его комптоновской длине волны $(2{,}42\cdot10^{-12})$ м?

***Ответ:* T=0,21** МэВ.

7. (6.73) Используя соотношение неопределённостей, оценить кинетическую энергию нуклона в ядре, полагая радиус ядра равным 10^{-12} см

***Ответ*:** $T = 0{,}21$ МэВ.

8. (6.74) Сравнить неопределённости в определении скорости α- частицы, если её координаты установлены с точностью до 10^{-5} м, и шарика массой 10^{-4} кг, если координаты его центра тяжести могут быть установлены с такой же точностью.

***Ответ*:** $\Delta v_\alpha / \Delta v_m = 1{,}5 \cdot 10^{22}$.

9. (6.75) Сравнить неопределённость при измерении скорости электрона атома водорода с величиной его скорости на первой боровской орбите.

***Ответ*:** $\Delta v \approx v$.

10. (6.76) При движении вдоль оси *x* скорость определяется с точностью до 1 см/с. Определить неопределённость координаты: 1) для электрона; 2) для дробинки массой 0,1 г.

***Ответ*:** 1) $\Delta x = 1{,}15$ см; 2) $\Delta x = 10^{-26}$ см.

***11.** (6.78)* Используя соотношение неопределённостей, оценить ширину одномерного потенциального ящика, в котором минимальная энергия электрона равна 10 эВ.

***Ответ*:** $l = 0{,}123$ нм.

***12.** (5.45)* Параллельный поток моноэнергетических электронов падает нормально на диафрагму с узкой прямоугольной щелью шириной b = 0,10 мм. Определить скорость этих электронов, если на экране, отстоящем от щели на расстояние l = 50 см, ширина центрального дифракционного максимума Δx = 8,0 мкм.

***Ответ*:** $v = 2\pi\hbar l / mb\Delta x = 9 \cdot 10^5$ м/с.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1. Показать, используя соотношение неопределённостей, что в ядре не могут находиться электроны. Линейные размеры ядра принять равным 5 фм.

***Ответ*:** 80 **МэВ .**

2. Рассмотрим следующий мысленный эксперимент. Пусть моноэнергетический пучок электронов (T = 10 эВ) падает на щель

шириной *a*. Можно считать, что если электрон прошел через щель, то его координата известна с неточностью $\Delta x = a$. Оценить получаемую при этом относительную неточность в определении импульса $\Delta p/p$ электрона в двух случаях: а) a=10 нм; 2) a =0,1 нм.

***Ответ*:** 1) $1{,}2 \cdot 10^{-2}$; 2) 1,2.

3. Используя соотношение неопределённостей $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$, оценить ширину *Г* энергетического уровня в атоме водорода, находящегося: 1) в основном состоянии; 2) в возбуждённом состоянии (время τ жизни атома в возбуждённом состоянии равно 10^{-8} с).

***Ответ*:** а) Г=0; б) $\Gamma \approx \dfrac{\hbar}{\Delta t} = 0{,}1$ мкэВ.

4. Оценить относительную ширину $\Delta\omega/\omega$ спектральной линии, если известны время жизни атома в возбуждённом состоянии $(\tau \approx 10^{-8}\ \text{с})$ и длина волны излучаемого фотона (λ=0,6 мкм).

***Ответ*:** $\Delta\omega/\omega = 3 \cdot 10^{-8}$.

5. В потенциальном бесконечно глубоком одномерном ящике энергия *E* электрона точно определена. Значит, точно определено и значение квадрата импульса электрона $(p^2 = 2mE)$. С другой стороны, электрон заперт в ограниченной области с линейными размерами l. Не противоречит ли это соотношению неопределённостей?

***Ответ*:** нет.

6. Частица движется слева направо в одномерном потенциальном поле, показанном на рис. 15. Левее барьера, высота которого U =15 эВ, кинетическая энергия частицы T =20 эВ. Во сколько раз и как изменится дебройлевская длина волны частицы при переходе через барьер?

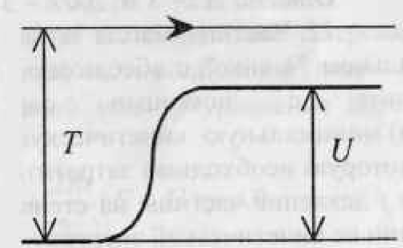


Рис. 15

***Ответ*:** увеличится в $\sqrt{T/(T-U)}$ =2,0 раза.

7. Какую энергию необходимо дополнительно сообщить электрону, чтобы его дебройлевская длина волны уменьшилась от 100 до 50 пм?

Ответ 0,45 кэВ.

8. Вычислить наиболее вероятную дебройлевскую длину волны молекул водорода, находящихся в термодинамическом равновесии при комнатной температуре.

Ответ: $\lambda_{вер} = \pi\hbar / \sqrt{mkT}$ =0,09 нм.

9. Параллельный поток моноэнергетических электронов падает нормально на диафрагму с узкой прямоугольной щелью ширины $b = 1,0$ мкм. Определить скорость этих электронов, если на экране, отстоящем от щели на расстояние l =50 см, ширина центрального дифракционного максимума Δx =0,36 мм.

Ответ: $v = 4\pi\hbar\, l/mb\Delta x$ $=2\cdot10^6$ м/с.

10. Параллельный поток электронов, ускоренных разностью потенциалов U =25 В, падает нормально на диафрагму с двумя узкими щелями, расстояние между которыми d =50 мкм. Определить расстояние между соседними максимумами дифракционной картины на экране, расположенном на расстоянии l = 100 см от щелей.

Ответ: $\Delta x = 2\pi\hbar\, l/d\sqrt{2emU}$ =4,9 мкм.

11. Атом испускает фотон λ = 0,55 мкм за время $\tau \sim 10$ с. Оценить величину неопределенности, с которой можно установить координату фотона в направлении его движения, а также относительную неопределенность его длины волны.

Ответ: $\Delta x \sim 3$ м; $\Delta\lambda/\lambda \sim 3\cdot10^{-8}$.

12. Частица массы m заключена в одномерном потенциальном "ящике" с абсолютно непроницаемыми стенками. Оценить с помощью соотношения неопределенностей: а) минимальную кинетическую энергию частицы; б) работу A, которую необходимо затратить на сжатие ящика до ширины $l/2$, и f давления частицы на стенки ящика при минимальном значении ее кинетической энергии.

Ответ: а) $W_{min} \sim \dfrac{2\hbar^2}{ml^2}$; **б) А** = $W_2 - W_1 = \dfrac{6\hbar^2}{ml^2}$ $f = \dfrac{2W_{min}}{l}$.

Занятие 2. Уравнение Шредингера

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Уравнение Шредингера.
2. Частица в потенциальной яме.
3. Квантование энергии.
4. Вероятность обнаружения частицы.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Уравнение Шредингера

1.1. Одномерное временное уравнение Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2},$$

где i- мнимая единица ($\sqrt{-1}$); m- масса частицы; $\Psi(x,t)$- волновая функция, описывающая состояние частицы.

Волновая функция, описывающая одномерное движение свободной частицы,

$$\Psi(x,t) = A\, exp\frac{i}{\hbar}(px - Et),$$

где A - амплитуда волны де Бройля; p- импульс частицы; E- энергия частицы.

1.2. Одномерное уравнение Шредингера для стационарных состояний

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0.$$

где E- полная энергия частицы; $U(x)$ -потенциальная энергия; $\psi(x)$- координатная (или амплитудная) часть волновой функции.

1.3. Для случая трёх измерений $\psi(x,y,z)$ уравнение Шредингера записывается в виде

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0$$

или в операторной форме

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

При решении уравнения Шредингера следует иметь в виду стандартные условия, которым должна удовлетворять волновая функция: конечность (во всём пространстве), однозначность, непрерывность самой ψ-функции и её первой производной.

