№ 2616(2)

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное агентство по образованию

**Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования**

***ТАГАНРОГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ***

Кафедра физики

СБОРНИК
ВОПРОСОВ, УПРАЖНЕНИЙ И ЗАДАЧ ПО КУРСУ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ В СИСТЕМЕ РИТМ

Часть 2

**Для студентов специальностей
550200, 550400, 550700, 551100,
551500, 552500, 552800**

ЕГФ

Таганрог 2005

УДК 53(076.2)

Составители: А.И. Матвеев, Ю.П. Пасичный

Сборник вопросов, упражнений и задач по курсу общей физики в системе РИТМ. Ч.2–Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2005.–210 с.

В сборнике приводятся содержание теории, вопросы, упражнения, примеры решения и условия задач для работы в аудитории и самостоятельного решения по разделам курса общей физики, изучаемого на практических занятиях в третьем семестре. Каждый раздел, помимо базовых соотношений, необходимых для решения задач, примеров решения, вопросов и упражнений, содержит три группы задач А, Б, С, выстроенных в порядке растущей трудоемкости их решения. Задачи группы А и Б являются обязательными задачами программного минимума.

Сборник предназначен для студентов очного обучения 2 курса по перечисленным направлениям, а также для преподавателей кафедры и филиалов ТРТУ, ведущих занятия по курсу общей физики.

Табл.1 . Ил.62 . Библиогр.: 6 назв.

Рецензент А.И. Жорник, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической физики Таганрогского государственного педагогического института.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вашему вниманию предлагается вторая часть сборника вопросов, упражнений и задач по курсу общей физики, преподавание которого в радиотехническом университете проводится в рамках системы РИТМ.

Сборник ориентирован на студентов второго курса третьего семестра дневного обучения по направлениям, в которых запланировано изучение курса общей физики в течение трех семестров в объеме 440 часов.

Подбор материала позволяет заполнить полный перечень практических занятий, отводимых на изучение четвёртого и пятого модулей курса общей физики в системе РИТМ: магнитное поле постоянного тока, электромагнитное поле, колебания и волны.

Каждый модуль сборника структурно разбит по занятиям, проводимым в учебных группах по календарному плану. Каждое занятие состоит из следующих подразделов: содержание теории, основные формулы для решения задач, справочный материал, вопросы и упражнения, примеры решения задач, условия задач с ответами групп А, Б, С, выстроенные в порядке растущей трудоемкости их решения.

Содержание теории приводится для ориентации студента в вопросах, знание которых необходимо для решения задач по конкретной теме.

Основные формулы для решения задач содержат соотношения, наиболее часто встречающиеся при решении задач.

Справочный материал даётся к каждому занятию для удобства его использования студентами.

Приводимые вопросы и упражнения позволят студенту самостоятельно проверить свой уровень подготовки по теоретическому материалу, необходимому для применения на практике, а приводимые примеры решения задач облегчат освоение методики решения задач.

Группы А и Б содержат задачи программного минимума, решение которых в полном объеме обязательно для каждого студента. В группу С включены задачи, уровень трудоемкости которых выходит за рамки утвержденной программы и требует от студента более глубокой проработки курса общей физики. Они предназначены для студентов, желающих самостоятельно углубить изучение курса.

В группу А включены задачи в основном из сборников [1,2], в группу Б – взятые в основном из пособий [2,4]. Задачи группы С взяты в основном из задачников [3,5]. Условия некоторых задач отредактированы по усмотрению составителей. В сборнике имеются также задачи, составленные авторами. Рядом с порядковым номером задачи сборника (нумерация сквозная в пределах занятия) в скобках стоит первая буква фамилии автора источника и соответствующий номер задачи этого источника. После номеров задач, составленных авторами данного сборника, в скобках ничего не проставлено.

Четвёртый модуль был подготовлен А.И. Матвеевым, пятый – Ю.П. Пасичным.

Данное издание является дополненным и изменённым изданием 1999 года. Эти изменения и дополнения связаны с изменением учебного плана и внесены с учётом замечаний преподавателей кафедры физики.

Составители признательны всем своим коллегам, советы и замечания которых были учтены при подготовке сборника и, несомненно, обогатили его. Мы и впредь будем благодарны всем замечаниям и пожеланиям по его дальнейшему улучшению.

Составители

МОДУЛЬ 4. Постоянный ток и стационарное магнитное поле

Занятие 1. Постоянный электрический ток и его законы

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Электрический ток. Плотность тока.

2. Закон Ома для неоднородного участка цепи, для замкнутой цепи.

3. Закон Джоуля Ленца. Работа и мощность тока.

4. Правила Кирхгофа и их применение к расчету сложных цепей постоянного тока.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. ***Сила тока:*** $I = \dfrac{dq}{dt}$.

2. ***Плотность тока:*** $j = \dfrac{dI}{dS_\perp}$, где $S_\perp$ – площадь поверхности, перпендикулярной к направлению движения зарядов. Вектор плотности тока $\vec{j} = qn\langle\vec{u}\rangle$, $\langle\vec{u}\rangle$ – средняя скорость движения электронов.

3. ***Электродвижущая сила:*** $\mathcal{E}_{12} = \dfrac{A^*}{q} = \int\limits_1^2 \vec{E}^* d\vec{l}$, где A^* – работа сторонних сил по переносу заряда q, $\vec{E}^*$ – напряженность сторонних сил.

4. ***Падение напряжения между двумя точками цепи:*** $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}$.

5. ***Закон Ома для однородного участка цепи:*** $I = \dfrac{U_{12}}{R}$, где R – сопротивление участка цепи.

6. *Закон Ома для замкнутой цепи:* $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R + r}$, где r – внутреннее сопротивление.

7. *Удельная электропроводность:* $\sigma = 1/\rho$, ρ – удельное сопротивление, $R = \dfrac{\rho l}{S}$.

8. *Закон Ома в дифференциальной форме:*
$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*)$, где $\vec{E}$ – напряженность электростатического поля, $\vec{E}^*$ – напряженность сторонних сил.

9. *Закон Джоуля – Ленца:*

$$Q = IU_{12}t = I^2 R_{12} t = \frac{U_{12}^2}{R_{12}} t.$$

10. *Закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме:*

$$Q_{\text{уд}} = \frac{\delta Q}{dVdt} = \rho j^2 = \vec{j}(\vec{E} + \vec{E}^*).$$

11. *Первое и второе правила Кирхгофа*: алгебраическая сумма токов в узле равна нулю: $\sum_k I_k = 0$, алгебраическая сумма падений напряжений на участках цепи при обходе любого замкнутого контура равна алгебраической сумме ЭДС, действующих в этом контуре: $\sum_k I_k R_k = \sum_k \mathcal{E}_k$.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Элементарный заряд $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ Кл.

Масса электрона $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг.

Удельные сопротивления:

меди $\rho = 0{,}017$ мкОм·м,

нихрома $\rho = 100$ мкОм·м,

алюминия $\rho = 0{,}025$ мкОм·м.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Что такое электрический ток? Единица измерения силы тока в системе СИ.

2. Из каких составляющих складывается движение заряженных частиц в проводнике? Чем характеризуются эти составляющие движения частиц?

3. Что называется вектором плотности тока? Как он направлен?

4. Как выражается вектор плотности тока через среднюю скорость движения заряженных частиц?

5. Сформулировать уравнение непрерывности для плотности тока.

6. Записать уравнение непрерывности в интегральной и дифференциальной формах.

7. Каким способом можно поддерживать непрерывное движение зарядов (ток) по замкнутому контуру?

8. С помощью каких сил поддерживается такой ток?

9. Что называется напряженностью поля сторонних сил?

10. Что называется электродвижущей силой (ЭДС)?

11. Что такое падение напряжения между двумя точками цепи?

12. Чем отличается однородный участок цепи от неоднородного? Дайте характеристику замкнутой цепи.

13. Дайте определение электрической проводимости (электропроводности). В каких единицах она измеряется?

14. Закон Ома для участка цепи. Для каких проводников он выполняется?

15. Что называется электрическим сопротивлением и удельным электрическим сопротивлением?

16. Закон Ома для однородного участка и для замкнутой цепи.

17. Закон Ома в дифференциальной форме.

18. Вычислить работу тока на однородном участке цепи.

19. Вычислить мощность тока на участке цепи.

20. Дать определение удельной мощности тока.

21. Записать закон Джоуля – Ленца в интегральной и дифференциальной формах.

22. Сформулировать первое и второе правила Кирхгофа.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Пример* 1.** Чтобы определить место повреждения изоляции двухпроводной телефонной линии длиной $l = 4$ км, к концу этой линии присоединили батарею с ЭДС $\mathcal{E} = 15$ В. При этом оказалось, что если провода у другого конца линии разомкнуты, то ток, протекающий через батарею, $I_1 = 1$ А; если провода замкнуты накоротко, то ток, протекающий через батарею, $I_2 = 1{,}8$ А. Найти место повреждения и сопротивление изоляции в месте повреждения. Сопротивление единицы длины провода $r = 1{,}25$ Ом/км. Сопротивлением батареи пренебречь.

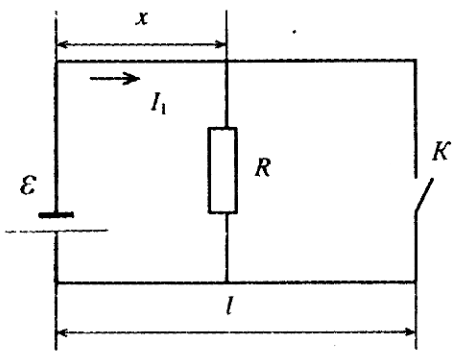

Рис. 1.1

Решение. Нарушение изоляции в каком-либо месте линии эквивалентно включению в этом месте некоторого резистора с сопротивлением R (рис. 1.1). Если конец линии разомкнут, то согласно закону Ома $\mathcal{E} = (2xr + R)I_1$, где r – сопротивление единицы длины провода, x – расстояние до поврежденного участка, I_1

– ток в цепи источника. При замыкании конца линии параллельно резистору R подключается еще короткозамкнутый участок линии, так что

$$\mathcal{E} = \left[2xr + \frac{2R(L-x)r}{R + 2(L-x)r}\right] I_2 ,$$

где I_2 – ток в цепи источника при замкнутом конце линии. Подставив во второе уравнение $x = (\mathcal{E} - I_1 R)/2r I_1$, найденное из первого уравнения, получим квадратное уравнение для R:

$$I_2 R^2 - 2\mathcal{E}\left(\frac{I_2}{I_1} - 1\right)R + \left(\frac{I_2}{I_1} - 1\right)\left(\frac{\mathcal{E}^2}{I_1} - 2Lr\mathcal{E}\right) = 0 ,$$

откуда

$$R_{1,2} = \frac{1}{2I_2}\left\{2\mathcal{E}\left(\frac{I_2}{I_1} - 1\right) \pm \left[4\mathcal{E}^2\left(\frac{I_2}{I_1} - 1\right)^2 - 4I_2\left(\frac{I_2}{I_1} - 1\right)\left(\frac{\mathcal{E}^2}{I_1} - 2Lr\mathcal{E}\right)\right]^{1/2}\right\}.$$

Используя числовые данные задачи и учитывая, что $r = 1{,}25$ Ом/км, имеем

$$R_{1,2} = \frac{24 \pm \sqrt{146}}{3{,}6} \text{ Ом},$$

откуда $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 3{,}3$ Ом.

Вычислим соответствующие значения x: $x_1 = 2$ км, $x_2 = 4{,}7$ км. Очевидно, что значение x_2 не соответствует условию задачи; следовательно, окончательно имеем $R = 10$ Ом, $x = 2$ км.

***Пример* 2.** Два гальванических элемента с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 5$ В, $\mathcal{E}_2 = 4$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 0{,}3$ Ом, $r_2 = 0{,}2$ Ом соединены параллельно и замкнуты на резистор R (рис.1.2). Определить: 1) сопротивление R_1 резистора R, при котором ток через второй элемент $\mathcal{E}_2$ будет равен нулю; 2) силу

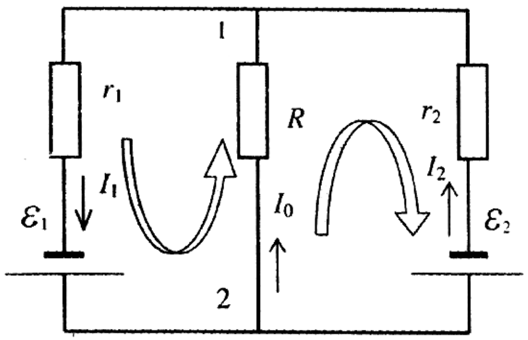

Рис. 1.2

токов в цепи, если сопротивление резистора R равно $R_2 = 1{,}88$ Ом.

Решение. Запишем обобщенный закон Ома для участка $1 \to \mathcal{E}_1 \to 2$ (рис. 1.2):

$$I_1 r_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_1.$$

Если $I_2 = 0$, то $\varphi_2 - \varphi_1 = \mathcal{E}_2$, поэтому

$$I_1 = (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)/r_1.$$

Применяя закон Ома для замкнутого контура $1 \to \mathcal{E}_1 \to 2 \to R$ при условии, что $I_1 = I_0$, получим

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + R}.$$

Приравняем правые части полученных выражений:

$$\frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{r_1} = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1 + R}.$$

Откуда, полагая R=R_1, найдем

$$R_1 = \frac{\mathcal{E}_2 r_1}{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2} = 1{,}2 \text{ Ом}.$$

Запишем первое правило Кирхгофа для узла 1, второе правило Кирхгофа – для контуров $1 \to \mathcal{E}_1 \to 2 \to R$ и $1 \to \mathcal{E}_2 \to 2 \to R$ при направлении обхода первого контура против часовой стрелки, а второго – по часовой стрелке:

$$I_1 = I_2 + I_0, \qquad (1.1)$$

$$I_1 r_1 + I_0 R = \mathcal{E}_1, \qquad (1.2)$$

$$-I_2 r_2 + I_0 R = \mathcal{E}_2 \qquad (1.3)$$

Уравнения (1.1) – (1.3) составляют систему относительно неизвестных I_1, I_2, I_0. Умножив уравнение (1.2) на r_2, а уравнение (1.3) – на r_1, сложим их почленно:

$$(I_1 - I_2) r_1 r_2 + I_0 R (r_1 + r_2) = \mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1.$$

Решая это уравнение и учитывая, что $R = R_2$, а $I_1 - I_2 = I_0$ (см.(1.1)), находим

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + R_2 (r_1 + r_2)} = 2{,}2 \text{ А}.$$

Из уравнений (1.2) и (1.3) имеем

$$I_1 = (\mathcal{E}_1 - I_0 R_2)/r_1 = 2{,}9 \text{ А}, \quad I_2 = (I_0 R_2 - \mathcal{E}_2)/r_2 = 0{,}7 \text{ А}.$$

Пример 3. В схеме, показанной на рис. 1.3, $\mathcal{E}_1$=20 В; $\mathcal{E}_2$=25 В; R_1=10 Ом; R_2=15 Ом внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы. Определить работу, совершенную источниками, и полное количество джоулевой теплоты, выделившейся в цепи, за интервал времени $\Delta t = 0{,}5$ с при R_3=82 Ом.

Решение. Применим правила Кирхгофа к одному из узлов и к замкнутым контурам $R_1 \to \mathcal{E}_1 \to R_3$ и $R_2 \to \mathcal{E}_2 \to R_3$:

$$I_1 + I_2 = I_3, \qquad (1.4)$$

$$I_1 R_1 + I_3 R_3 = \mathcal{E}_1, \qquad (1.5)$$

$$I_2 R_2 + I_3 R_3 = \mathcal{E}_2. \qquad (1.6)$$

Умножив уравнение (1.5) на R_2, а уравнение (1.6) на R_1, и почленно их сложив, после несложных преобразований с учетом (1.4) получим

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 R_2 + R_3(R_1 + R_2)}.$$

Подставляя заданные значения ЭДС и сопротивлений в последнее выражение, найдем $I_3 = 0{,}25$ А. Из уравнений (1.5) и (1.6) имеем

$$I_1 = (\mathcal{E}_1 - I_3 R_3)/R_1 = -0{,}05\text{ А};\quad I_2 = (\mathcal{E}_2 - I_3 R_3)/R_2 = 0{,}3\text{ А}.$$

Отрицательное значение силы тока I_1 означает лишь то, что направление силы тока указано на схеме неверно. В действительности ток через первый источник течет в противоположном направлении и сила этого тока $|I_1|$=0,05 А.

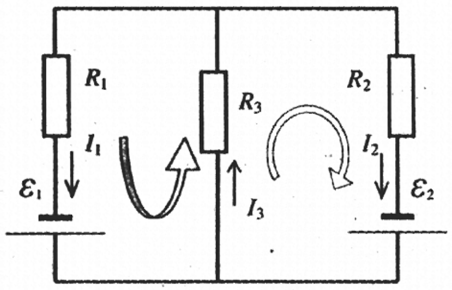

Рис. 1.3

При таком направлении тока I_1 работа первого источника отрицательна:

$$A_1 = -\mathcal{E}_1 |I_1| \Delta t = -0{,}5\text{ Дж}.$$

Работа второго источника положительна, так как ток I_2, идущий через второй источник, направлен вдоль его стороннего поля:

$$A_2 = \mathcal{E}_2 I_2 \Delta t = 3{,}75\text{ Дж}.$$

Поскольку других источников в цепи нет, количество теплоты, выделяемое по всей цепи, равно

$$Q = A_1 + A_2 = 3{,}25\text{ Дж}.$$

Очевидно, эта величина может быть рассчитана и по формуле

Ответ: Большую (в 1,5 раза) мощность потребляет лампочка с меньшим сопротивлением.

8. (В. 10.77) В схеме на рис.1.7 $\mathcal{E}_1$=2,1 В, $\mathcal{E}_2$=1,9 В, R_1=10 Ом, R_2=10 Ом и R_3=45 Ом. Найти силу тока во всех участках цепи. Внутренним сопротивлением элементов пренебречь.

Ответ: I_1=0,03 *А*, I_2= 0,01 *А*, I_3=0,04 *А*.

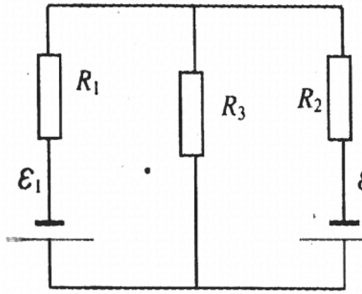

Рис. 1.7

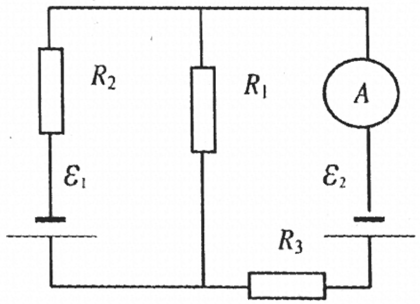

Рис.1.8

9. (В. 10.84) Какую силу тока показывает амперметр А в схеме на рис 1.8, если $\mathcal{E}_1$=2 В, $\mathcal{E}_2$=1 В, R_1=10^3 Ом, R_2= 500 Ом, R_3=200 Ом и сопротивление амперметра R_A=200 Ом? Внутренним сопротивлением элементов пренебречь.

Ответ: *I*=0,45 мА.

10. (В. 10.96) В схеме на рис.1.9 $\mathcal{E}$ =200 В, R_1=2 кОм, R_2=3 кОм, V_1 и V_2 – два вольтметра, сопротивления которых равны R_{V1}=3 кОм, R_{V2}=2 кОм. Найти показания вольтметров V_1 и V_2 , если ключ *K*: а) разомкнут, б) замкнут. Сопротивлением батареи пренебречь. Задачу решить, применяя законы Кирхгофа.

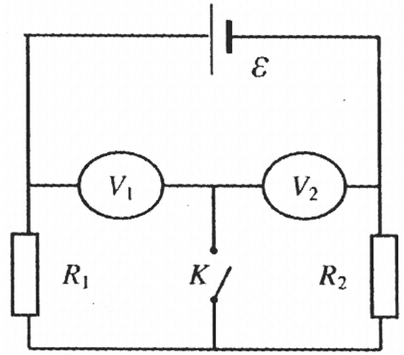

Рис. 1.9

Ответ: а) $U_1 = 120$ В, $U_2 = 80$ В; б) $U_1 = U_2 = 100$ В.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ Б

1. (В. 10.31) В схеме на рис. 1.6 ЭДС батареи $\mathcal{E}$ =100 В, сопротивления R_1=100 Ом, R_2=200 Ом и R_3=300 Ом. Какое напряжение показывает вольтметр, если его сопротивление равно 2 кОм? Сопротивлением батареи пренебречь.

Ответ: U=80 В.

2. (В. 10.42) От генератора, ЭДС которого равна $\mathcal{E}$ =110 В, требуется передать энергию на расстояние 250 м. Потребляемая мощность P=1 кВт. Найти минимальное сечение медных подводящих проводов, если потери мощности в цепи не должны превышать 1 %.

Ответ: S=78 мм^2.

3. (В. 10.46) Батарея с ЭДС $\mathcal{E}$ =240 В и внутренним сопротивлением r=1 Ом замкнута на внешнее сопротивление, равное R=23 Ом. Определить: 1) полную мощность P_0, 2) полезную мощность P, 3) КПД батареи η.

Ответ: P_0=2,4 кВт, P=2,3 кВт, η=96 %.

4. (В. 10.50) Элемент сначала замыкают на внешнее сопротивление R_1=2 Ом, а затем на внешнее сопротивление R_2=0,5 Ом. Найти ЭДС элемента и его внутреннее сопротивление, если известно, что в каждом из этих случаев мощность, выделяемая во внешней цепи, одинакова и равна 2,54 Вт.

Ответ: $\mathcal{E}$ =4 В, r=1 Ом.

5. (В. 10.52) Элемент, ЭДС которого $\mathcal{E}$ и внутреннее сопротивление r, замкнут на внешнее сопротивление R. Наибольшая мощность во внешней цепи равна 9 Вт. Сила тока, текущего при этих условиях по цепи, равна 3 А. Найти ЭДС $\mathcal{E}$ и внутреннее сопротивление r.

Ответ: $\mathcal{E}$ =6 В, r=1 Ом.

6. (В. 10.55) В схеме рис. 1.10 ЭДС батареи $\mathcal{E}$ =120 В, сопротивления R_1=25 Ом, R_2=R_3=100 Ом. Найти мощность P_1, выделяющуюся на сопротивлении R_1. Сопротивлением батареи пренебречь.

Ответ: P_1=16 Вт.

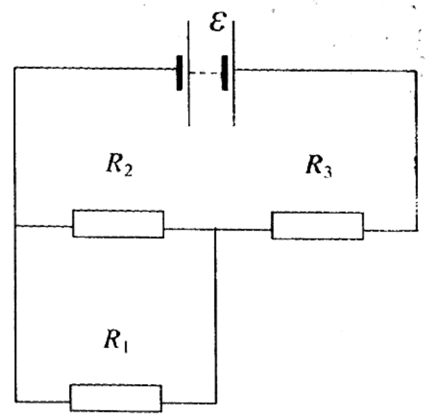

Рис. 1.10

7. (В. 10. 65) Электрический чайник имеет две секции. При включении одной из них вода в чайнике закипит через 15 мин, при включении другой – через 30 мин. Через какое время t закипит вода в чайнике, если включить обе секции: а) последовательно, б) параллельно?

Ответ: а) t=45 мин; б) t=10 мин.

8. (В. 10. 79) В схеме на рис. 1.11 два элемента имеют одинаковые ЭДС $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ =2 В. Внутренние сопротивления этих элементов равны соответственно r_1=1 Ом и r_2=2 Ом. Чему равно внешнее сопротивление R, если сила тока I_1, текущего через элемент с ЭДС $\mathcal{E}_1$, равна 1 А? Найти силу тока I_2, текущего через элемент с ЭДС $\mathcal{E}_2$. Найти силу тока I, текущего через сопротивление R.

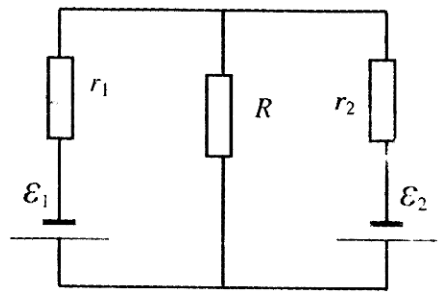

Рис. 1.11

Ответ: R=0,66 Ом; I_2=0,5 А; I=1,5 А.

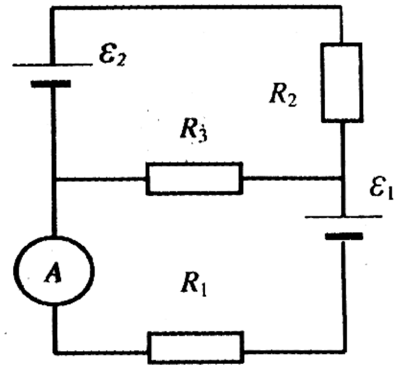

Рис. 1.12

9. (В. 10. 83) В схеме на рис. 1.12 $\mathcal{E}_1$=30 В, $\mathcal{E}_2$=5 В, R_2=10 Ом, R_3=20 Ом. Через амперметр идёт ток 1 А, направленный от R_3 к R_1. Найти сопротивление R_1. Сопротивлением батарей и амперметра пренебречь.

Ответ: R_1=20 Ом.

10. (В. 10. 86) В схеме на рис. 1.13 $\mathcal{E}_1$=2 В, $\mathcal{E}_2$=4 В, $\mathcal{E}_3$=6 В, R_1=4 Ом, R_2=6 Ом и R_3=8 Ом. Найти силу тока во всех участках цепи. Сопротивлением элементов пренебречь.

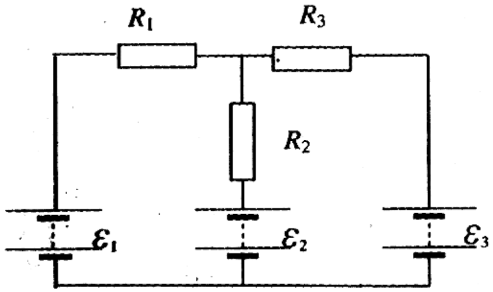

Рис.1.13

Ответ: I_1=390 мА, I_2=77 мА, I_3=310 мА.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1. (И. 3.180) Найти ЭДС и внутреннее сопротивление источника, эквивалентного двум параллельно соединенным элементам с ЭДС $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ и внутренними сопротивлениями R_1 и R_2.

Ответ: $\mathcal{E} = \dfrac{\mathcal{E}_2 R_1 + \mathcal{E}_1 R_2}{R_1 + R_2}$, $r = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

2. (В. 10. 91) В схеме на рис.1.14 два элемента имеют равные ЭДС $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$=2 В и одинаковые внутренние сопротивления $r_1 = r_2$=0,5 Ом. Найти токи, текущие через сопротивления R_1=0,5 Ом и R_2=1,5 Ом, а также ток через элемент с ЭДС $\mathcal{E}_1$.

Ответ: I_1=2,3 *А*; I_2=0,56 *А*; I_3=1,7 *А*.

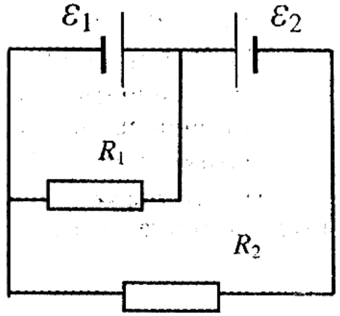

Рис. 1.14

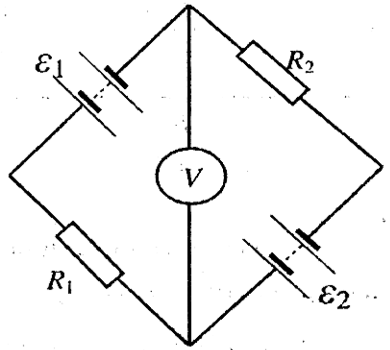

Рис. 1.15

3. (В. 10. 93) Батареи имеют ЭДС $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$=110 В, сопротивления $R_1 = R_2$=200 Ом. Сопротивление вольтметра R_V=1 кОм (рис.1.15). Найти показание вольтметра.

Ответ: U=100 В.

4. (И. 3.181) Найти значение и направление тока через сопротивление R в схеме на рис. 1.16, если ЭДС источников $\mathcal{E}_1$=1,5 В, $\mathcal{E}_2$=3,7 В и сопротивления R_1=10 Ом, R_2=20 Ом и R=5,0 Ом. Внутренние сопротивления источников тока пренебрежимо малы.

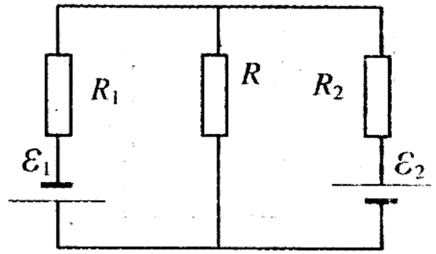

Рис. 1.16

Ответ: I=0,02 А.