2. **Вероятность обнаружения частицы**

2.1. Вероятность dW обнаружить частицу в интервале от x до $x+dx$ (в одномерном случае) выражается формулой

$$dW = |\psi(x)|^2 dx,$$

где $|\psi(x)|^2$ - плотность вероятности.

2.2. Вероятность W обнаружить частицу в интервале от x_1 до x_2 находится интегрированием dW в указанных пределах

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx.$$

3. Квантование энергии

3.1. Собственное значение энергии E_n частицы, находящейся на n-м энергетическом уровне в бесконечно глубоком одномерном прямоугольном потенциальном ящике, определяется формулой

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где l - ширина потенциального ящика.

3.2. Соответствующая этой энергии собственная волновая функция имеет вид

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Электрон находится в бесконечно глубоком одномерном прямоугольном потенциальном ящике шириной l. Вычислить вероятность того что электрон, находящийся в возбужденном состоянии $(n = 2)$, будет обнаружен в средней трети ящика.

Решение. Вероятность W обнаружить частицу в интервале $x_1 < x < x_2$ определяется равенством

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\psi_n(x)|^2 dx \qquad (1)$$

где $\psi_n(x)$ нормированная собственная волновая функция, отвечающая данному состоянию.

Нормированная собственная волновая функция, описывающая состояние электрона в потенциальном ящике, имеет вид

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x$$

Возбужденному состоянию $(n=2)$ отвечает собственная функция

$$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2\pi}{l} x \qquad (2)$$

Подставив $\psi_2(x)$ в подинтегральное выражение формулы (1) и вынося постоянные величины за знак интеграла, получим

$$W = \frac{2}{l} \int_{x_1}^{x_2} \sin^2 \frac{2\pi}{l} x dx \qquad (3)$$

Согласно условию задачи, $x_1 = 1/3l$ и $x_2 = 2/3l$. Подставим эти пределы интегрирования в формулу (3). произведем замену $\sin^2 \frac{2\pi}{l} x = \frac{1}{2}(1 - \cos \frac{4\pi}{l} x)$ и разобьем интеграл на два:

$$W = \frac{2}{l} \int_{l/3}^{2l/3} \sin^2 \frac{2\pi}{l} x dx = \frac{1}{l} \left\{ \int_{l/3}^{2l/3} dx - \int_{l/3}^{2l/3} \cos \frac{4\pi}{l} x dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{l} \left\{ \frac{l}{3} - \frac{l}{4\pi} \sin \frac{4\pi}{l} x \Big|_{l/3}^{2l/3} \right\} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi} \left(\sin \frac{8\pi}{3} - \sin \frac{4\pi}{3} \right).$$

Произведя вычисления, получим $W = 0{,}195$.

Ответ: $W = 0{,}195$.

Пример 2. Электрон находится в одномерном бесконечно глубоком потенциальном ящике шириной l. Вычислить наименьшую разность двух соседних энергетических уровней (в электронвольтах) электрона в двух случаях: 1) l =10 см; 2) l = .

Решение. Решим задачу, используя свойства волновой функции. Так как внутри потенциального ящика (при $0 \le x \le l$) потенциальная энергия электрона U=0. то его полная энергия есть кинетическая энергия T. Согласно закону сохранения энергии, при движении электрона T=const. Следовательно, сохраняется и импульс электрона $p=\sqrt{2mT}$. Учитывая два возможных направления движения электрона вдоль оси x, запишем для проекций импульса на ось x

$$p_{x1} = p; \qquad p_{x2} = -p.$$

Согласно соотношению де Бройля, двум, отличающимся лишь знаком проекциям p_x импульса соответствуют две плоские монохроматические волны де Бройля, распространяющиеся в противоположных направлениях вдоль оси x. В результате их интерференции возникнут стоячие волны де Бройля, характеризующиеся стационарным, т.е. не зависящим от времени, распределением вдоль оси x амплитуды колебаний. Эта амплитуда и есть волновая функция $\psi(x)$, квадрат которой определяет плотность вероятности пребывания электрона в точке с координатой x.

Так как потенциальный ящик бесконечно глубок ($U=\infty$ при $x<0$ и $x>l$), электрон не может оказаться за его пределами. Поэтому $\psi(x)=0$ п р$x<0$ и $x>l$. Отсюда, в силу свойства непрерывности волновой функции, следует

$$\psi(0) = 0, \qquad \psi(l) = 0.$$

Таким образом, амплитуда колебаний в стоячей волне де Бройля равна нулю в точках $x=0$, $x=l$, т.е. здесь находятся узлы стоячей волны. Поскольку расстояние между двумя соседними узлами равно половине длины волны, то в потенциальном ящике могут быть лишь волны де Бройля, длина которых удовлетворяет условию $l = n\lambda_n/2$ (n = 1,2,3,…), т.е. на ширине ящика / должно укладываться целое число полуволн. Отсюда

$$\lambda_n = 2l/n. \qquad (1)$$

Из соотношения (1) делаем вывод, что в потенциальном ящике существуют уровни энергии частицы. Действительно, полная энергия электрона в ящике равна

$$E = T = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} = \frac{2\pi^2\hbar^2}{m\lambda^2}$$

Подставив сюда значение Я из (1), получим

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n \qquad (n = 1,2,3,\ldots). \qquad (2)$$

Так как отношение уровней энергий $E_1:E_2:E_3\ldots=1:4:9\ldots$, то наименьшая разность уровней

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \frac{4\pi^2\hbar^2}{2ml^2} - \frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2} = \frac{3\pi^2\hbar^2}{2ml^2} \qquad (3)$$

Произведя вычисления по (3), найдем для двух случаев:
1) $\Delta E = 1{,}8\cdot10^{-35}$ Дж $=1{,}1\cdot10^{-16}$ эВ;
2) $\Delta E = 1{,}8\cdot10^{-19}$ Дж $=1{,}1$ эВ.

Ответ. Наименьшая разность двух соседних энергетических уровней электрона 1) $\Delta E = 1{,}8\cdot10^{-35}$ Дж $=1{,}1\cdot10^{-16}$ эВ; 2) $\Delta E = 1{,}8\cdot10^{-19}$ Дж $=1{,}1$ эВ.

Пример 3. Частица находится в основном состоянии (n=1) в одномерном потенциальном ящике шириной l с абсолютно непроницаемыми стенками <($0<x<l$). Найти вероятность пребывания частицы в областях $0<x<l/3$ и $l/3<x<2l/3$.

Решение. Вероятность dW пребывания частицы в интервале dx выразим через плотность вероятности $|\psi(x)|^2$ при помощи формулы вероятности пребывания частицы в объеме, которая для данного случая одномерной задачи примет вид

$$dW = |\psi(x)|^2\,dx.$$

Отсюда вероятность найти частицу в области $0<x<l/3$ выразится интегралом

$$W_1 = \int_0^{l/3} |\psi(x)|^2\,dx. \qquad (1)$$

Так как частица находится в бесконечно глубоком потенциальном ящике, то, положив n =1, получим для собственной волновой функции

$$\psi(x) = \sqrt{2/l}\,\sin(\pi x/l).$$

Подставив это значение $\psi(x)$ в (1), найдем

$$W_1 = \frac{2}{l}\int_0^{l/3}\sin^2\frac{\pi x}{l}dx.$$

Используя соотношение $\sin^2\alpha=(1-\cos 2\alpha)/2$, вычислим интеграл

$$W_1=\frac{1}{l}\left[\int_0^{l/3}dx-\int_0^{l/3}\cos\frac{2\pi x}{l}dx\right]=\frac{1}{l}\left[\frac{l}{3}-\frac{l}{2\pi}\sin\frac{2\pi x}{l}\right]=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4\pi}=0,195.$$

Вероятность W_2 пребывания частицы в области $l/3<x<2l/3$ (т.е. в средней трети ящика) можно вычислить тем же способом, которым мы нашли вероятность W_1. Но можно поступить проще. Если сложить вероятности W_1, W_2, W_3 пребывания частицы соответственно в первой, второй и третьей частях ящика, то получим вероятность пребывания частицы во всем ящике, которая равна единице, как вероятность достоверного события. Учитывая при этом, что в силу симметрии ящика $W_1=W_3$, получим

$$W_2=1-2W_1=0,61$$

Ответ. Вероятность пребывания частицы в области $0<x<l/3$ равна $W_1=0,195$, а в области $l/3<x<2l/3$ равна $W_2=0,61$.