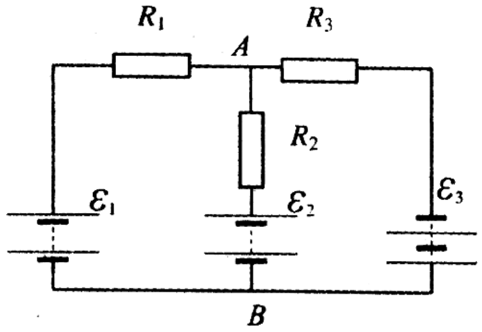

Рис. 1.17

5. (И. 3. 182) В схеме на (рис. 1.17) ЭДС источников $\mathcal{E}_1$=1,5 В, $\mathcal{E}_2$=2,0 В, $\mathcal{E}_3$=2,5 В, сопротивления R_1=10 Ом, R_2=20 Ом, R_3=30 Ом. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы. Найти ток через сопротивление R_1, разность потенциалов между точками A и B.

Ответ: I=0,06 А, U=0,9 В.

6 .(И. 3. 183) Найти ток через сопротивление R в схеме на рис. 1.18. Внутренние сопротивления обоих источников пренебрежимо малы. .

Ответ: $I = \dfrac{\mathcal{E}_1 R_3 + \mathcal{E}_2 (R_2 + R_3)}{R(R_2 + R_3) + R_2 R_3}$.

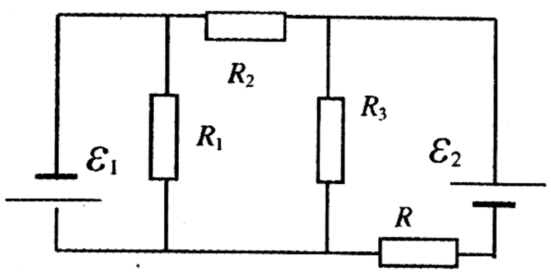

Рис. 1.18

7. (И. 3. 184) Найти разность потенциалов $\Delta\varphi$ между обкладками конденсатора C схемы на рис. 1.19, если ЭДС источ-

ников $\mathcal{E}_1$=4,0 В, $\mathcal{E}_2$=1,0 В и сопротивления R_1=10 Ом, R_2=20 Ом, R_3=30 Ом. Внутренние сопротивления источников пренебрежимо малы.

Ответ: $\Delta\varphi$=1 В.

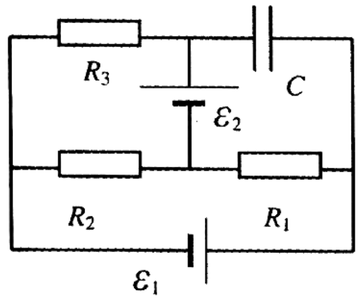

Рис. 1.19

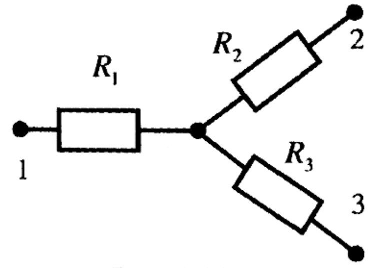

Рис. 1.20

8. (И. 3. 185) Найти ток, протекающий через сопротивление R_1 участка цепи (рис. 1.20), если сопротивления R_1=10 Ом, R_2=20 Ом, R_3=30 Ом и потенциалы точек 1, 2 и 3 равны соответственно φ_1=10 В, φ_2=6 В, φ_3=5 В.

Ответ: I_1=0,2 А.

9. (И. 3. 186) Между точками A и B цепи (рис. 1.21) поддерживают постоянное напряжение U=25 В. Найти значение и направление тока на участке CD, если сопротивления R_1=1 Ом, R_2=2 Ом, R_3=3 Ом и R_4=4 Ом.

Ответ: I=1 А, ток идет от точки C к точке D.

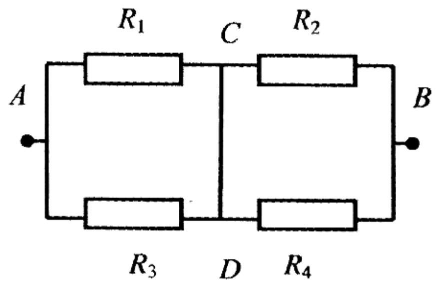

Рис. 1.21

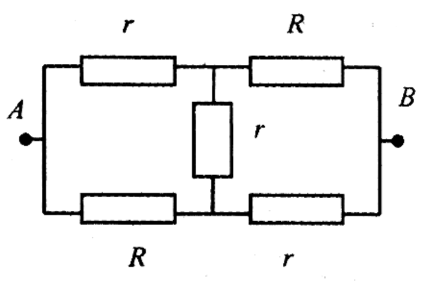

Рис. 1.22

10. (И. 3. 187) В схеме (рис. 1.22) найти сопротивление между точками A и B.

Ответ:

$$R_{AB} = \frac{r(r+3R)}{R+3r}$$

Занятие 2. Магнитное поле постоянного тока. Закон Био Савара Лапласа

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Индукция магнитного поля.
2. Магнитное поле движущегося заряда.
3. Закон Био Савара Лапласа.
4. Принцип суперпозиции магнитных полей.
5. Индукция магнитного поля, создаваемая отрезком прямолинейного проводника с током.
6. Индукция магнитного поля, создаваемая бесконечно длинным прямолинейным проводником с током.
7. Магнитное поле на оси кругового тока.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. ***Связь напряженности с индукцией магнитного поля в вакууме:***

$$\vec{H} = \vec{B}/\mu_0,$$

где μ_0 – магнитная постоянная.

2. ***Магнитное поле движущегося заряда:***

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q[\vec{\upsilon}\vec{r}]}{4\pi \ r^3},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки поля с индукцией $\vec{B}$, проведенный из точки нахождения заряда q, $\vec{\upsilon}$ – скорость движения заряда.

3. ***Закон Био Савара Лапласа:***

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\left[d\vec{l},\vec{r}\right]}{r^3},$$

где $d\vec{B}$ – индукция магнитного поля, создаваемая элементом проводника $d\vec{l}$, направленным по направлению тока I, $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный от элемента проводника к точке, где определяется магнитная индукция. Модуль $d\vec{B}$ находится по формуле

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\sin\alpha}{r^2}dl,$$

где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $d\vec{l}$, $dl=|d\vec{l}|$.

4. ***Принцип суперпозиции магнитных полей***

Индукция магнитного поля $\vec{B}$, создаваемая несколькими движущимися зарядами (токами), равна векторной сумме индукций магнитных полей $\vec{B}_i$, создаваемых каждым зарядом (током) в отдельности:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^{N}\vec{B}_i .$$

В частном случае двух полей $\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2$, модуль результирующего вектора магнитной индукции равен

$$B=\sqrt{B_1^2+B_2^2+2B_1B_2\cos\alpha},$$

где α – угол между векторами $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$.

5. ***Индукция магнитного поля, создаваемая отрезком прямолинейного проводника с током конечной длины:***

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{h}\left(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2\right), \qquad (2.1)$$

где I – ток, текущий по проводнику, h – кратчайшее расстояние от точки, где определяется индукция, до проводника, углы α_1, α_2 изображены на рис. 2.1.

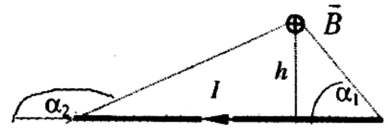

Рис.2.1

6. ***Магнитная индукция бесконечно длинного прямого проводника (поле прямого тока:)***

$$B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{b},$$

где b – кратчайшее расстояние до проводника.

7. ***Индукция магнитного поля на оси кругового тока I:***

$$B=\frac{\mu_0R^2I}{2(R^2+h^2)^{3/2}},$$

где R – радиус кругового контура с током, h – расстояние от точки, где находится индукция магнитного поля, до плоскости контура. Индукция магнитного поля в центре кругового тока

$$B=\frac{\mu_0 I}{2R},$$

где R – радиус кругового контура с током.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Элементарный заряд $e=1{,}60\cdot10^{-19}$ Кл.
Масса электрона $m=9{,}11\cdot10^{-31}$ кг.
Магнитная постоянная $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Что такое вектор магнитной индукции? Как он направлен?
2. Перечислите источники магнитного поля. Может ли неподвижный в некоторой системе отсчета заряд возбуждать в этой же системе отсчета магнитное поле?

3. Напишите формулу для магнитного поля движущегося заряда. Нарисуйте направление векторов, входящих в формулу для магнитного поля движущегося заряда.

4. Верна ли формула для магнитного поля движущегося заряда, приведенная в разделе "Основные формулы для решения задач", в случае релятивистского движения заряда?

5. Каким образом учитывается характер движения носителей тока в проводнике при выводе закона Био Савара Лапласа?

6. Для чего нужен принцип суперпозиции магнитных полей при выводе закона Био Савара Лапласа?

7. Напишите закон Био Савара Лапласа. Нарисуйте направление векторов, входящих в формулу закона Био Савара Лапласа.

8. Можно ли применить закон Био Савара Лапласа для расчета магнитного поля бесконечной прямолинейной проводящей ленты с током, который равномерно распределен по конечной ширине этой ленты? Как это сделать?

9. Покажите, что при увеличении длины прямолинейного проводника с током до бесконечности формула для магнитного поля прямолинейного отрезка проводника с током конечной длины переходит в формулу для бесконечно длинного проводника с током.

10. Чему равна величина индукции магнитного поля в точке, лежащей на продолжении прямолинейного отрезка проводника с током и удаленной от конца проводника на произвольное расстояние?

11. Получите формулу зависимости величины магнитного поля dB от элемента тока Idl в центре кругового тока.

12. Как рассчитать величину магнитной индукции проводника с током I в форме полукруга на его оси?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример **1**. Два бесконечно длинных прямолинейных провода лежат в двух параллельных плоскостях, расстояние между которыми равно a = 0,4 м. Провод с током I_2 = 2 А лежит выше провода с током I_1=1 А. Угол между направлениями токов α=60°

(на рис. 2.2 изображен вид сверху на параллельные плоскости, в которых лежат проводники). Найти величину вектора магнитной индукции B в средней точке кратчайшего отрезка прямой, соединяющего два проводника.

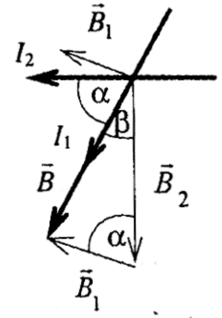

Рис. 2.2

Решение. Вектор индукции магнитного поля прямого тока направлен по касательной к окружности, в центре которой находится проводник с током, причем плоскость окружности перпендикулярна направлению тока. Направление вектора магнитной индукции образует с направлением тока правовинтовую систему. Так как проводник с током I_2 лежит выше проводника с током I_1, то векторы индукций $\vec{B}_1, \vec{B}_2$, создаваемые токами I_1, I_2 в плоскости, проходящей через середину кратчайшего отрезка прямой, соединяющего провода, и параллельной плоскостям, в которых лежат провода, направлены так, как показано на рис. 2.2. Величины $\vec{B}_1, \vec{B}_2$ соответственно равны

$$B_1 = \frac{\mu_0}{\pi a} I_1, \qquad B_2 = \frac{\mu_0}{\pi a} I_2. \tag{2.2}$$

Векторы $\vec{B}_1, \vec{B}_2$ и их геометрическая сумма $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ являются сторонами треугольника, изображенного на рис. 2.2. Так как $\sin\beta = B_1/B_2 = 1/2$, то $\beta = 30°$, с другой стороны $\alpha = 60°$, поэтому треугольник, сторонами которого являются векторы $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}$, прямоугольный. Полная индукция, создаваемая проводниками, равна

$$B = \sqrt{B_2^2 - B_1^2}\,. \tag{2.3}$$

Подставив (2.2) в (2.3), получим $B = \frac{\mu_0}{\pi a}\sqrt{I_2^2 - I_1^2} = \sqrt{3}$ мкТл.

Вектор $\vec{B}$ направлен по направлению тока I_1.

Пример 2. По прямому отрезку провода длиной c=3 м течет ток I=100 А. Найти величину магнитной индукции в точке, находящейся на расстоянии a=5 м и b=4 м от концов провода.

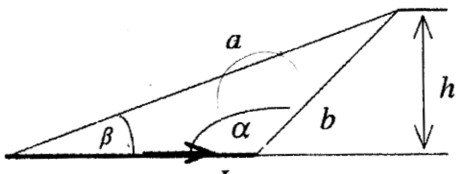

Рис. 2.3

Решение. Рассмотрим треугольник со сторонами, равными a, b, c. Для углов α и β, лежащих напротив сторон длины a и b (рис. 2.3), исходя из теоремы косинусов, запишем

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha,\quad b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta.$$

Откуда

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\qquad \cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}. \tag{2.4}$$

Кратчайшее расстояние от прямого отрезка провода длиной c до точки, где определяется поле, равно

$$h=a\sin\beta=\frac{1}{2c}\sqrt{2a^2c^2+2a^2b^2+2b^2c^2-b^4-c^4-a^4}. \tag{2.5}$$

Используя формулу (2.1), индукцию магнитного поля, создаваемую током I, текущим по проводу длиной c, запишем в виде

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi h}(\cos\beta-\cos(\pi-\alpha)).$$

Подставив в эту формулу (2.4), (2.5), найдем

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi ab}\frac{\left\{\left(a^2+c^2-b^2\right)b+\left(b^2+c^2-a^2\right)a\right\}}{\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)c^2-c^4-\left(b^2-a^2\right)^2}}=1{,}5\ \text{мкТл}.$$

Пример 3. По замкнутому проводнику, имеющему форму равностороннего треугольника со стороной a = 1 м, течет ток I=1 А. Найти величину магнитной индукции в точке O (рис. 2.4),

расположенной в плоскости треугольника на перпендикуляре к середине одной из его сторон, вне этого треугольника, на расстоянии $OD=a/(2\sqrt{3})$ м.

Решение. Векторы магнитных индукций в точке O от отрезков провода AB и BC с током I одинаковы по величине и направлению. На рис. 2.4 они обозначены $\vec{B}_1$ и направлены от нас перпендикулярно плоскости чертежа, образуя с направлением тока I, текущего по проводникам AB и BC, правовинтовую систему.