Пример 4. Волновая функция $\psi(x)=\sqrt{2/l}\sin\frac{\pi}{l}x$ описывает основное состояние частицы в бесконечно глубоком прямоугольном ящике шириной l. Вычислить вероятность нахождения частицы в малом интервале $\Delta l=0,01l$ в двух случаях: 1) вблизи стенки $(0\le x\le\Delta l)$; в средней части ящика $\left(\frac{l}{2}-\frac{\Delta l}{2}\le x\le\frac{l}{2}+\frac{\Delta l}{2}\right)$.

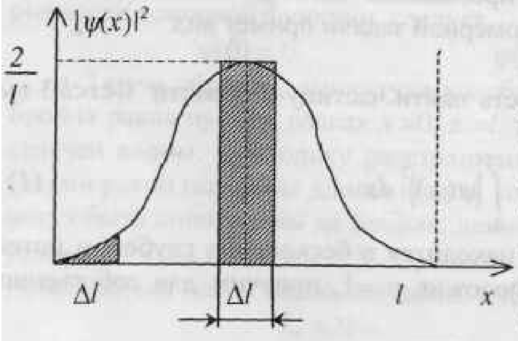


Рис.16

Решение. Вероятность того, что частица будет обнаружена в интервале dx (от x до $x+dx$), пропорциональна этому интервалу и квадрату модуля волновой функции, описывающей данное состояние, равна

$$dW=|\psi(x)|^2dx.$$

В первом случае искомая вероятность найдется интегрированием в пределах от 0 до $0,01l$ (рис. 16)

$$W=\frac{2}{l}\int_0^{0,01l}\sin^2\frac{\pi}{l}x\,dx \qquad (1)$$

Знак модуля опущен, так как ψ-функция в данном случае не является комплексной.

Так как x изменяется в интервале $0\le x\le 0,01l$ и, следовательно, $\pi x/l<<1$, справедливо приближенное равенство

$$\sin^2\frac{\pi}{l}x\approx\left(\frac{\pi}{l}x\right)^2.$$

С учетом этого выражение (1) примет вид

$$W=\frac{2}{l}\int_0^{0,01l}\left(\frac{\pi}{l}x\right)^2dx=\frac{2\pi^2}{l^3}\int_0^{0,01l}x^2dx$$

После интегрирования получим $W_1=2/3\cdot\pi^2\cdot10^{-6}=6,6\cdot10^{-6}$.

Во втором случае можно обойтись без интегрирования, так как квадрат модуля волновой функции вблизи ее максимума в заданном малом интервале $(\Delta l=0,01l)$ практически не изменяется. Искомая вероятность во втором случае определяется выражением

$$W=|\psi(l/2)|^2\Delta l \text{ или}$$

$$W_2=\frac{2}{l}\left(\sin\frac{\pi}{l}\frac{l}{2}\right)^2\Delta l=\frac{2}{l}\cdot0,01l=0,02$$

Ответ. Вероятность нахождения частицы в малом интервале вблизи стенки ящика равна $W_1=6,6\cdot10^{-6}$, в средней части ящика равна $W_2=0,02$.

Пример 5. Показать, что собственные функции

$\psi_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\dfrac{\pi n}{l}x$ и $\psi_m(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\dfrac{\pi m}{l}x$, описывающие состояние частицы в потенциальном ящике, удовлетворяют условию ортогональности, т.е.

$$\int\limits_0^l \psi_n(x)\psi_m(x)dx=\begin{cases}1 \text{ при } n=m,\\ 0 \text{ при } n\neq m.\end{cases}$$

Решение. $\displaystyle\int\limits_0^l \psi_n(x)\psi_m(x)dx=\frac{2}{l}\int\limits_0^l \sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi m}{l}x\,dx=$

$$=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\frac{1}{2}\cos\frac{\pi(n-m)}{l}x\,dx-\frac{2}{l}\int\limits_0^l\frac{1}{2}\cos\frac{\pi(n+m)}{l}x\,dx$$

При $n=m$ первый интеграл обращается в $l/2$, а второй- в нуль. При $n\neq m$ оба интеграла дают нуль, и, следовательно,

$$\int\limits_0^l \psi_n(x)\psi_m(x)dx=\begin{cases}1 \text{ при } n=m,\\ 0 \text{ при } n\neq m.\end{cases}$$

Пример 6. Электрон находится в одномерном потенциальном ящике шириной /. Определить среднее значение координаты $<x>$ электрона $(0<x<l)$

Решение. По общему правилу нахождения среднего значения

$$<x>=\int\limits_0^l x|\psi_n(x)|^2dx.$$

В случае бесконечно глубокого прямоугольного потенциального ящика ψ - функция имеет вид $\psi_n=\sqrt{2/l}\sin\dfrac{\pi n}{l}x$. Следовательно,

$$<x>=\frac{2}{l}\int\limits_0^l x\sin^2\frac{\pi n}{l}x\,dx=\frac{1}{l}\int\limits_0^l x\left(1-\cos\frac{2\pi n}{l}x\right)dx=l/2.$$

Ответ. Среднее значение координаты электрона равно $<x>=l/2$.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Какая частица называется свободной?
2. Какая функция описывает одномерное движение свободной частицы?
3. Свойства волновой функции.
4. Физический смысл квадрата модуля волновой функции.
5. Записать уравнение Шредингера для стационарных состояний.
6. Поведение частицы на скачке потенциальной энергии.
7. Записать выражение собственной волновой функции.

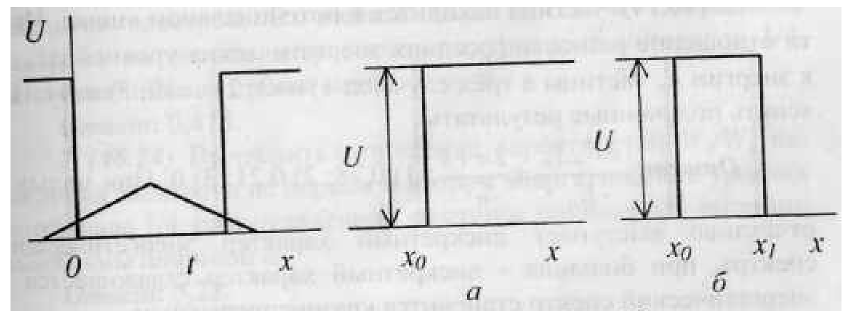


Рис. 17 Рис. 18

8. Что такое туннельный эффект?
9. Может ли $|\psi(x)|^2$ быть больше единицы?
10. В потенциальной яме с вертикальными "стенками" находится электрон. Его волновая функция изображена на рис. 17. Конечна или бесконечна глубина потенциальной ямы?
11. Электрон, движущийся слева направо, встречает на пути в одном случае порог (рис. 18 а), в другом - барьер (рис.18 б). Каковы вероятности преодоления порога и барьера по классической и по квантовой теории в двух случаях: когда кинетическая энергия электрона E меньше и когда больше U?