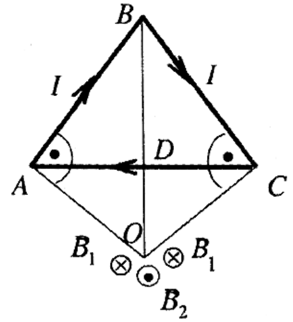

Рис. 2.4

Вектор индукции $\vec{B}_2$ магнитного поля, создаваемого в точке O током I, который течет по отрезку провода AC, направлен противоположно вектору $\vec{B}_1$ (рис. 2.4). Найдем величину магнитной индукции, создаваемой током I, протекающим по сторонам AB, BC. Так как угол между сторонами AO и AD прямоугольника AOD равен $\mathrm{arctg}(OD/AD)$= $\mathrm{arctg}(1/\sqrt{3})$=30°, то угол BAO, как и угол BCO, прямой. Поэтому расстояния точки O от отрезков провода AB и BC равны

$$OA=OC=a\,\mathrm{tg}30^\circ=\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Чтобы найти магнитную индукцию B_1, создаваемую током I, текущим по сторонам AB или BC, нужно в формуле (2.1) положить $h=OA=OC=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $\alpha_1=30^\circ$, $\alpha_2=90^\circ$. Тогда

$$B_1=\frac{3\mu_0}{8\pi a}I. \tag{2.6}$$

Аналогично, положив в (2.1) $h=OD=\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$, α_1=30°, α_2=150°, найдем индукцию B_2 отрезка провода AC с током I:

$$B_2=\frac{3\mu_0 I}{2\pi a}. \tag{2.7}$$

Так как векторы $\vec{B}_1$, $\vec{B}_2$ направлены в противоположные стороны, то результирующая индукция магнитного поля в точке O, с учетом (2.6), (2.7), равна

$$B=B_2-2B_1=\frac{3\mu_0 I}{4\pi a}=3\cdot 10^{-7}\ \text{Тл}.$$

***Пример* 4.** По плоскому замкнутому контуру из тонкого провода (рис. 2.5) течет ток I. Контур состоит из дуги радиусом R, концы которой плавно переходят в два прямых отрезка провода CD и DA, направленных по касательной к дуге и под прямым углом друг к другу. Найти напряженность H магнитного поля в центре O.

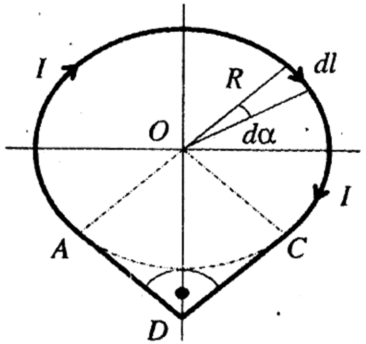

Рис. 2.5

Решение. Векторы $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$ магнитных индукций, создаваемых током I в точке O, протекающим соответственно по отрезкам провода CD, DA и дуге AC, направлены в одну сторону. Согласно принципу суперпозиции, величина результирующего поля в точке O равна $B=B_1+B_2+B_3$. Магнитные индукции B_1, B_2 от прямых отрезков проводника найдем по формуле (2.1), положив в ней $h=R$, $\alpha_1=45°$, $\alpha_2=90°$:

$$B_1=B_2=\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{8\pi R}.$$

Используя закон Био Савара Лапласа, величину магнитной индукции в точке O от элемента dl кругового тока I радиусом R запишем в виде

$$dB_3=\frac{\mu_0}{4\pi}\ \frac{I}{R^2}dl.$$

Чтобы проинтегрировать это выражение, перейдем к новой переменной интегрирования $d\alpha=dl/R$, после чего найдем

$$B_\perp=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\left\{\frac{(\pi-2\alpha)hR}{2\left(h^2+R^2\right)^{3/2}}+\left(1-\frac{R}{\sqrt{h^2+R^2}}\right)\frac{\sin\alpha}{h}\right\}.$$

Вычислив $B_\perp$, B_z, найдем величину магнитного поля на расстоянии h от центра O вдоль оси Oz:

$$B=\sqrt{B_z^2+B_\perp^2}=3{,}8\ \text{мкТл}.$$

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1. Электрон движется со скоростью $\upsilon=10^4$ м/с по окружности в магнитном поле с индукцией $B=1$ Тл. Полагая $\upsilon<<c$, определить индукцию B_1, созданную электроном в центре окружности.

Ответ: $B_1=0{,}049$ мкТл.

2. (B.11.5) На рис. 2.7 изображены сечения трех прямолинейных бесконечно длинных проводников с токами. Расстояния $AB=BC=5$ см, токи $I_1=I_2=I$ и $I_3=2I$. Найти точку на прямой AC, в которой индукция магнитного поля, вызванного токами I_1, I_2 и I_3, равна нулю.

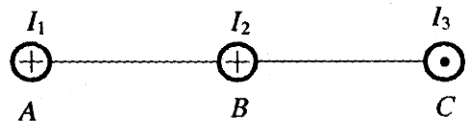

Рис. 2.7

Ответ: Между токами I_1 и I_2 на расстоянии $a=3{,}3$ см от точки A.

3. (B.11.8) Два прямолинейных бесконечно длинных проводника расположены перпендикулярно друг к другу и находятся во взаимно перпендикулярных плоскостях (рис. 2.8). Найти магнитные индукции B_1 и B_2 в точках M_1 и M_2, если токи $I_1=2$ А и $I_2=3$ А. Расстояния $AM_1=AM_2=1$ см и $AB=2$ см.

Ответ: $B_1=45$ мкТл; $B_2=72$ мкТл.

4. (B.11.9) Два прямолинейных длинных проводника расположены параллельно на расстоянии $d=10$ см друг от друга. По проводникам текут токи $I_1=I_2=5$ А в противоположных направлениях. Найти модуль и направление вектора магнитной индук-

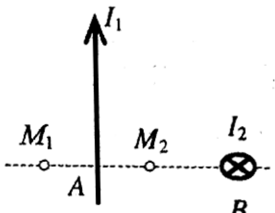

Рис. 2.8

ции $\vec{B}$ в точке, находящейся на расстоянии a=10 см от каждого проводника.

Ответ: B=10 мкТл. Вектор магнитной индукции $\vec{B}$ направлен перпендикулярно к плоскости, проходящей через оба провода.

5. (В.11.11) Найти магнитную индукцию B поля, создаваемого отрезком AB прямолинейного проводника с током, в точке C, расположенной на перпендикуляре к середине этого отрезка на расстоянии a=5 см от него. По проводнику течет ток I=20 А. Отрезок AB проводника виден из точки C под углом 60°.

Ответ: B=40 мкТл.

6. (В.11.13) Отрезок прямолинейного проводника с током имеет длину l=30 см. При каком предельном расстоянии a от него для точек, лежащих на перпендикуляре к его середине, магнитное поле можно рассматривать как поле бесконечно длинного прямолинейного тока? Ошибка при таком допущении не должна превышать 5%. ***Указание.*** Допускаемая ошибка $\delta=(B_2-B_1)/B_2$, где B_1 – величина вектора магнитной индукции отрезка проводника с током и B_2 – величина вектора магнитной индукции бесконечно длинного прямолинейного тока.

Ответ: a<5см.

7. (В.11.18) Напряженность магнитного поля в центре кругового витка H_0= 64 А/м. Радиус витка R =11 см. Найти напряженность H магнитного поля на оси витка на расстоянии a=10 см от его плоскости.

Ответ: H=26 А/м.

8. (В.11.22) Два круговых витка расположены в двух взаимно перпендикулярных плоскостях так, что центры этих витков совпадают. Радиус каждого витка R=2 см, токи в витках

$I_1=I_2$=5 А. Найти напряженность H магнитного поля в центре этих витков.

Ответ: H=180 А/м.

9. (В.11.23) Из проволоки длиной l=1 м сделана квадратная рамка. По рамке течет ток I=10 А. Найти напряженность H магнитного поля в центре рамки.

Ответ: H=36 А/м.

10. (В.11.25) По проволочной рамке, имеющей форму правильного шестиугольника, течет ток I=2 А. При этом в центре рамки образуется магнитное поле напряженностью H=33 А/м. Найти длину l проволоки, из которой сделана рамка.

Ответ: l=0,2 м.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ Б

1.(Ч.21.35) Определить скорость прямолинейно движущегося электрона, если создаваемое им магнитное поле имеет максимальное значение 160 мкТл на расстоянии 10 нм от траектории электрона.

Ответ: $\upsilon=10^6$ м/с.

2.(Ч.21.25) По контуру в виде равностороннего треугольника течет ток 40 А. Сторона треугольника 30 см. Определить магнитную индукцию в точке пересечения высот.

Ответ: B=240 мкТл.

3.(Ч.21.24) По бесконечно длинному прямому проводнику, согнутому под углом 120°, течет ток 50 А. Найти магнитную индукцию в точках, лежащих на биссектрисе угла и удаленных по обе стороны от вершины угла на 5 см.

Ответ: B_1=350мкТл; B_2=120 мкТл.

4.(Ч.21.31б) Определить индукцию магнитного поля в точке ***А*** (рис. 2.9), если ток в проводнике I=1 А, радиус полуокружности R=10 см.

Ответ: B=5,1 мкТл.

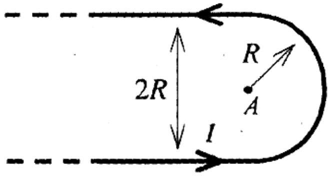

Рис. 2.9

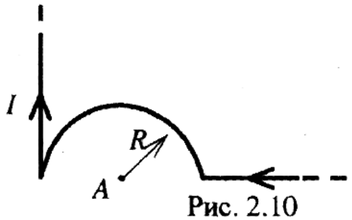

Рис. 2.10

5.(Ч.21.31в) Определить индукцию магнитного поля в точке A (рис. 2.10), если ток в проводнике I=1 А, радиус полуокружности R=10 см.

Ответ: B=2,1 мкТл.

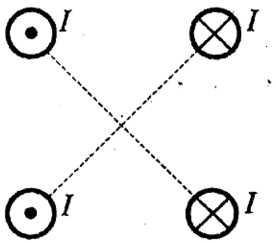

Рис. 2.11

6. Четыре проводника расположены параллельно друг другу, причем их сечения образуют квадрат со стороной 20 см (рис. 2.11). По каждому проводу протекает ток I=20 А в направлении, показанном на рис. 2.10. Найти величину и направление магнитной индукции в центре квадрата.

Ответ: B=80 мкТл .

7.(С.3.156) По круговому витку радиусом R=10 см течет ток I=1 А. Найти магнитную индукцию в центре витка и на его оси на расстоянии h=10 см от центра.

Ответ: B=6,3 мкТл, B=2,2 мкТл.

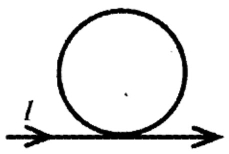

Рис. 2.12

8.(Ч.21.31д) Бесконечно длинный провод образует петлю круглой формы так, что плоскость петли параллельна проводу (рис. 2.12). По проводу течет ток 50 А. Найти величину магнитной индукции в центре петли, если известно, что радиус петли 10 см.

Ответ: B=410 мкТл.

9. Очень длинный прямой провод с током I=5 А изогнут в форме прямого угла. Найти магнитную индукцию поля в точке, которая отстоит от плоскости проводника на расстоянии l=35 см и находится на перпендикуляре к этой плоскости, проходящем через точку изгиба.

Ответ: B=2,0 мкТл.

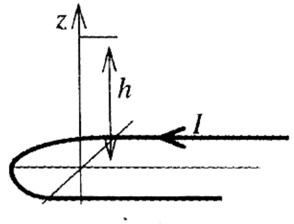

Рис. 2.13

10. Проводник, лежащий в горизонтальной плоскости, имеет форму полуокружности, концы которой плавно переходят в два параллельных полубесконечных прямолинейных проводника (рис. 2.13). Радиус полуокружности равен R, по проводнику течет ток I. Найти величины составляющих магнитной индукции $\vec{B}$, направленные вдоль оси z полуокружности и поперек нее в точке, отстоящей на расстоянии h от центра полуокружности. ***Ответ:***

$$B_z = \frac{\mu_0 IR}{2(h^2+R^2)}\left\{\frac{R}{2\sqrt{h^2+R^2}}+\frac{1}{\pi}\right\},\quad B_\perp = \frac{\mu_0 IhR}{2\pi(h^2+R^2)^{3/2}}.$$

11.(Ч.21.30) По тонкому проволочному кольцу течет ток. Не изменяя силы тока в проводнике, ему придали форму квадрата. Во сколько раз изменилась магнитная индукция в центре контура?

Ответ: В 1,2 раза.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1. Зная электростатическое поле $\vec{E}'$ в неподвижной относительно заряда системе отсчета K', с помощью нерелятивистского преобразования Лоренца $\vec{B}=\vec{B}'+\frac{1}{c^2}[\vec{v},\vec{E}']$, где $\vec{v}$ – скорость подвижной системы отсчета K' относительно неподвижной K,

$\vec{B}'$, $\vec{B}$ – магнитные поля соответственно в системах отсчета K' и K, найти вектор магнитной индукции движущегося заряда.

Ответ: $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 q[\vec{v}, \vec{E}]}{4\pi r^3}$.

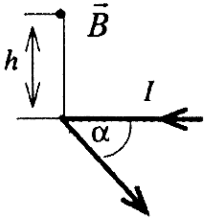

Рис. 2.14

2. Бесконечно длинный прямой провод согнут под углом α=60° (рис.2.14). По нему течет ток I=5А. Определить величину и направление магнитной индукции в точке, лежащей на перпендикуляре к плоскости провода, восстановленном в вершине угла, и отстоящей от угла сгиба провода на расстоянии h=5 см.

Ответ: B=10 мкТл.

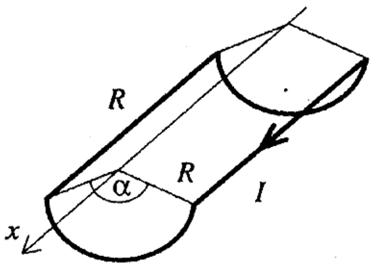

Рис. 2.15

3. Проводник образует замкнутый контур, состоящий из двух дуг, лежащих в параллельных плоскостях с центрами на одной оси x (рис. 2.15). Радиусы дуг равны R, из своих центров они видны под углом α. Концы дуг соединены отрезками длины R. По контуру течет ток I. Найти продольную и поперечную составляющие относительно оси x вектора магнитной индукции в центре одной из дуг.

Ответ: $B_x = \dfrac{\mu_0 \alpha I}{4\pi R}\left\{1 - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$, $B_\perp = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{2}R}\left\{\sin\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\alpha}{2\sqrt{2}}\right\}$.

4. К проводнику, имеющему форму окружности, присоединены два полубесконечных радиально-прямолинейных проводника, угол между которыми равен α (рис. 2.16). Из одного полубесконечного проводника в проводник, имеющий форму окружности, втекает ток I и вытекает в другой полубесконечный проводник. Найти величину магнитной индукции в центре проводника, имеющего форму окружности.

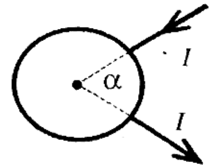

Рис. 2.16

Ответ: B=0.

5.(И. 3. 225) Ток I течет по длинному прямому проводнику, сечение которого имеет форму тонкого полукольца радиусом R (рис. 2.17). Найти индукцию магнитного поля в центре полукольца O.

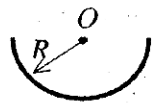

Рис. 2.17

Ответ: $B = \dfrac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$.