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

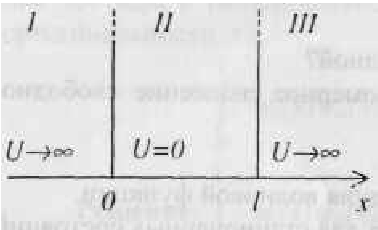


Рис. 19

1. (46.11) Электрон находится в бесконечно глубоком одномерном потенциальном ящике шириной l (см. рис.19). Написать уравнение Шредингера и его решение для области II $(0<x<l)$

Ответ: $\psi''(x)+\frac{2m}{\hbar^2}E\psi(x)=0;$

$\psi(x)=c_1\sin\ kx+c_2\cos\ kx.$

2. (46.14) Частица находится в потенциальном ящике. Найти отношение разности соседних энергетических уровней $\Delta E_{n+1,n}$ к энергии E_n частицы в трёх случаях: 1) $n=3$; 2) $n=10$; 3) $n=\infty$. Пояснить полученные результаты.

Ответ: $\frac{\Delta E_{n+1,n}}{E_n}=\frac{2n+1}{n^2}$; 1) 0,78; 2) 0,21; 3) 0. При малых n отчётливо выступает дискретный характер энергетического спектра, при больших - дискретный характер сглаживается и энергетический спектр становится квазинепрерывным.

3. (46.19) Частица в потенциальном ящике шириной l находится в возбуждённом состоянии $(n=2)$. Определить, в каких точках интервала $(0<x<l)$ плотность вероятности $|\psi_2(x)|^2$ нахождения частицы максимальна и минимальна.

Ответ: максимальна при x_1 и $x_3=3l/4$; минимальна при $x_2=l/2$.

4. (46.20) Электрон находится в потенциальном ящике шириной /. В каких точках интервала $(0<x<l)$ плотность вероятности нахождения электрона на первом и втором энергетических уровнях одинакова? Вычислить плотность вероятности для этих точек. Решение пояснить графически.

Ответ: $x_1=l/3$; $x_2=2l/3$; $|\psi(x)|^2=3/(2l)$ (см. рис.20).

5. (46.21) Частица в потенциальном ящике находится в основном состоянии. Какова вероятность W нахождения частицы: 1) в средней трети ящика; 2) в крайней трети ящика?

Ответ: 1) 0,609; 2) 0,196.

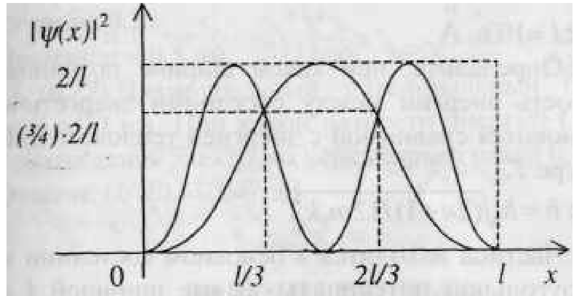


Рис. 20

6. (46.22) В одномерном потенциальном ящике шириной l находится электрон. Вычислить вероятность W нахождения электрона на первом энергетическом уровне в интервале 1/4, равноудалённом от стенок ящика.

Ответ: 0,475.

7. (46.24) Вычислить отношение вероятностей W_1/W_2 нахождения электрона на первом и втором энергетических уровнях в интервале 1/4, равноудалённом от стенок одномерной потенциальной ямы шириной l.

Ответ: 5,22.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ В

1. (6.61) Электрон находится в бесконечно глубоком одномерном прямоугольном потенциальном ящике шириной $l=0,1$ нм. Определить в электрон вольтах наименьшую разность энергетических уровней электрона.

Ответ: $\Delta E=113$ эВ.

2. (6.62) Частица находится в основном состоянии в одномерной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Оценить силу, с которой частица действует на стенку. Принять размер ямы $l=0,1$ нм.

Ответ: $\langle F\rangle=h^2/4ml^3=0,12$ мкН.

3. (6.63) Какова ширина l одномерной потенциальной ямы с бесконечно высокими стенками, если при переходе электрона со второго квантового уровня на первый излучается энергия 1 эВ?

***Ответ*:** l=10,6 Å.

4.(6.64) Определить, при какой ширине потенциального ящика l разность энергии между соседними энергетическими уровнями становится сравнимой с энергией теплового движения при температуре *T*.

Ответ: $b = h\sqrt{(2n+1)/12m_0kT}$

5. ***(6.65)*** Частица находится в основном состоянии в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной l с абсолютно непроницаемыми стенками $(0<x<l)$. Определить вероятность пребывания частицы в области $l/3<x<2l/3$.

Ответ: W =0,61.

6. (6.66) Частица в бесконечно глубоком одномерном прямоугольном потенциальном ящике шириной l находится в возбуждённом (n =3) состоянии. Определить, в каких точках интервала $0<x<l$ плотность вероятности нахождения частицы имеет экстремальные значения.

Ответ: *max*: $l/6$; $l/2$; $5l/2$; *min*: 0; $l/3$; $2l/3$; l.

7. (6.67) Электрон находится в одномерном бесконечно глубоком потенциальном ящике шириной l. Вычислить наименьшую разность двух соседних энергетических уровней (в электронвольтах) электрона в двух случаях: 1) l =10 см; 2) l=10 А.

Ответ: 1) ΔE_1 =1,13·10^{-16} эВ; 2) ΔE_2 =1,13 эВ.

8. (6.68) Частица в бесконечно глубоком, одномерном, прямоугольном потенциальном ящике находится в основном состоянии. Какова вероятность W обнаружения частицы в крайней четверти ящика?

Ответ: W =0,09.

9. (6.69) Частица в потенциальном ящике находится в основном состоянии. Какова вероятность нахождения частицы а) в первой трети ящика; б) в крайней трети ящика?

Ответ: W_1 =W_2 =0,195.

10. (6.71) Электрон с энергией £ =4,9 эВ движется в направлении потенциального барьера высотой U=5 эВ. При какой ширине барьера d вероятность прохождения электрона через него будет равна 0,2?

Ответ: $d \approx 0,5$ нм.

П. (6.72) Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину d = 0,1 нм. При какой разности энергий $(U - E)$ вероятность прохождения электрона через барьер равна 0,8?

Ответ: $(U$-$E)$=0,047 эВ.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1. Показать, что собственные функции $\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n}{l}x$ и $\psi_m(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi m}{l}x$, описывающие состояние частицы в потенциальном ящике, удовлетворяют условию ортогональности, т.е.

$$\int_0^l \psi_n(x)\psi_m(x)dx = \begin{cases}1 \text{ при } n=m,\\ 0 \text{ при } n\neq m.\end{cases}$$

2. Электрон находится в одномерном потенциальном ящике шириной l. Определить среднее значение координаты $\langle x\rangle$ электрона $(0<x<l)$.

Ответ: $\langle x\rangle=l/2$.

3. Используя выражение энергии $E_n=\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}n^2$ частицы, находящейся в потенциальном ящике, получить приближённое выражение энергии: 1) гармонического осциллятора; 2) водородоподобного атома. Сравнить полученные результаты с истинными значениями энергий.

Ответ: 1) $E_n=\frac{\pi}{4}\hbar\,\omega\, n$. Полученное выражение отличается от истинного в $\pi/4$ раз; 2) $E_n=\frac{4}{\pi^2}\frac{Z^2e^4m}{32\pi^2\varepsilon_0\hbar^2n^2}$. Полученное выражение отличается от истинного в $4/\pi^2$ раз

4. Изобразить на графике вид первых трех собственных функций $\psi_n(x)$, описывающих состояние электрона в потенциальном ящике шириной l, а также вид $|\psi_n(x)|^2$. Установить соответствие между числом N узлов волновой функции (т.е. числом точек, где волновая функция обращается в нуль в интервале $0<x<l$) и квантовым числом *n*. Функцию считать нормированной на единицу.