6. Найти величину вектора магнитной индукции в произвольной точке с координатами x, y, находящейся в первом квадранте плоскости xOy, если в этой плоскости лежит бесконечный прямолинейный провод, согнутый под прямым углом, по которому течет ток I. Вершина угла сгиба провода находится в начале координат, а его стороны направлены вдоль осей Ox, Oy.

Ответ: $B = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left\{\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{xy} + \dfrac{x+y}{xy}\right\}$.

7. По квадратной рамке из проволоки со стороной a протекает ток I. Считая, что одна из вершин рамки совпадает с началом координат, а две прилегающие к ней стороны направлены вдоль осей Ox, Oy, найти величину вектора магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ внутри этой рамки.

Ответ: $B=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi}\left\{\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{xy}+\dfrac{\sqrt{(a-x)^2+(a-y)^2}}{(a-x)(a-y)}+\right.$

$\left.+\dfrac{\sqrt{x^2+(a-y)^2}}{x(a-y)}+\dfrac{\sqrt{y^2+(a-x)^2}}{y(a-x)}\right\}.$

8. В плоскости xOy лежит бесконечный прямолинейный провод, согнутый под прямым углом так, что вершина этого угла находится в начале координат, а прилегающие стороны направлены вдоль осей Ox, Oy. По проводу течет ток I. Найти величину вектора магнитной индукции в точке с координатами x, y, расположенной в положительном квадранте трехмерного пространства.

Ответ:

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left\{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left[\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}\right]+\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}}\right\}.$$

9. Через проводящую бесконечно длинную прямую ленту шириной l течет ток I, который равномерно распределен по поверхности ленты. Определить модуль и направление магнитного поля в любой точке плоскости, перпендикулярной к проводнику и проходящей через его середину.

Ответ: $\dfrac{\mu_0 I}{\pi l}\operatorname{arctg}\left\{\dfrac{l}{2h}\right\}.$

10. Две полуокружности радиуса R=1м, центры которых лежат на расстоянии $2R$=2 м, а концы соединены прямыми проводами, образуют замкнутый контур (рис. 2.18). Полуокружности лежат вместе с проводами в одной

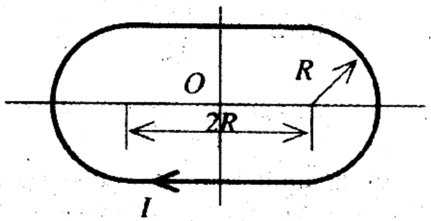

Рис. 2.18

плоскости. Найти величину магнитной индукции в центре O замкнутого контура, если ток в контуре равен I=1 А.

Ответ: $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}\left\{\sqrt{2}+\ln\dfrac{\operatorname{tg}(3\pi/8)}{\operatorname{tg}(\pi/4)}\right\}$=0,36 мкТл.

Занятие 3. Ток в магнитном поле.

Движение заряда в магнитном поле

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Сила, действующая на заряд, движущийся в электрическом и магнитном полях.

2. Закон Ампера.

3. Сила взаимодействия двух бесконечно длинных прямолинейных параллельных проводников с током.

4. Движение заряда в однородных магнитном и электрическом полях.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Сила Лоренца:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q[\vec{\upsilon}\vec{B}],$$

– сила, действующая на заряд q, движущийся со скоростью $\vec{\upsilon}$ в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ и электрическом поле с напряженностью $\vec{E}$. Модуль магнитной составляющей силы Лоренца равен

$$F=q|\vec{\upsilon}||\vec{B}|\sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $\vec{\upsilon}$ и $\vec{B}$.

2. Сила Ампера:

$$d\vec{F} = I[d\vec{l}\vec{B}]$$

– сила, действующая на элемент проводника $d\vec{l}$ с током I в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. Модуль этой силы (силы Ампера) равен

$$dF=IBdl\sin\alpha,$$

где α – угол между векторами $d\vec{l}$ и $\vec{B}$.

Сила взаимодействия на единицу длины двух прямолинейных бесконечно длинных параллельных проводов с токами I_1, I_2 находится по формуле

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1 I_2}{d},$$

где d – расстояние между ними.

3. Движение заряженной частицы в статических электрическом и магнитном полях

Динамика заряженной частицы в электрическом и магнитном поле описывается уравнениями

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \qquad \frac{d\mathcal{E}}{dt} = (\vec{\upsilon}\ \vec{F}), \tag{3.1}$$

где $\vec{F}=q(\vec{E}+[\vec{\upsilon}\ \vec{B}])$ – сила Лоренца,

$$\vec{p}=\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}, \qquad \mathcal{E}=\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}}$$

– релятивистский импульс и энергия заряженной частицы с массой покоя m_0 и зарядом q, $\vec{\upsilon}$ – скорость этой частицы.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Элементарный заряд	$q=1{,}60\cdot10^{-19}$ Кл.
Масса электрона	$m=9{,}11\cdot10^{-31}$ кг.
Магнитная постоянная	$\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м.
Плотность алюминия	$\rho=2{,}6\cdot10^{3}$ кг/м.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Дать определение силы Лоренца. Как она направлена, чему равна?

2. По какой траектории движется заряженная частица в однородном электростатическом поле?

3. По какой траектории движется заряженная частица в однородном магнитном поле, если ее вектор скорости направлен под углом α к вектору магнитной индукции?

4. Как определяется радиус кривизны траектории движения заряженной частицы в однородном магнитном поле?

5. Найти период движения заряженной частицы в однородном магнитном поле индукции B, если ее вектор скорости $\vec{v}$ направлен под углом α к вектору магнитной индукции.

6. Сформулировать закон Ампера. Показать, как направлены векторы, входящие в выражение для силы Ампера.

7. Как объяснить действие силы Ампера на проводник с током в магнитном поле, исходя из электронной теории, рассмотрев движение отдельного электрона в этом поле?

8. Чему равна сила взаимодействия на единицу длины двух прямолинейных бесконечно длинных параллельных проводов?

9. Две фиксированные точки A и B в области с однородным магнитным полем соединяют жестким проводником, лежащим в плоскости, перпендикулярной силовым линиям поля, и пропускают по нему ток заданной силы. Доказать, что результирующая сила, действующая на проводник, не зависит от его формы.

10. Как вычислить силу взаимодействия бесконечно длинного прямолинейного проводника с отрезком провода длиной l? Проводники параллельны друг другу, расстояние между ними равно d. По проводникам текут соответственно токи I_1, I_2.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Пример* 1.** Контур из провода, согнутый в виде равностороннего треугольника со сторонами a=2 м, по которому течет ток I_1 = 1А в направлении, указанном на рис. 3.1, лежит в одной плоскости с бесконечно длинным прямолинейным проводом. Ближайшая к бесконечно длинному проводу сторона

треугольника параллельна этому проводу, и расстояние между ними равно $b=\sqrt{3}$ м. Найти силу взаимодействия треугольного контура с бесконечно длинным проводом, если по последнему течет ток I_2=3 А.

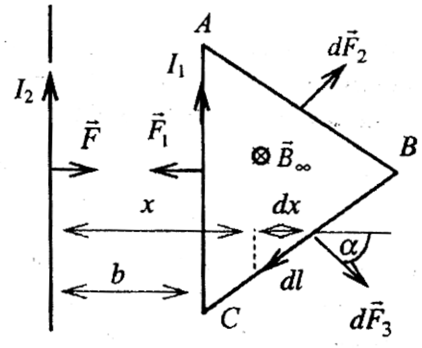

Рис. 3.1

Решение. Сила взаимодействия бесконечно длинного провода и ближайшей к нему стороны AC треугольника (рис. 3.1) равна

$$F_1 = \int_0^a I_1 B_\infty \sin\beta dl, \qquad (3.2)$$

где $B_\infty = \mu_0 I_2/(2\pi b)$ – магнитная индукция, создаваемая бесконечно длинным прямолинейным проводом на расстоянии b от него, β – угол между направлением этой индукции и направлением тока I_1. Так как β=90° и B_∞=const, то правая часть (3.2) легко вычисляется: $F_1=I_1 B_\infty a$. После подстановки B_∞ в формулу (3.2) получим

$$F_1 = \frac{\mu_0 a}{2\pi b} I_1 I_2 .$$

На элементы длиной dl сторон AB, BC, находящихся на одинаковом расстоянии x от бесконечно длинного провода, действуют силы $d\vec{F}_2$, $d\vec{F}_3$ (рис. 3.1). Величина этих сил равна

$$dF = IB_\infty(x)\sin\beta dl ,$$

где $B_\infty(x) = \dfrac{\mu_0 I_2}{2\pi x}$ – индукция в точке, где находится элемент dl, x – расстояние между элементом dl стороны AB или BC и бесконечно длинным проводом, β = 90°. Составляющие векторов $d\vec{F}_2$, $d\vec{F}_3$, направленные вдоль бесконечно длинного провода, равны по величине, но противоположны по направлению, компенсируя друг друга. Величина поперечных составляющих этих сил равна

$$dF_x = dF\cos\alpha = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x}\cos\alpha dl,$$

где α – угол между векторами $d\vec{F}_2$, $d\vec{F}_3$ и нормалью к бесконечно длинному проводу, $\alpha = 60°$. После суммирования поперечных составляющих найдем

$$F_x = 2\int dF\cos\alpha = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_b^{b+h}\frac{dl}{x}.$$

Из рис. 3.1 видно, что $dl = dx/\cos(90° - \alpha)$. Поэтому сила взаимодействия сторон AB и BC с бесконечно длинным проводом равна

$$F_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\sqrt{3}\pi}\int_b^{b+h}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\sqrt{3}\pi}\ln\frac{b+h}{b}, \qquad (3.3)$$

где $h = a\sin 60°$. Окончательно сила взаимодействия треугольного контура и бесконечно длинного провода такова:

$$F = F_1 - F_x = \frac{\mu_0}{2\pi}I_1 I_2\left(\frac{a}{b} - \frac{2}{\sqrt{3}}\ln\left(\frac{\sqrt{3}a}{2b} + 1\right)\right) = 0{,}21 \text{ мкН}.$$

***Пример* 2.** Релятивистская заряженная частица движется в однородном магнитном поле с индукцией B. Полная энергия частицы равна $\mathcal{E}$, заряд равен q. В начальный момент времени скорость частицы $\vec{\upsilon}$ направлена под углом α к направлению магнитного поля. Определить параметры траектории движения частицы.

Решение. Так как сила Лоренца

$$\vec{F} = q[\vec{\upsilon}\,\vec{B}]$$

всегда направлена перпендикулярно направлению движения заряженной частицы, то при движении этой частицы в магнитном поле работа не совершается. Это означает, что её полная энергия постоянна, $\mathcal{E}$=const. Этот вывод следует также из второй формулы (3.1), если учесть, что $\vec{\upsilon}\perp\vec{F}$. Релятивистский импульс частицы равен $\vec{p} = \vec{\upsilon}\,\mathcal{E}/c^2$ (заметим, что если в эту формулу подставить $\mathcal{E} = mc^2/\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}$, то получим более известное выражение для импульса $\vec{p} = m\vec{\upsilon}/\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}$, где m – масса покоя частицы). Поэтому для поперечных направлению магнитного поля составляющих импульса $\vec{p}_\perp$ и скорости $\vec{\upsilon}_\perp$ уравнение движения заряженной частицы (3.1) в магнитном поле имеет вид

$$\frac{d\vec{p}_\perp}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{c^2}\frac{d\vec{\upsilon}_\perp}{dt} = q[\vec{\upsilon}_\perp\,\vec{B}]. \qquad (3.4)$$

Так как $\mathcal{E}$=const, то кинетическая энергия, а значит и величина скорости частицы неизменны во время движения. Это означает, что как продольная, так и поперечная составляющие скорости частицы также постоянны по величине. При этом поперечная скорость изменяется, как это следует из (3.4), лишь по направлению. Составляющая ускорения, характеризующая изменение скорости по направлению, – это нормальная составляющая

$$a_n = \left|\frac{d\vec{\upsilon}_\perp}{dt}\right| = \upsilon_\perp^2/R, \qquad (3.5)$$

где R – мгновенный радиус окружности к траектории в точке, где находится частица, $\upsilon_\perp = |\vec{\upsilon}_\perp|$. Из (3.4) с учетом $\vec{\upsilon}_\perp\perp\vec{B}$ получим

$$\left|\frac{d\vec{\upsilon}_\perp}{dt}\right| = \frac{c^2 q}{\mathcal{E}}\upsilon_\perp B.$$

Подставляя (3.5) в последнее уравнение, найдем

$$\upsilon_\perp/R = c^2 qB/\mathcal{E}.$$

Очевидно, R=const, так как все остальные параметры, входящие в эту формулу, постоянны. Это означает, что релятивистская частица в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля, движется по окружности радиусом

$$R=\frac{\upsilon\sin\alpha}{qBc^2}\mathcal{E}, \qquad (3.6)$$

где α – угол между векторами $\vec{\upsilon}$ и $\vec{B}$. Кроме движения по окружности в поперечном направлении, частица перемещается с постоянной скоростью $\upsilon_\parallel=\upsilon\cos\alpha$ вдоль направления магнитного поля. Поэтому частица движется по винтовой линии. Найдем ее шаг. Для периода вращения частицы по окружности с учетом (3.6) имеем

$$T=\frac{2\pi R}{\upsilon_\perp}=\frac{2\pi\mathcal{E}}{qBc^2}.$$

Откуда шаг винтовой линии равен

$$L=T\upsilon\cos\alpha=\frac{2\pi\upsilon}{qBc^2}\mathcal{E}\cos\alpha.$$

***Пример* 3** [6]. Определить траекторию релятивистского движения электрона с зарядом e в однородном постоянном электрическом поле E.

Решение. Направление поля примем за ось x. Движение будет, очевидно, происходить в одной плоскости, которую выберем за плоскость xOy. Тогда уравнения движения для электрона примут вид

$$\frac{dp_x}{dt}=eE, \qquad \frac{dp_y}{dt}=0,$$

откуда

$$p_x=eEt, \quad p_y=p_0. \qquad (3.7)$$

Как видно из первой формулы (3.7), за начало отсчета времени выбран тот момент, когда p_x=0; p_0 есть импульс частицы в этот момент. Кинетическая энергия частицы (энергия без потенциальной энергии в поле) равна $\mathcal{E}_{\text{кин}}=c\sqrt{m^2c^2+p^2}$, m – масса покоя частицы. Подставляя сюда (3.7), находим в нашем случае

$$\mathcal{E}_{\text{кин}}=\sqrt{m^2c^4+c^2p_0^2+(ceEt)^2}=\sqrt{\mathcal{E}_0^2+(ceEt)^2}, \qquad (3.8)$$

где $\mathcal{E}_0$ – энергия при t=0.