5. Собственная функция, описывающая состояние частицы в потенциальном ящике, имеет вид $\psi_n(x) = C\sin\dfrac{\pi n}{l}x$. Используя условия нормировки, определить постоянную *C*.

Ответ: $C_n=\sqrt{2/l}$

6. Электрон находится в одномерной прямоугольной потенциальной яме с бесконечно высокими стенками. Найти ширину ямы, если разность энергии между уровнями с $n_1=2$ и $n_2=3$ составляет $\Delta E=0{,}30$ эВ.

Ответ: $l=\pi\hbar\sqrt{(n_2^2-n_1^2)/2m\Delta E}=2{,}5$ нм.

7. Частица находится в основном состоянии в одномерной прямоугольной потенциальной яме ширины l с абсолютно непроницаемымистенками $(0<x<l)$. Найти вероятность пребывания частицы в области $l/3<x<2l/3$.

Ответ: $P=\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}=0{,}61$

8. Волновая функция частицы массы *m* для основного состояния в одномерном потенциальном поле $U(x)=k^2x/2$ имеет вид $\psi(x)=A\exp(-\alpha x^2)$, где *A* и α- некоторые постоянные. Найти с помощью уравнения Шредингера постоянную α и энергию *E* частицы в этом состоянии.

Ответ: $\alpha=m\omega/2\hbar$ $E=\dfrac{\hbar\omega}{2}$, где $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

9. Частица, движущаяся в одномерной, бесконечно глубокой потенциальной яме, находится в основном состоянии (т.е. в состоянии с наименьшей энергией). Вычислить вероятность *P* того, что координата *x* частицы имеет значение , заключенное в

пределах от ηa до $(1-\eta)a$, где a- ширина ямы. η- число, равное 0,3676.

Ответ: $P=1-2\int\limits_0^{\eta a}\dfrac{2}{a}\sin^2\dfrac{\pi x}{a}dx=0{,}500.$

10. Электрон находится в потенциальном ящике шириной $l=0{,}5$ нм. Определить наименьшую разность ΔE энергетических уровней электрона. Ответ выразить в электронвольтах.

Ответ: $\Delta E=4{,}48$эВ.

11. *(5.71)* Волновая функция электрона в основном состоянии атома водорода имеет вид $\psi(r)=Ae^{r/r_1}$, где *A* -некоторая постоянная, r_1-первый боровский радиус. Найти: а) наиболее вероятное расстояние электрона от ядра; б) среднее значение модуля кулоновской силы; в) среднее значение потенциальной энергии; г) средний электростатический потенциал, создаваемый электроном в центре атома.

Ответ: а) $r_{вер}=r_1$; б) $\langle f\rangle=2e^2/r_1^2$; в) $\langle U\rangle=-e^2/r_1$; г) $\varphi_0=\int(\rho/r)4\pi r^2dr=e/r_1$, где $\rho=e^2\psi^2$ объемная плотность заряда.

12. *(5.72)* Частицы с массой *m* и энергией *E* движутся слева на потенциальный барьер (рис. 21). Найти: а) коэффициент отражения *R* этого барьера при $E>U_0$; б) эффективную глубину $x_{эфф}$ проникновения частиц в область $x>0$ при $E<U_0$ ($x_{эфф}$-расстояние от границы барьера до точки, где плотность вероятности нахождения частицы уменьшается в *e* раз).

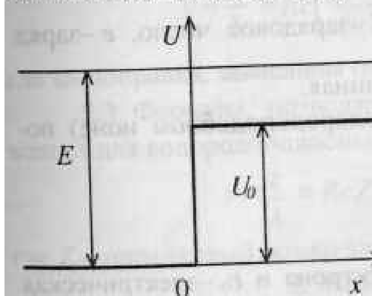


Рис. 21

Ответ: а) $R=(b_1/a_1)^2=(k_1-k_2)^2/(k_1+k_2)^2$; б) $x_{эфф}=1/2\chi$

***Занятие 3. Теории** атома водорода*

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Боровская и квантовая теории атома водорода.
2. Энергетические состояния электрона в атоме водорода.
3. Стационарные орбиты.
4. Формула Ридберга.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Первый постулат Бора

1.1. Согласно первому постулату Бора, движение электрона вокруг ядра возможно только по определённым орбитам, радиусы которых удовлетворяют соотношению

$$m v_n r_n = n\frac{h}{2\pi},$$

где m. -массаэлектрона, v_n –его скорость на n-й орбите, r_n -радиус этой орбиты, h -постоянная Планка, n -главное квантовое число $(n=1, 2\ldots)$.

Радиус n-й стационарной орбиты

$$r_n = \frac{\hbar^2 4\pi\varepsilon_0}{Ze^2 m}\cdot n^2,$$

где $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$.- постоянная Планка, Z –зарядовое число, e -заряд электрона и ε_0 -электрическая постоянная.

1.2. В атоме водорода (или водородоподобном ионе) потенциальнаяэнергия $U(r)$ имеет вид

$$U(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

где Z –зарядовое число, e –заряд электрона и ε_0 –электрическая постоянная.

1.3. Собственное значение энергии E_n в атоме водорода

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 m}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2 n^2}$$

Потенциал ионизации атома U_i

$$e\cdot U_i = A_i$$

где A_i-работа удаления электрона с нормальной орбиты в бесконечность.

2. Второй постулат Бора

2.1. Согласно второму постулату Бора, частота излучения, соответствующая переходу электрона с одной орбиты на другую, определяется формулой

$$h\nu = E_n - E_k,$$

где n и k -номера орбит $(n>k)$, E_k и E_n - соответствующие им значенияэнергииэлектрона.

2.2. Формула, позволяющая найти частоты ν или длины волн λ, соответствующие линиям водородного спектра, имеет вид

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = Rc\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

где k и n -номера орбит, c –скорость распространения света в вакууме, R-постоянная Ридберга, равная

$$R = \frac{e^4 m}{\varepsilon\varepsilon_0^2 h^3 c} = 1{,}097\cdot 10^7\ \text{м}^{-1}.$$

Для других атомов формула, позволяющая найти частоты ν илидлиныволн λ, имеет вид

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = Rc\left[\frac{1}{(k-\alpha)^2} - \frac{1}{(n-\alpha)^2}\right],$$

где α- поправка, зависящая от химического элемента.

2.3. Формула, позволяющая найти частоты ν или длины волн λ для водородоподобных ионов, имеет вид

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = RcZ^2\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

где Z – порядковый номер элемента в таблице Менделеева.

3. **Момент импульса**

3.1. Орбитальный момент импульса электрона

$$L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)},$$

где l -орбитальное квантовое число, которое может принимать значения $0, 1, 2\ldots, (n-1)$.

3.2. Магнитный момент импульса электрона

$$\mu_l = \mu_B\sqrt{l(l+1)},$$

где μ_B -магнетон Бора: $\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m} = 0{,}927\cdot10^{-23}$ Дж/Тл.

Гиромагнитное отношение для орбитальных магнитного и механического моментов

$$\frac{\mu_l}{L_l} = \frac{\mu_B}{\hbar} = \frac{1}{2}\frac{e}{m}.$$

3.3. Спин и спиновый магнитный момент электрона

$$L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)} \qquad \mu_s = 2\mu_B\sqrt{s(s+1)},$$

где s -спиновое квантовое число $(s=1/2)$

Гиромагнитное отношение для спиновых магнитного и механического моментов

$$\frac{\mu_s}{L_s} = 2\frac{\mu_B}{\hbar} = \frac{e}{m}$$

3.4. Полный момент импульса электрона

$$p_j = \hbar\sqrt{j(j+1)},$$

где j -внутреннее квантовое число $(j = l \pm 1/2)$

3.5. Распределение электронов по состояниям в атоме записывается с помощью спектроскопических символов, представленных в таблице.

Значение побочного квантового числа	0	1	2	3	4	5	6	7
Спектроскопический символ	s	p	d	f	g	h	i	k

Электронная конфигурация записывается следующим образом: число, стоящее слева перед спектроскопическим символом, означает главное квантовое число /?, а сам спектроскопический символ отвечает тому или иному значению орбитального квантового числа / (например, обозначению $2p$ отвечает электрон с $n=2$ и $l=1$; $2p^2$ означает, что таких электронов в атоме 2, и т.д.).

3.6. Принцип Паули. В атоме не может находиться два (и более) электрона, характеризуемых одинаковым набором четырёх квантовых чисел: n, l, m_l, m_s.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Найти наименьшую λ_{min} и наибольшую λ_{max} длины волн спектральных линий водорода в видимой области спектра.

Решение. Длины волн спектральных линий водорода всех серий определяются формулой

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right); \qquad (1)$$

при $k=1$, $n=2, 3, 4,\ldots$ -серия Лаймана в ультрафиолетовой области;

при $k=2$, $n=3, 4, 5,\ldots$ -серия Бальмера в видимой области;

при $k=3$, $n=4, 5, 6,\ldots$ -серия Пашена } в инфракрасной области

при $k=4$, $n=5, 6, 7,\ldots$ -серия Брекетта }

при $k=5$, $n=6, 7, 8,\ldots$ -серия Пфунда.

Таким образом, видимая область спектра соответствует значениям $k=2$ и $n=3, 4, 5,\ldots$ Очевидно, наименьшая длина волны спектральных линий этой серии будет при $n=\infty$. Тогда из (1) имеем $1/\lambda_{min}=R/4$ или $\lambda_{min}=365$ нм (с точностью до третьей значащей цифры). Наибольшая длина волны соответствует $n=3$; при этом $\lambda_{max}=656$ нм.

Ответ. Наименьшая длина волны спектральных линий водорода в видимой области спектра равна $\lambda_{min}=365$ нм, наибольшая длина волны равна $\lambda_{max}=656$ нм.

Пример 2. Найти потенциал ионизации U_i атома водорода.

Решение. Потенциал ионизации U_i атома определяется уравнением $eU_i = A_i$, где A_i - работа удаления электрона с нормальной орбиты в бесконечность. Для атома водорода

$$A_i = h\nu = hRc\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right)$$

При $k=1$ и $n=\infty$ работа $A_i = hRc$ и потенциал ионизации $U_i = A_i/e = hRc/e = 13{,}6$ В.

Ответ. Потенциал ионизации атома водорода равен

$U_i = 13{,}6$ В.

Пример 3. Какую наименьшую энергию $W_{\min}$ (в электрон-вольтах) должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами этих электронов появились все линии всех серий спектра водорода? Какую наименьшую скорость $v_{\min}$ должны иметь эти электроны?

Решение. Все линии всех серий водорода появятся при ионизации атома водорода. Это будет при энергии электронов $W_{\min} = 13{,}6$ эВ (см. решение задачи примера 2); $v_{\min} = \sqrt{2eU_i / m} = 2{,}2\cdot 10^6$ м/с.

Ответ. $W_{\min} = 13{,}6$ эВ; $v_{\min} = 2{,}2\cdot 10^6$ м/с.

Пример 4. Вычислить радиус первой орбиты атома водорода (боровский радиус) и скорость электрона на этой орбите.

Решение. Согласно теории Бора, радиус r электронной орбиты и скорость v электрона связаны равенством $mvr = n\hbar$. Так как в задаче требуется определить величины, относящиеся к первой орбите, то главное квантовое число $n=1$ и указанное выше равенство примет вид

$$mvr = \hbar \qquad (1)$$

Для определения двух неизвестных величин r и v необходимо еще одно уравнение. В качестве второго уравнения воспользуемся уравнением движения электрона. Согласно теории Бора, электрон вращается вокруг ядра. При этом сила взаимодействия между электрическими зарядами ядра и электрона сообщает электрону центростремительное ускорение. На основании второго закона Ньютона можем записать

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

(*e* и *m* - заряд и масса электрона) или

$$mv^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r} \qquad (2)$$

Совместное решение равенств (1) и (2) относительно r дает

$$r = 4\pi\varepsilon_0\hbar^2/(me^2)$$

Подставив сюда значения $\hbar$, e, m и произведя вычисления, найдем боровский радиус

$r_1 = a = 5{,}29\cdot 10^{-11}$ м.

Из равенства (1) получим выражение скорости электрона на первой орбите

$v = \hbar/(mr)$.

Произведя вычисления по этой формуле, найдем

$v = 2{,}18\cdot 10^6$ м/с.

Ответ: $r_1 = 5{,}29\cdot 10^{-11}$ **м;** $v = 2{,}18\cdot 10^6$ м/с.

Пример 5. Определить возможные значения орбитального момента импульса L_l электрона в возбужденном атоме водорода, если энергия возбуждения $\varepsilon = 12{,}09$ эВ.

Решение. Орбитальный момент импульса L_l электрона определяется квантовым числом l по формуле

$$L_l = \hbar\sqrt{l(l+1)}. \qquad (1)$$

Так как ряд возможных значений / ограничен величиной $n-1$, найдем главное квантовое число n с помощью формулы

$$E_n = -\frac{Z^2e^4m}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2n^2}$$

которую перепишем, учитывая, что при Z = 1, и =1, $E_1 = -13{,}6$ эВ:

$$E_n = -\frac{13{,}6}{n^2}\ \text{эВ}.$$

Энергия возбуждения £ есть квант энергии, поглощенный атомом при переходе из основного состояния $(n=1)$ в возбужденное. Следовательно,

$$E_n - E_1 = \varepsilon.$$

Подставив числовые значения величин, выраженные в электронвольтах, получим

$$-\frac{13{,}6}{n^2} + 13{,}6 = 12{,}09,$$

откуда $n = 3$. Следовательно, $l = 0, 1, 2$.

Теперь по формуле (1) найдем возможные значения L_l:

при $l = 0$, $L_l = 0$;

при $l=1,\ L_l=\hbar\sqrt{2}=1{,}49\cdot10^{-34}$ Дж·с;

при $l=2,\ L_l=\hbar\sqrt{6}=2{,}60\cdot10^{-34}$ Дж·с.

Ответ. При $l=0,\ L_l=0$; при $l=1,\ L_l=1{,}49\cdot10^{-34}$ Дж·с; при $l=2,\ L_l=2{,}60\cdot10^{-34}$ Дж·с.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Сформулировать основные положения боровской теории атома водорода, правило квантования круговых орбит и собственные значения энергии электрона в атоме.
2. Потенциал ионизации атома водорода U_i. Одинаковой ли начальной энергией должны обладать электрон, ион водорода и ион гелия, чтобы иметь возможность ионизировать атом водорода?
3. Можно ли ионизировать атом (Н. Не) внешним электрическим полем? Практически осуществимые напряженности электрического поля лежат в пределах 10^7-10^8 В/м.
4. Почему для обнаружения квантования спина электрона (опыты Штерна и Герлаха) требуется сильно неоднородное поле?
5. Что такое квантование энергии? Квантование момента импульса?
6. Какие квантовые числа характеризуют энергию электрона в атоме, его момента импульса?
7. Какие значения может принимать главное квантовое число?
8. Какие значения может принимать орбитальное квантовое число в атоме?
9. В чем заключается принцип Паули?
10. Записать выражение формулы Ридберга
11. Какие состояния электронов обозначаются буквами s, p, d, f и т.д.?
12. Сколько электронов может одновременно находиться в $2p$-состоянии, $3d$-состоянии, $3s$-состоянии?
13. Чему равно главное и орбитальное квантовые числа $3d$-электронов, $2p$-электронов, $4s$-электронов?
14. Сколько нуклонов может находиться в ядре на наинизшем квантовом уровне?