Скорость релятивистской частицы $\upsilon=\frac{pc^2}{\mathcal{E}_{\text{кин}}}$. Для скорости υ_x следовательно имеем

$$\frac{dx}{dt}=\frac{p_xc^2}{\mathcal{E}_{\text{кин}}}=\frac{eEc^2t}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2+(ceEt)^2}}.$$

Интегрируя, находим

$$x=\frac{1}{eE}\sqrt{\mathcal{E}_0^2+(ceEt)^2} \qquad (3.9)$$

(постоянную интегрирования полагаем равной нулю).

Для определения y имеем

$$\frac{dy}{dt}=\frac{p_yc^2}{\mathcal{E}_{\text{кин}}}=\frac{p_0c^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2+(ceEt)^2}},$$

откуда

$$y=\frac{p_0c}{eE}\operatorname{Arsh}\frac{ceEt}{\mathcal{E}_0}. \qquad (3.10)$$

Уравнение траектории находим, выражая из формулы (3.10) время t через y и подставляя в (3.9). Это дает

$$x=\frac{\mathcal{E}_0}{eE}\operatorname{ch}\frac{eEy}{p_0c}.$$

Таким образом, электрон движется в однородном электрическом поле по цепной линии.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1. (В.11.55) Между полюсами электромагнита создается однородное магнитное поле с индукцией B=0,1 Тл. По проводу длиной l=70 см, помещенному перпендикулярно к направлению магнитного поля, течет ток I=70 А. Найти силу F, действующую на провод.

Ответ: F=4,9 Н.

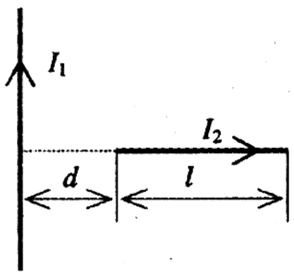

Рис. 3.2

2. Отрезок проводника длиною l=1 м с током I_2=2А расположен перпендикулярно бесконечно длинному прямому проводу (рис. 3.2) с током I_1=1 А на расстоянии d=1 м. Определить силу, действующую на этот отрезок проводника со стороны бесконечного провода.

Ответ: $F=2{,}8\cdot10^{-7}$ Н.

3. (Ч.22.3) Квадратная проволочная рамка расположена в одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводом так, что две ее стороны параллельны проводу. По рамке и проводу текут одинаковые токи I=1 кА. Определить силу F, действующую на рамку со стороны бесконечно длинного провода, если ближайшая к проводу сторона рамки находится на расстоянии, равном ее длине.

Ответ: F=0,1 Н.

4. (Ч.22.4) Провод в виде тонкого полукольца радиусом R=10 см находится в однородном магнитном поле с индукцией B=50 мТл. По проводу течет ток I=10 А. Найти силу F, действующую на провод, если плоскость полукольца перпендикулярна линиям индукции, а подводящие провода находятся вне поля.

Ответ: F=0,1 Н.

5. Сила натяжения, которую выдерживает проводник, согнутый в виде кольца радиусом R=10 см, равна F=1 Н. Найти предельно допустимый ток, способный разорвать проводник, если индукция магнитного поля, перпендикулярная плоскости кольца, равна B=1 Тл.

Ответ: I=10 А.

6. (В.11.59) Прямолинейный алюминиевый провод площадью поперечного сечения S=1 мм^2 лежит на горизонтальной опоре, выполненной из диэлектрика. Провод перпендикулярен магнитному меридиану, и по нему течет ток (с запада на восток) I=1,6 А. Во сколько раз увеличится сила нормальной реакции опоры, приходящейся на единицу длины провода, если ток выключить? Горизонтальная составляющая напряженности земного магнитного поля H=15 А/м.

Ответ: $\dfrac{N_2}{N_1}=1{,}001$.

7. (В.11.69) Электрон, ускоренный разностью потенциалов U=1 кВ, влетает в однородное магнитное поле, направление которого перпендикулярно к направлению его движения. Индукция магнитного поля B=1,19 мТл. Найти радиус R окружности, по которой движется электрон, период обращения T и момент импульса L электрона относительно центра окружности.

Ответ: R=9 см, T=30 нс, $L=1{,}5\cdot10^{-24}$ кг·м^2/с.

8. Электрон движется в магнитном поле с индукцией B=0,03 Тл по окружности радиусом R=10 см. Считая движение электрона релятивистским, определить его импульс и скорость.

Ответ: $p=4{,}8\cdot10^{-22}$ кгм/с, $\upsilon=2{,}6\cdot10^{8}$ м/с.

9. (В.11.83) Пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов U=300 В, влетает в однородное магнитное поле, направленное от чертежа к нам (рис. 3.3). Ширина области, в которой создано поле, b=2,5 см. В отсутствие магнитного поля пучок электронов дает светящееся пятно в точке A флюоресцирующего экрана, расположенного на расстоянии l=5 см от края полюсов магнита. При включении магнитного поля пятно смещается в точку B. Найти смещение $x=AB$ пучка электронов, если известно, что индукция магнитного поля B=1,46 мТл.

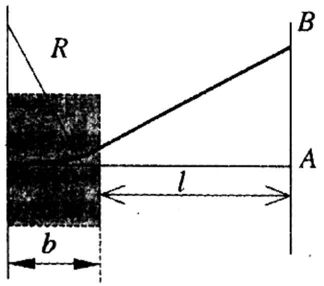

Рис. 3.3

Ответ: R=4 см и x=4,9 см.

10. (Ч.23.38) Заряженная частица прошла ускоряющую разность потенциалов U=100 В и влетела в скрещенные под прямым углом электрическое (E=10 кВ/м) и магнитное (B=0,1 Тл) поля. Найти отношение q/m заряда частицы к ее массе, если, двигаясь перпендикулярно обоим полям, частица не испытывает отклонений от прямолинейной траектории.

Ответ: $q/m=50\cdot10^{6}$ Кл/кг.

11. (В.11.86) Электрон, ускоренный разностью потенциалов U=6 кВ, влетает в однородное магнитное поле под углом $\alpha=30°$ к направлению поля и движется по винтовой траектории. Индукция магнитного поля B=13 мТл. Найти радиус R и шаг h винтовой траектории электрона.

Ответ: R=1 см и h=11 см.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ Б

1.(Ч.22.6) Контур из провода, согнутого в виде прямоугольника со сторонами a=40 и b=20 см, по которому проходит ток I_1=3 А, расположен вблизи прямого бесконечно длинного провода, параллельного двум его меньшим сторонам. Проводник и контур расположены в одной плоскости. По прямому проводу проходит ток I_2=10 А; расстояние от него до ближайшей стороны контура c=5 см. Определить силы, действующие со стороны длинного провода на каждую сторону контура.

Ответ: F_1=24 мкН; F_2=2,7 мкН; $F_3=F_4$=13 мкН.

2. (С.3.151) По прямому горизонтально расположенному проводу протекает ток, равный I_1=100 А. Под ним находится второй, параллельный ему алюминиевый провод, по которому пропускают ток I_2=10 А в том же направлении. Расстояние между проводами d=1 см. Какова должна быть площадь поперечного сечения S второго провода, чтобы он находился в состоянии равновесия незакрепленным, если плотность алюминия $\rho=2{,}6\cdot10^{3}$ кг/м^3. Какое это будет равновесие?

Ответ: S=0,79 мм^2, устойчивое.

3.(Ч.22.5) По тонкому проводу в виде кольца радиусом R=20 см течет ток с силой I=100 А. Перпендикулярно плоскости кольца возбуждено однородное магнитное поле с индукцией B=20 мТл. Найти силу натяжения F, возникающую в кольце.

Ответ: F=0,4 Н.

4.(Ч.22.9) По трем параллельным прямым проводам, находящимся на одинаковом расстоянии a=10 см друг от друга, текут одинаковые токи $I_1=I_2$=100 А. В двух проводах направления токов совпадают. Вычислить силы, действующие на единицу длины каждого провода.

Ответ: $F_1=F_2$=20 мН; F_3=35 мН.

5. В вертикальном однородном магнитном поле на двух тонких нитях подвешен горизонтально проводник массой

m=0,16 кг и длиной l=80 см. Концы проводника при помощи гибких проводов, находящихся вне поля, подсоединены к источнику тока. Найдите угол α, на который отклоняются от вертикали нити подвеса, если по проводнику течет ток I=2 А, а индукция магнитного поля B=1 Тл.

Ответ: $\alpha = 46°$.

6. (Ч.23.25) Электрон влетает в однородное магнитное поле с напряженностью 16 кА/м со скоростью $8\cdot10^6$ м/с. Направление скорости составляет угол 60° с направлением магнитного поля. Определить радиус R и шаг h винтовой линии, по которой будет двигаться электрон в магнитном поле.

Ответ: R=2,0 мм; h=7,1 мм.

7. (Ч.23.36) Перпендикулярно магнитному полю с индукцией 0,1 Тл возбуждено электрическое поле, напряженность которого равна 100 кВ/м. Перпендикулярно обоим полям движется, не отклоняясь от прямолинейной траектории, заряженная частица. Вычислить скорость частицы.

Ответ: $\upsilon=10^6$ м/с.

8. (Ч.23.35) Релятивистская кинетическая энергия электрона, движущегося в однородном магнитном поле с магнитной индукцией B=0,02 Тл по окружности, равна K=1,5 Мэв. Определить период T вращения электрона.

Ответ: T=7,0 нс.

9. (И.3.382) Электрон, ускоренный разностью потенциалов U=1кВ, движется в однородном магнитном поле под углом α=30° к вектору $\vec{B}$, модуль которого B =29 мТл. Найти шаг h винтовой траектории электрона.

Ответ: h=2,0 см.

10. (И.3.379) Заряженная частица движется по окружности радиусом r=0,1м в однородном магнитном поле с индукцией B=10 мТл. Найти её скорость и период обращения, если частица

является: а) нерелятивистским протоном; б) релятивистским электроном.

Ответ: а) $\upsilon_p=10^5$ м/с, T_p=6,5 мкс; б) $\upsilon_e=0{,}51c$, T_e=4,2 нс.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1. По двум параллельным прямым проводникам длиной l каждый, находящихся на расстоянии a, текут токи I_1, I_2. Вычислить силу взаимодействия проводов, не предполагая $a \ll l$.

Ответ: $F = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a}\left(\sqrt{l^2+a^2}-a\right)$.

2. По двум одинаковым квадратным плоским контурам со стороной l, которые лежат в параллельных плоскостях, текут одинаковые токи I. Пренебрегая вкладом от взаимодействия скрещенных сторон, определить силу F взаимодействия контуров, если расстояние a между плоскостями контуров сравнимо по сравнению с размером контура.

Ответ:

$$F = 2\frac{\mu_0 I^2}{\pi a}\left\{\left(\sqrt{l^2+a^2}-a\right)-\frac{a^2}{\sqrt{l^2+a^2}}\left(\sqrt{1+\frac{l^2}{l^2+a^2}}-1\right)\right\}.$$

3. Проводящее кольцо поместили в однородное магнитное поле, перпендикулярное его плоскости. По кольцу циркулирует ток I, причем его направление составляет правый винт с направлением магнитного поля. Если проволока кольца выдерживает на разрыв нагрузку F, то при какой индукции магнитного поля кольцо разорвется? Радиус кольца R. Действием на кольцо магнитного поля, создаваемого током I, а также силой тяжести пренебречь.

Ответ: $B > \dfrac{F}{IR}$.

4.(И.3.258) По бесконечно длинному прямому проводу и тонкой параллельной этому проводу ленте (рис. 3.4) шириной b,

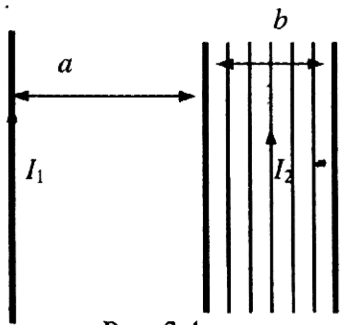

Рис. 3.4

которая лежит в одной плоскости с проводом, текут токи I_1, I_2. Расстояние между проводниками a. Найти силу взаимодействия между ними на единицу длины.

Ответ: $F=\dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi b}\ln(1+b/a)$.

5. Каким должно быть отношение длины l параллельных прямых проводов, по которым текут токи I, к расстоянию a между ними, чтобы силу взаимодействия между ними можно было рассчитать, используя формулу для силы взаимодействия двух параллельных бесконечно длинных проводников с такими же токами I? Ошибка при таком допущении не должна превышать 1%.

(Указание: допустимая ошибка равна $\delta=(F_2-F_1)/F_2$, где F_1 - сила взаимодействия параллельных отрезков прямых проводов конечной длины l и F_2 - сила, действующая на длину l прямолинейного бесконечно длинного провода с током I в поле параллельного ему такого же провода с тем же током.)

Ответ: $l/a=100$.

6.(И.3.259) Система состоит из двух параллельных друг другу плоскостей с токами, которые создают между плоскостями однородное магнитное поле с индукцией B. Вне этой области магнитное поле отсутствует. Найти магнитную силу, действующую на единицу поверхности каждой плоскости.

Ответ: $F=B^2/2\mu_0$.

7. (И.3.263) Какое давление испытывает боковая поверхность длинного прямого соленоида, содержащего n витков на единицу длины, когда по нему течет ток I?

Ответ: $p=\dfrac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2$.

8. Используя обратное нерелятивистское преобразование Лоренца $\vec{E}'=\vec{E}+[\vec{v},\vec{B}]$, где $\vec{v}$ – скорость подвижной системы отсчета K' относительно неподвижной K, $\vec{E}'$, E, $\vec{B}'$, $\vec{B}$ – электрические и магнитные поля соответственно в системах отсчета K' и K, получить силу Лоренца, которая действует на движущийся относительно системы отсчета K заряд в магнитном поле $\vec{B}$.

9. (И.3.375) Электрон начинает двигаться в однородном электрическом поле E=10 кВ/см. Через сколько времени после начала движения кинетическая энергия электрона станет равной его энергии покоя.

Ответ: t=3,0 нс.

10. (И.3.380) Релятивистская частица с зарядом q и массой m_0 движется по окружности радиуса r в однородном магнитном поле с индукцией B. Найти величину импульса p частицы и ее кинетическую энергию T.

Ответ: $p=qrB$, $T=m_0c^2(\sqrt{1+(qrB/m_0c)^2}-1)$.

11. Найти скорость заряженной частицы при ее движении во взаимно перпендикулярных однородных электрическом и магнитном полях соответственно с напряженностью E и индукцией B, если начальная скорость частицы υ_0 перпендикулярна векторам $\vec{E}$ и $\vec{B}$ (рис. 3.5).

Ответ:
$\upsilon_x=(\upsilon_0-E/B)\cos\omega t+E/B$
$\upsilon_y=\upsilon_0\sin\omega t$, где $\omega=qB/m$.