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1. (20.1) Найти радиусы r_k трёх первых боровских электронных орбит в атоме водорода и скорости v_k электрона на них.

Ответ: $r_1=53$ пм; $r_2=212$ пм; $r_3=477$ пм; $v_1=2{,}19\cdot10^6$ м/с; $v_2=1{,}1\cdot10^6$ м/с; $v_3=7{,}3\cdot10^5$ м/с.

2. (20.4) Найти период T обращения электрона на первой боровской орбите атома водорода и его угловую скорость *со.*

Ответ: $T=1{,}43\cdot10^{-16}$ с; $\omega=4{,}4\cdot10^{16}$ рад/с.

3. (20.5) Найтинаименьшую λ_{min} и наибольшую λ_{max} длины волн спектральных линий водорода в видимой области спектра.

Ответ: $\lambda_{min}=365$ нм $\lambda_{max}=656$ нм.

4. (20.6) Найти наибольшую длину волны λ_{max} в ультрафиолетовой области спектра водорода. Какую наименьшую скорость v_{min} должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами электронов появилась эта линия?

Ответ: $\lambda_{max}=121$ нм; $v_{min}=1{,}90\cdot10^6$ м/с

5. (20.10) В каких пределах должна лежать энергия бомбардирующих электронов, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами этих электронов спектр водорода имел только одну спектральную линию?

Ответ: $10{,}2\le W\le 12{,}1$ эВ

6. (20.12) В каких пределах должны лежать длины волн Я монохроматического света, чтобы при возбуждении атомов водорода квантами этого света наблюдались три спектральные линии?

Ответ: $97{,}3\le\lambda\le102{,}6$ нм.

7. ***(20.16)*** Найти длину волны де Бройля Х для электрона, движущегося по первой боровской орбите атома водорода.

Ответ: $\lambda=0{,}33$ нм.

8. (6.115) Математический маятник имеет массу $m=10{,}0$ мг и длину $l=1{,}00$ см. Найти: а) энергию E_0 нулевых колебаний этого маятника; б) классическую амплитуду *а* маятника, отвечающую энергии E_0.

Ответ: а) $E_0=1{,}65\cdot10^{-33}$ Дж; б) $a=0{,}58\cdot10^{-15}$ м^2.

9. (6.119) Чему равен квадрат орбитального момента импульса M^2 электрона в состояниях а) $2p$; б) $3f$?

Ответ: а) $M^2=2\hbar^2$; б) $M^2=12\hbar^2$

10. (6.120) Состояние атома характеризуется квантовыми числами L и S, равными а) 2 и 2; б) 3 и 2; в) 2 и 3; г) 1 и 3/2. Написать возможные значения квантового числа 7 при данных значениях L и S.

Ответ: а) О, 1, 2, 3, 4; б) и в) 1, 2, 3, 4, 5; г) 1/2, 3/2, 5/2.

11.(6.121) Какие из термов 1 $^3S_1$, 2 $^2P_1$, 3) $^3P_{1/2}$, 4) $^3P_3$, 5) $^5D_0$, 6) $^1F_0$, 7) $^8F_{13/2}$ написаны неверно?

Ответ: 1-й, 2-й, 3-й, 4-й и 6-й.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ В

1. (6.42) Фотон с энергией 16,5 эВ выбивает электрон из невозбуждённого атома водорода. Какую скорость будет иметь электрон вдали от ядра?

Ответ: $v=1\cdot10^6$ м/с.

2. (6.43) Определить длину волны, соответствующую границе серии Бальмера для водорода.

Ответ: $\lambda=3647$ Å.

3. (6.44) Определить ток, соответствующий движению электрона по n-й орбите атома водорода.

Ответ: $I=-en\hbar/(2m\pi r^2)$.

4. (6.45) Чему равен по теории Бора орбитальный магнитный момент электрона, движущегося по n-орбите атома водорода?

Ответ: $P_m=en\hbar/2m$, $P_m/L=e/2m$.

5. *(6.46)* Вычислить потенциал ионизации однозарядного иона гелия.

Ответ: $U_i=54{,}5$ В

6. (6.47) Найти первый потенциал возбуждения однократно ионизованного гелия.

Ответ: $U_i=40{,}8$ В.

7. (6.48) В однозарядном ионе гелия электрон перешел с

третьего энергетического уровня на первый. Определить длину волны излучения, испущенного ионом гелия.

Ответ: $\lambda=2{,}56\cdot10^{-9}$ м.

8. (6.50) Какому элементу принадлежит водородоподобный спектр, длины волн линий которого в четыре раза короче, чем у атомарного водорода?

Ответ: $Z=2$; He^+

9. (6.51) Найти наибольшую и наименьшую длины волн в первой инфракрасной серии спектра водорода (серия Пашена).

Ответ: $\lambda_{min}=820$ нм, $\lambda_{max}=1{,}87$ мкм.

10. (6.52) Электрон в невозбуждённом атоме водорода получил энергию 12,1 эВ. На какой энергетический уровень он перешел? Сколько линий спектра могут излучиться при переходе электрона на более низкие энергетические уровни?

Ответ: $n_k=3$; 3 линии.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1. Какую наименьшую энергию W_{min} (в электронвольтах) должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами этих электронов появились все линии всех серий спектра водорода? Какую наименьшую скорость v_{min} должны иметь эти электроны?

Ответ: $W_{min}=13{,}6$ эВ, $v_{min}=2{,}2\cdot10^6$ м/с.

2. Какую наименьшую энергию W_{min} (в электронвольтах) должны иметь электроны, чтобы при возбуждении атомов водорода ударами этих электронов спектр водорода имел три спектральные линии? Найти длины волн Я этих линий.

Ответ: $W_{min}=12{,}1$ эВ, $\lambda_1=121$ нм, $\lambda_2=103$ нм, $\lambda_3=656$ нм.

3. В каких пределах должны лежать длины волн λ света, чтобы при возбуждении атомов водорода квантами этого света радиус орбиты r_k электрона увеличился в 9 раз?

Ответ: $97{,}3\le\lambda\le102{,}6$ нм.

4. На дифракционную решетку нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной атомарным водородом. Постоянная решетки $d=5$ мкм. Какому переходу электрона соответствует спектральная линия, наблюдаемая при помощи этой решетки в спектре пятого порядка под углом φ = 41 °?

Ответ. с n=3 на k=2.

5. Найти первый потенциал возбуждения U_1: а) однократно ионизованного гелия; б) двукратно ионизованного лития.

Ответ: а) U_1 **=40,8 В; б)** U_1 =91,8 **В.**

6. Найти длину волны Я фотона, соответствующего переходу электрона со второй боровской орбиты на первую в однократно ионизованном атоме лития.

Ответ: λ= **30,4** нм.

7. Волновая функция, описывающая 2s-состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi_{200}(\rho) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}(2-\rho)e^{-\rho/2}$, где ρ - расстояние электрона от ядра, выраженное в атомных единицах. Определить: 1) расстояния ρ_1 от ядра, на которых вероятность обнаружить электрон имеет максимум; 2) расстояния ρ_2 от ядра, на которых вероятность нахождения электрона равна нулю; 3) построить графики зависимости $|\psi_{200}(\rho)|^2$ от ρ и $\rho^2|\psi_{200}(\rho)|^2$ от ρ.