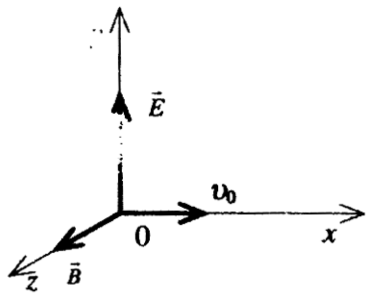

Рис. 3.5

12. (И.3.392) Частица с удельным зарядом q/m движется в области, где созданы однородные взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля с напряженностью $\vec{E}$ и индукцией $\vec{B}$ (рис.3.5). В момент t=0 частица находилась в начале координат и имела нулевую скорость. Найти для нерелятивистского случая закон движения частицы $x(t)$, $y(t)$, определив длину участка траектории между ближайшими точками, в которых скорость частицы обращается в нуль, нарисовать траекторию между этими точками.

Ответ: Траекторией является циклоида $x=R(\omega t-\sin\omega t)$, $y=R(1-\cos\omega t)$, $R=mE/qB^2$, $\omega=qB/m$.

Занятие 4. Контур с током в магнитном поле

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Магнитный момент контура с током.
2. Магнитный момент вращающегося заряженного тела.
3. Механический момент, действующий на контур с током в магнитном поле.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Магнитный момент контура с током

Магнитный момент контура с током – это вектор

$$\vec{p}_m = I\vec{n}S,$$

где S – площадь поверхности контура, I – ток в контуре, $\vec{n}$ – нормаль к этой поверхности; направление вектора магнитного момента образует правовинтовую систему с направлением тока.

2. Механический момент, действующий на контур с током в магнитном поле

Механический момент, действующий на замкнутый контур с током в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, определяется выражением

$$\vec{M} = [\vec{p}_m\vec{B}],$$

где $\vec{p}_m$ – вектор магнитного момента контура с током. Величина механического момента равна

$$M = p_m B\sin\alpha,$$

где α – угол между нормалью $\vec{n}$ к поверхности контура и вектором $\vec{B}$.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Элементарный заряд	e=1,60·10^{-19} Кл.
Масса электрона	m=9,11·10^{-31}кг.
Магнитная постоянная	μ_0=4π·10^{-7} Гн/м.
Плотность алюминия	ρ=2,6·10^3 кг/м.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Чему равен магнитный момент контура с током? Как он направлен?

2. Как определить направление нормали к поверхности?

3. Как находится магнитный момент равномерно заряженного твердого тела, имеющего ось симметрии, вокруг которой оно вращается с постоянной угловой скоростью?

4. При какой ориентации контура с током в магнитном поле действуют силы, которые лишь растягивают этот контур? Устойчиво ли это положение?

5. Чему равен механический момент, действующий на замкнутый контур с током в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$? Как он направлен?

6. В каких положениях рамки с током в магнитном поле относительно вектора магнитной индукции механический момент, действующий на рамку с током, максимален и минимален?

7. Рамка, величина магнитного момента которой равна p_m, подвешена на упругой нити с постоянной кручения C. Записать условие равновесия этой рамки в однородном магнитном поле с индукцией B.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Диск радиусом R=1 м вращается с угловой скоростью ω=10^2 с$^{-1}$ вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска (рис.4.1). Заряд диска q=10^{-3} Кл равномерно распределен по его объему. Найти магнитный момент диска.

Решение. Разобьем диск на кольцевые слои шириной dr (рис.4.1). Все точки слоя находятся на одинаковом расстоянии от оси диска, равном r. Если $\rho=\dfrac{q}{\pi R^2 h}$ – объемная плотность заряда, h – толщина диска, то величина заряда, заключенного в кольцевом слое объема $dV=2\pi hrdr$, равна

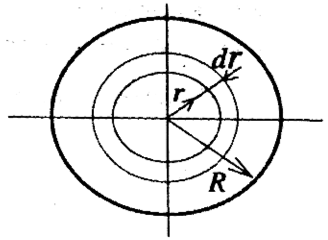

Рис. 4.1

$$dq=\rho dV=2\frac{q}{R^2}rdr.$$

Ток этого заряда при вращении цилиндра равен

$$dI=\frac{dq}{T}=\frac{\omega}{2\pi}dq=\frac{\omega q}{\pi R^2}rdr, \qquad (4.1)$$

где T – период вращения. Площадь, охватываемая кольцевым слоем, $S=\pi r^2$, поэтому магнитный момент рассматриваемого кольцевого слоя с током (4.1) таков:

$$dp_m=SdI=\frac{\omega q}{R^2}r^3dr.$$

Полный магнитный момент диска равен

$$p_m=\frac{\omega q}{R^2}\int_0^R r^3dr=\frac{1}{4}\omega qR^2=25\ \text{мКл·м}^2.$$

Пример 2. Рамка с площадью поперечного сечения S=10^{-3} м^2, содержащая N=10^3 витков тонкого провода, подвешена на упругой нити, постоянная кручения C которой равна 10 мкН·м/град. Плоскость рамки параллельна направлению магнитного поля с индукцией B=0,45·10^{-3} Тл. Определить, на какой угол повернется рамка после того, как через ее витки пропустить ток $I=\sqrt{2}$ А. (**Примечание.** Постоянная кручения упругой нити при достаточно малой деформации, возникающей в результате ее кручения, равна отношению величины момента силы, действующего на нить, к величине угла поворота элемента нити в плоскости приложения момента силы: $C=M/\alpha$).

Решение. На рис. 4.2 изображен вектор $\vec{p}_{m0}$ магнитного момента рамки в момент времени сразу после включения тока, когда рамка еще не успела повернуться. Так как вектор магнитного момента перпендикулярен плоскости рамки, то угол между вектором $\vec{p}_{m0}$ и $\vec{B}$ равен 90°. При протекании тока через витки рамки под действием механического момента $\vec{M}=[\vec{p}_m\vec{B}]$, где $\vec{p}_m$ – магнитный момент рамки с током, она поворачивается в магнитном поле так, что угол между векторами $\vec{p}_m$ и $\vec{B}$ уменьшается. Повороту рамки противодействует момент силы упругости, величина которого $M_{упр}=C\alpha$, возникающий в нити при повороте рамки на угол α. Как только моменты сил становятся равными $M_{упр}=M$, рамка устанавливается в положение равновесия. Угол между вектором магнитного момента $\vec{p}_m$ и вектором магнитной индукции $\vec{B}$ в этом положении рамки обозначим β. Из рис. 4.2 видно, что связь между углом α, на который поворачивается рамка, и углом β такова:

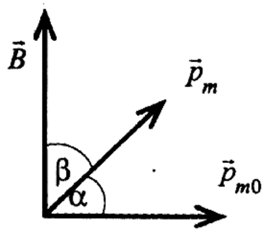

Рис. 4.2

$$\alpha=\frac{\pi}{2}-\beta. \qquad (4.2)$$

Условие равновесия момента силы упругости и механического момента, действующего на рамку с током в магнитном поле, с учетом (4.2) имеет вид

$$M=C\alpha=p_m B\sin\beta=p_m B\cos\alpha.$$

Подставив в это выражение $p_m=ISN$, получим

$$\frac{C}{INSB}\alpha=\cos\alpha.$$

Вычислив коэффициент при α, последнее уравнение запишем в виде

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2}\cdot 45^\circ}=\cos\alpha.$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться, что $\alpha=45°$.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1. Многовитковый плоский контур содержит 1000 витков тонкого провода. Контур имеет квадратное сечение со стороной, равной 10 см. Найти магнитный момент контура p_m, если по нему течет ток, равный 1 А.

Ответ: $p_m=10$ А·м^2.

2. (Ч.22.18) Электрон в атоме водорода движется вокруг ядра по круговой орбите некоторого радиуса. Найти отношение магнитного момента p_m эквивалентного кругового тока к моменту импульса L орбитального движения электрона. Указать направления векторов магнитного момента $\vec{p}_m$ и момента импульса $\vec{L}$.

Ответ: $\frac{p_m}{L}=-87{,}9\cdot 10^9$ Кл/кг.

3. По тонкому стержню длиной $l=1$ м равномерно распределен заряд $q=0{,}24$ мКл. Стержень приведен во вращение с постоянной угловой скоростью $\omega=100$ рад/с относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Определить магнитный момент p_m, обусловленный вращением заряженного стержня.

Ответ: $p_m=1{,}0$ мА·м^2.

4. (В.11.58) Из проволоки длиной $l=20$ см сделаны квадратный и круговой контуры. Найти вращающие моменты сил M_1 и

M_2, действующие на каждый контур, помещенный в однородное магнитное поле с индукцией B=0,1 Тл. По контурам течет ток I=2 А. Плоскость каждого контура составляет угол α=45° с направлением поля.

Ответ: $M_1=3{,}5\cdot10^{-4}$ Н·м; $M_2=4{,}5\cdot10^{-4}$ Н·м.

5. (В.11.61) На расстоянии a=20 см от длинного прямолинейного горизонтального провода на длинной упругой нити висит короткая магнитная стрелка, магнитный момент которой p_m=0,01 А·м^2. Ось вращения стрелки, совпадающая с нитью, перпендикулярна проводу и лежит вместе со стрелкой в плоскости, проходящей через провод и нить. На какой угол φ повернется стрелка, если по проводу пустить ток I=30 А? Постоянная кручения нити $C=2{,}5\cdot10^{-9}$ Н·м/град (см. примечание к примеру 2 в разделе «Примеры решения задач»). Система экранирована от магнитного поля Земли.

Ответ: φ=60°.

6. Квадратная рамка с площадью поверхности $S=10^{-4}$ м^2 содержит N=400 витков тонкого провода. Рамка подвешена в магнитном поле на упругих нитях, проходящих через середины ее противоположных сторон. Плоскость рамки параллельна линиям индукции, величина которой B=30 мТл. Постоянная кручения C нитей равна 10 мкН·м/град (см. примечание к примеру 2 в разделе «Примеры решения задач»). Определить, на какой угол повернется рамка вокруг нити, если через нее пропустить ток I=1 А?

Ответ: φ=60°.

7. Квадратная рамка со стороной длиной a=1 см, содержащая N=200 витков тонкого провода, подвешена в магнитном поле с индукцией B=30 мТл на упругих нитях, проходящих через середины ее противоположных сторон. Постоянная кручения C нитей равна 10 мкН·м/град (см. примечание к примеру 2 в разделе «Примеры решения задач»). Ось вращения рамки совпадает с нитью. Определить, на какой угол повернется рамка, если через нее пропустить ток I=1 А? Магнитный момент, возникающий у

рамки после включения тока, направлен против индукции внешнего магнитного поля.

Ответ: φ=30°.

8. (В.11.60) Катушка гальванометра, состоящая из N=400 витков тонкой проволоки, намотанной на прямоугольный каркас длиной l=3 см и шириной b=2 см, подвешена на нити в однородном магнитном поле с индукцией B=0,1 Тл. Ось вращения катушки проходит через ее центр и совпадает с нитью. По катушке течет ток I=0,1 мкА. Найти вращающийся момент M, действующий на катушку гальванометра, если плоскость катушки: а) параллельна направлению магнитного поля;

б) составляет угол α=60° с направлением магнитного поля.

Ответ: а) $M=2{,}4\cdot10^{-9}$ Н·м; б) $M=1{,}2\cdot10^{-9}$ Н·м.

9. Катушка гальванометра, состоящего из N=1000 витков проволоки, подвешена на упругой длинной нити в магнитном поле напряженностью H=100 А/м так, что ее плоскость параллельна направлению магнитного поля. Ось вращения катушки проходит через ее центр и совпадает с нитью. Длина рамки катушки a=2 см и ширина b=1 см. Какой ток I течет по обмотке катушки, если катушка повернулась на угол φ=0,5°? Постоянная кручения материала нити $C=1{,}0\cdot10^{-8}$ Н·м/град (см. примечание к примеру 2 в разделе «Примеры решения задач»).

Ответ: $I=2{,}0\cdot10^{-4}$ А.

10. (В.11.66) Однородный медный диск A радиусом R=5 см помещен в магнитное поле с индукцией B=0,2 Тл так, что плоскость диска перпендикулярна к направлению магнитного поля (рис. 4.3). Ток I=5 А проходит по радиусу диска ab (a и b – скользящие контакты). Найти вращающий момент, действующий на диск, и мощность такого двигателя.

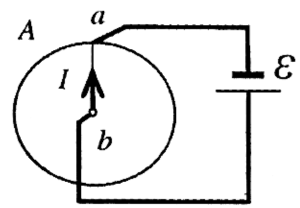

Рис. 4.3

Ответ: M=13 $\cdot 10^{-4}$ Н·м, P=24 мВт.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ Б

1. (Ч.22.28) Многовитковый круговой контур с площадью поперечного сечения S=150 см^2, содержащий N=200 витков провода, по которому течет ток I=4 А, помещен в однородное магнитное поле напряженностью H=8 кА/м. Определить магнитный момент контура и вращающий момент, действующий на него со стороны поля, если ось контура составляет угол α=60° с линиями поля.

Ответ: p_m=12 А·м^2; M=0,10 Н·м.

2. Тонкое плоское кольцо с внутренним R_1=0,2 м и внешним R_2=0,3 м радиусами заряжено равномерно. Заряд кольца q=0,6 мкКл. Вычислить магнитный момент кольца при его вращении с частотой $\nu = 10^2$ с$^{-1}$ вокруг оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр.

Ответ: p_m=1,2·10^{-5} А·м.

3. (М.4.42) Электрон, обладающий скоростью υ=10^6 м/с, движется в однородном и постоянном магнитном поле с напряженностью H=3,5·10^{-7} А/м перпендикулярно линиям поля. Найти величину магнитного момента эквивалентного тока.

Ответ: p_m=1,0 мкА·м^2.

4. (Ч.22.27) Рамка гальванометра длиной a=4 см и шириной b=1,5 см, содержащая N=200 витков тонкой проволоки, находится в магнитном поле с индукцией B=0,1 Тл. Плоскость рамки параллельна линиям индукции. Какой вращающий момент действует на рамку, когда по виткам течет ток I=1 мА? Каков магнитный момент рамки при этом токе?

Ответ: M=12 мкН·м; p_m=0,12 мА·м^2.

5. Квадратная рамка со стороной длиной a=2 см, содержащая N=100 витков тонкого провода, подвешена в магнитном поле с индукцией B=30 мТл на упругой нити, постоянная кручения

C которой равна 10 мкН·м/град (см. примечание к примеру 2 в разделе «Примеры решения задач»). Ось вращения рамки проходит через середины ее противоположных сторон и совпадает с нитью. Нормаль к плоскости рамки перпендикулярна направлению индукции внешнего магнитного поля. Определить, на какой угол повернется рамка, если через нее пропустить ток 1 А?