Ответ: 1) 0,76; 5,24; 2) 0,2; ∞.

8. Атом водорода, находившийся первоначально в основном состоянии, поглотил квант света с энергией E = 10,2 эВ. Определить изменение момента импульса ΔL_l орбитального движения электрона. В возбужденном атоме электрон находится в *p*-состоянии.

Ответ: $1{,}49 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

9. Вычислить полную энергию *E,* орбитальный момент импульса L_l и магнитный момент μ_l электрона, находящегося в 2*p*-состоянии в атоме водорода.

Ответ: -3,4 эВ; $1{,}5 \cdot 10^{-34}$ Дж·с; $1{,}31 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл.

10. Определить возможные значения магнитного момента μ_l, обусловленного орбитальным движением электрона в возбужденном атоме водорода, если энергия Е возбуждения равна 12,09 эВ.

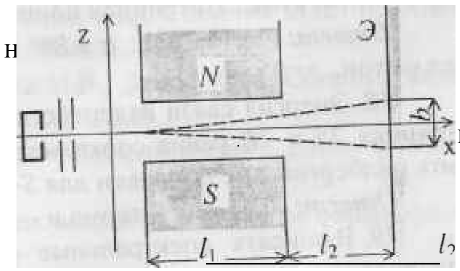
Ответ: 0; $1{,}31 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл.

11. Узкий пучок атомов рубидия (в основном состоянии)

пропускается через неоднородное поперечное магнитное поле протяженностью l_1= 10 см (рис. 22). На экране Э, отстоящем на расстоянии l_2 20 см от магнита, наблюдается расщепление пучка на два. Определить силу F_z, действующую на атомы рубидия, если расстояние b между компонентами пучка на экране равно 4 мм и скорость v атомов равна 0,5 км/с.

Ответ: $2{,}86 \cdot 10^{-21}$ Н.

12. В опыте Штерна и Герлаха узкий пучок атомов цезия (в основном состоянии) проходит через поперечное неоднородное магнитное поле и попадает на экран (рис. 22). Какова должна быть степень неоднородности $\partial B/\partial z$ м а г н поля, чтобы расстояние b между компонентами щ е п л экране было равно 6 мм? Принять $l_1 = l_2$ =10 см. Скорость атомов цезия равна 0,3 км/с.



Ответ: 432 Тл/м.

13. Первоначально покоившийся атом водорода испускает фотон, соответствующий головной линии серии Лаймена. Определите: а) скорость, которую приобрел атом, перейдя в основное состояние; б) изменение длины волны фотона, вызванное отдачей.

Ответ: а) 3,25 м/с; б) $1{,}23 \cdot 10^{-12}$ м.

14. В результате захвата летящего электрона протоном образовался возбужденный атом водорода. При переходе атома в нормальное состояние был испущен фотон частоты $5{,}8 \cdot 10^9$ МГц. Определить скорость электрона, которую он имел вдали от протона.

Ответ: $1{,}9 \cdot 10^6$ м/с.

15. Во сколько раз изменится момент импульса и энергия электрона атома водорода, находящегося в первом возбужденном состоянии при поглощении атомом кванта с импульсом $6{,}45 \cdot 10^{-27}$ кг·м/с?

Ответ: 3,9.

16. Позитроний, представляющий собой электрон и позитрон, обращающиеся вокруг общего центра масс частиц, находится в состоянии с минимальной энергией. Чему равен: а) радиус боровской орбиты этой системы; б) потенциал ионизации.

Ответ: **а)** $1{,}06\cdot10^{-10}$ **м; б) 6,8 В.**

77. Фотон с энергией $W_ф = 5{,}4852$ эВ вырывает из свободного покоящегося атома лития валентный электрон. Электрон вылетает под прямым углом к направлению, в котором летел фотон. С какой скоростью v и в каком направлении движется ионизированный атом? Потенциал ионизациилития φ_i = 5,3918 В.

Ответ: v - 14,2 м/с; α = 89° к направлению, в котором летел фотон.

18. Энергия связи валентного электрона атома лития в состояниях $2S$ и $2P$ равна соответственно 5,39 и 3,54 эВ. Вычислить ридберговские поправки для 5- и P-термов этого атома.

Ответ: -0,41 для S-терма и - 0,04 для Р-терма.

19. Выписать спектральные обозначения термов атомов водорода, электрон которого находится в состоянии с главным квантовым числом n =3.

Ответ: $3S_{1/2}$, $3P_{1/2}$, $3P_{3/2}$, $3D_{3/2}$, $3D_{5/2}$.

20. Сколько и каких квантовых чисел J может иметь атом в состоянии с квантовыми числами S и L, равными соответственно: а) 2 и 3; б) 3 и3; в) 5/2 и 2?

Ответ: **а) 1, 2, 3, 4, 5; б) О, 1, 2, 3, 4, 5, 6; в)** 1/2, 3/2, 5/2, 7/2, 9/2.

21. Найти возможные значения полных механических моментов атомов, находящихся в состояниях ^4P и ^5D.

Ответ: для состояния ^4P: $(\sqrt{3}/2)\hbar$, $(\sqrt{15}/2)\hbar$ и $(\sqrt{35}/2)\hbar$; длясостояния ^5D: 0, $\sqrt{2}\hbar$, $\sqrt{6}\hbar$, $\sqrt{12}\hbar$ и $\sqrt{20}\hbar$

ЛИТЕРАТУРА

\ Волькенштейн В. С. Сборник задач по общему курсу физики. 11 изд. М.: Наука, 1985. С. 382.

2 Волькенштейн В. С. Сборник задач по общему курсу физики. 12 изд. М.: Наука. 1990. С. 400.

3 Методическое пособие по решению задач по физике. Сост. В. М. Меркулова. А.В. Третьякова, А С. Уколов и др.; Под ред. В. М. Меркуловой. Таганрог: ТРТУ. 1992. С. 193.

4 Чертов А. Г. Воробьёв А. А. Задачник по физике. 5-е изд. перераб. и доп.. М. Высшая школа, 1988. С. 496 .

5 Гинзбург В.Л. Левин Л.М. и др. Сборник задач по общему курсу физики. Часть 2. М., 1960. С. 365.

6 Иродов И.Е.. Савельев И.В., Замша О.И. Сборник задач по общей физике. М. Наука. 1975. С.320.

7 Иродов И.Е. Задачник по общей физике. 2 изд. перераб. М.: Наука, 1988. С. 368.

8 Савельев И.В. Сборник вопросов и задач по общей физике. М.: Наука, 1982. С. 270.

СОДЕРЖАНИЕ

Нестюрина Елена Евгеньевна
Ретивов Николай Алексеевич

СБОРНИК ВОПРОСОВ, УПРАЖНЕНИЙ
И ЗАДАЧ ПО КУРСУ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ В СИСТЕМЕ РИТМ

Для студентов направлений
550200, 550400, 550700, 55 1 100,
551500, 552500, 552800

Ответственный за выпуск Ретивов Н.А
Редактор Монахова Е.Л.
Корректор Пономарева Н.В.

ЛР№ 020565 Подписано к печати
Формат 60x84 1/16 Бумага офсетная.
Офсетная печать. Усл п.л.- 7 . Уч печ. л
Заказ № 384 Тир.750экз.

"С"

Издательство Таганрогского
государственного радиотехнического университета
ЕСП 17А, Таганрог, 28, Некрасовский, 44
Типография Таганрогского государственного радиотехнического университета
ГСП 17А Таганрог, 28, Энгельса, 1