Ответ: φ=60°.

6. Квадратная рамка со стороной длиной a=1 см, содержащая N=450 витков тонкого провода, подвешена в магнитном поле с индукцией B=0,1 Тл на упругой нити, постоянная кручения C которой равна 10^{-4} Н·м/град (см. примечание к примеру 2 в разделе «Примеры решения задач»). Ось вращения рамки проходит через середины ее противоположных сторон и совпадает с нитью. Определить, на какой угол повернется рамка, если через нее пропустить ток $I=\sqrt{2}$ А? Магнитный момент, возникающий у рамки после включения тока, направлен против индукции внешнего магнитного поля.

Ответ: φ=45°.

7. Рамка с током находится между полюсами магнитов, создающих магнитное поле с индукцией B=0,1 Тл. Площадь рамки S=10 мм^2. Перпендикулярно плоскости рамки к ее оси припаяна стрелка. В отсутствие поля угол между направлением стрелки и вектором индукции магнитного поля равен $\alpha = 150°$. После пропускания максимально допустимого тока I_m=1 А этот угол уменьшается до $30°$. Постоянная кручения спиральной пружины, противодействующей вращению стрелки, равна C=10 мкН·м/град. Рассчитать число витков рамки амперметра.

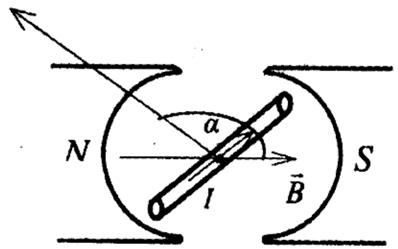

Рис. 4.4.

Ответ: N=2,4·10^3.

8. Однородный медный диск A массой $m=1$ кг помещен в магнитное поле с индукцией $B = 0{,}2$ Тл так, что плоскость диска перпендикулярна к направлению магнитного поля (см. рис. 4.3). Ток $I=5$ А проходит по радиусу диска ab (a и b – скользящие контакты). Найти угловое ускорение ε, с которым вращается диск.

Ответ: $\varepsilon=1{,}0$ с$^{-2}$.

9. (В.11.67) Однородный медный диск A массой $m=0{,}35$ кг помещен в магнитное поле с индукцией $B=24$ мТл так, что плоскость диска перпендикулярна к направлению магнитного поля (см. рис. 4.3). При замыкании цепи aba диск начинает вращаться и за время $t=30$ с после начала вращения достигает частоты вращения $\nu=5$ с$^{-1}$. Найти ток I в цепи.

Ответ: $I=15$ А.

10. (И.3.242) Индукция магнитного поля внутри тороида прямоугольного сечения убывает с увеличением расстояния r от его центральной оси: $B=\mu_0 NI/2\pi r$, где NI – число ампер-витков. Найти магнитный поток Φ внутри тороида через плоскость, перпендикулярную его оси, если ток в обмотке $I=1{,}0$ А, полное число витков $N=1000$, отношение внешнего диаметра к внутреннему $\delta=2$ и высота $h=5{,}0$ см.

Ответ: $\Phi=6{,}9$ мкВб.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1. По двум тонким коаксиальным цилиндрам, внутренний и внешний радиусы которых соответственно равны R_1, R_2, текут одинаковые токи I в противоположных направлениях. Найти поток вектора магнитной индукции внутри коаксиального цилиндра, приходящийся на единицу длины Φ/l, который пронизывает его продольное сечение, проходящее через ось цилиндров. (Указание: индукция магнитного поля между цилиндрами равна $B=\mu_0 I/(2\pi r)$, r – расстояние до оси цилиндров.)

Ответ: $\Phi/l=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(R_2/R_1)$.

2. (Ч.24.10) Квадратная рамка лежит в одной плоскости с бесконечно длинным прямым проводом. Определить, во сколько раз отличаются магнитные потоки, пронизывающие квадратную рамку при двух ее положениях относительно прямого проводника с током: в первом положении до ближайшей стороны рамки к проводнику расстояние равно a, во втором – $5a$.

Ответ: В 3, 8 раза.

3. (И.3.246) Тонкое круглое плоское кольцо с радиусами R_1, R_2 заряжено по поверхности равномерно. Заряд кольца q. Вычислите магнитный момент кольца при вращении его с частотой ω вокруг оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр.

Ответ: $p_m=\dfrac{1}{4}\omega q\,(R_2^2+R_1^2)$.

4. (И.3.248) По объему однородного шара массой m и радиусом R равномерно распределен заряд q. Шар приводится во вращение вокруг оси, проходящей через центр, с угловой скоростью ω. Найти возникающие в результате вращения момент импульса L и магнитный момент p_m, а также отношение p_m/L.

Ответ: $L=\dfrac{2}{5}mR^2\omega$, $p_m=\dfrac{1}{5}qR^2\omega$, $p_m/L=q/2m$.

5. Небольшая магнитная стрелка совершает в магнитном поле Земли малые колебания с периодом T_3. При помещении ее в магнитное поле бесконечно длинного прямолинейного провода с током на расстоянии a период малых колебаний становится равным T. Определить ток провода.

Ответ: $I=\dfrac{2\pi}{\mu_0}\left(\dfrac{T_3}{T}\right)aB$.

6. По квадратной рамке из тонкой проволоки массой $m=2$ г пропущен ток $I=6$ А. Рамка свободно подвешена за середину одной из сторон на неупругой нити. Определить период T малых колебаний такой рамки в однородном магнитном поле с индукцией B=2 мТл. Затуханием колебаний пренебречь.

Ответ: T=1 с.

7. Рамка гальванометра, содержащая N=100 витков тонкого провода, с площадью S=2 см^2 подвешена в магнитном поле с индукцией B=0,1 мТл на упругой нити. Нормаль к плоскости рамки перпендикулярна направлению индукции внешнего магнитного поля. Постоянная кручения нити равна $C=10^{-6}$ Н·м/рад (см. примечание к примеру 2 в разделе «Примеры решения задач»). Определить, на какой угол повернется рамка, если через нее пропустить ток 1 А?

Ответ: φ=59°.

8. Диск радиусом R=1 м вращается с угловой скоростью $\omega=10^3$ рад/с вокруг оси, перпендикулярной плоскости диска. Диск равномерно заряжен с поверхностной плотностью заряда $\sigma=10^{-2}$ Кл/м^2. Найти индукцию магнитного поля в центре диска.

Ответ: $B=6{,}3\cdot10^{-6}$ Тл.

9. (И.3.393) Система состоит из длинного цилиндрического анода радиусом a и коаксиального с ним цилиндрического катода радиусом b ($b<<a$). На оси системы имеется нить с током накала I, создающим в окружающем пространстве магнитное поле. Найти наименьшую разность потенциалов между катодом и анодом, при которой термоэлектроны, покидающие катод без начальной скорости, начнут достигать анода .

Ответ: $U=\dfrac{\mu_0^2 e I^2}{8\pi^2 m}\ln\dfrac{a}{b}$.

Занятие 5. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Поток магнитной индукции.
2. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле.
3. Потенциальная энергия контура с током в магнитном поле.
4. Контур с током в неоднородном магнитном поле.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Поток вектора магнитной индукции $\vec{B}$:

а) через площадку dS:

$$d\Phi=\vec{B}\,\vec{n}\,dS==\vec{B}\,d\vec{S}=BdS\cos\alpha=B_n dS,$$

где α – угол между нормалью $\vec{n}$ к элементу поверхности dS и вектором $\vec{B}$, $d\vec{S}=\vec{n}\,dS$, B_n – проекция вектора $\vec{B}$ на нормаль $\vec{n}$;

б) через произвольную конечную поверхность S:

$$\int_S \vec{B}\,d\vec{S}=\int_S BdS\cos\alpha.$$

2. Работа сил поля при перемещении проводника с током в магнитном поле:

$$A=I\Delta\Phi,$$

где $\Delta\Phi$ – величина потока через поверхность S, образованную в пространстве проводником при его перемещении, I – ток проводника.

3. Работа сил поля при перемещении замкнутого контура с током в неоднородном магнитном поле:

$$A_{12}=\int_1^2 Id\Phi.$$

В случае, когда ток в контуре не меняется,

$$A_{12}=I(\Phi_2-\Phi_1),$$

где $\Phi_2-\Phi_1$ – изменение потока магнитного поля через контур в результате его перемещения.

***4. Потенциальная энергия контура с током в магнитном поле*:**

$$W=-(\vec{p}_m\ \vec{B}),$$

где $\vec{p}_m$ – вектор магнитного момента контура с током.

***5. Величина силы, действующей на контур с током в неоднородном поле аксиальной симметрии*:**

$$F=p_m\frac{\partial B}{\partial x}\cos\alpha,$$

где α – угол между векторами магнитного момента контура с током $\vec{p}_m$ и магнитной индукции $\vec{B}$.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Элементарный заряд	e=1,60·10^{-19} Кл.
Масса электрона	m=9,11·10^{-31} кг.
Магнитная постоянная	μ_0=4π·10^{-7} Гн/м.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Почему в магнитном поле над проводником с током совершается работа?

2. Зависит ли работа сил поля над конечным отрезком проводника с током от способа перемещения этого проводника из начального положения в конечное положение?

3. Можно ли однозначно ввести потенциальную энергию для отрезка проводника с током в магнитном поле точно так же, как для замкнутого контура с током?

4. Контур с током находится в магнитном поле. В каком случае его потенциальная энергия положительна, если направление его магнитного момента совпадает с направлением вектора магнитной индукции или противоположно?

5. Контур с током находится в магнитном поле. В каком случае работа внешних сил по удалению контура на бесконечность положительна, если направление тока в контуре составляет правовинтовую систему с направлением вектора магнитной индукции или левовинтовую систему?

6. Контур с током находится в однородном магнитном поле. При каком угле между вектором магнитного момента и направлением силовых линий поля потенциальная энергия контура максимальна, минимальна и равна нулю?

7. В каком случае потенциальная энергия витка с током в однородном магнитном поле при его повороте вокруг оси, проходящей через диаметр витка, увеличивается: при увеличении угла между вектором магнитного момента витка с током или при его уменьшении?

8. Контур с током свободно ориентируется в однородном магнитном поле, принимая устойчивое положение. Какова его потенциальная энергия в этом положении? Как направлен магнитный момент этого контура относительно вектора магнитной индукции? Как направлен ток в контуре относительно вектора магнитной индукции?

9. Как направлен вектор результирующей силы, действующей на виток с током в неоднородном магнитном поле аксиальной симметрии, если ось витка совпадает с осью этой симметрии?

10. Увеличивается или уменьшается потенциальная энергия магнитной стрелки при внесении ее в соленоид конечной длины, по виткам которого течет ток? Зависит ли знак потенциальной энергии от направления тока в соленоиде?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

***Пример* 1**. Квадратная рамка со стороной a=10 см, по которой течет ток I=100 А, находится в магнитном поле B=1Тл. Вектор магнитного момента $\vec{p}_m$ рамки направлен под углом α=60° к направлению, противоположному вектору $\vec{B}$ (рис. 5.1). Будучи предоставлена самой себе, рамка поворачивается в магнитном поле при неизменном токе в ней, занимая положение устойчивого равновесия. Найти работу сил поля.

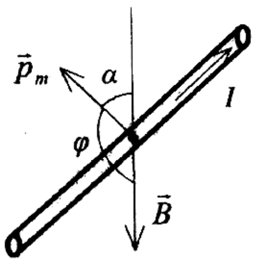

Рис. 5.1

Решение. В положении устойчивого равновесия потенциальная энергия рамки с током в магнитном поле отрицательна и равна $W_2= -p_mB$, где $p_m=Ia^2$ – величина магнитного момента рамки. В начальном положении потенциальная энергия рамки равна $W_1= -p_mB\cos\varphi$, где φ – угол между векторами магнитного момента рамки и индукции магнитного поля, φ=180°–α=120°. Работа сил поля над рамкой равна убыли ее потенциальной энергии:

$$A = W_1 - W_2 = -Ia^2B\cos 120^\circ - (-Ia^2B) = \frac{3}{2}a^2IB = 1{,}5\text{ Дж}.$$

***Пример* 2**. Квадратная рамка со стороной a = 0,2 м и током I_1=10 А лежит в одной плоскости с бесконечно длинным прямолинейным проводом, по которому течет ток I_2=2 А (рис. 5.2). Ближайшая к проводу сторона рамки параллельна ему и находится на расстоянии b = 0,4 м. Найти работу сил магнитного поля, необходимую для поворота рамки на угол α=90° вокруг оси OO', параллельной бесконечно длинному прямолинейному проводу и проходящей через центр рамки.

Решение. Работа, совершаемая магнитными силами над рамкой, равна произведению тока, протекающего по рамке, на изменение магнитного потока через рамку:

$$A = I_1(\Phi_2 - \Phi_1). \tag{5.1}$$

После поворота рамки на 90° плоскость рамки становится перпендикулярной плоскости, в которой лежат бесконечно длинный провод и ось OO'. Силовые линии поля в этом положении рамки дважды пересекают ее поверхность, поэтому поток через рамку равен нулю, Φ_2=0.

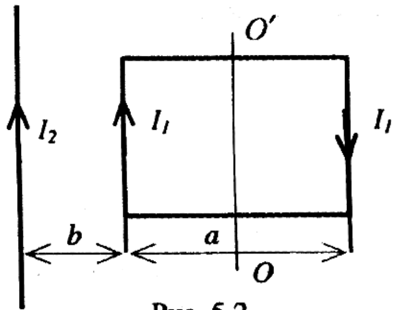

Рис. 5.2

Индукция магнитного поля бесконечно длинного провода на расстоянии $b+x$ от него равна $B=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{(b+x)}$.

Элементарный поток магнитного поля через полоску шириной dx и длиной a, параллельную проводу и находящуюся на расстоянии $b+x$ от него, равен

$$d\Phi=BdS\cos\alpha=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{(b+x)}adx\cos\alpha, \tag{5.2}$$

где α – угол между нормалью к поверхности рамки и направлением магнитного поля. Если нормаль составляет правовинтовую систему с направлением тока в рамке (в этом случае на рис. 5.2 токи I_1 и I_2 текут в одном направлении), то α=0°, в противоположном случае, когда токи текут навстречу друг другу, α=180°. Поэтому в первом случае $d\Phi>0$, во втором – $d\Phi<0$. Суммируя (5.2) по всей поверхности рамки, получим

$$\Phi_1 = \pm\frac{\mu_0}{2\pi}I_2a\int_0^a\frac{dx}{(b+x)} = \pm\frac{\mu_0}{2\pi}aI_2\ln\frac{a+b}{b}.$$

Подставив это выражение в (5.1), получим работу сил поля

$$A=\mp\frac{\mu_0}{2\pi}aI_2I_1\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)=\mp 0{,}324\text{ мкДж}.$$

Работа отрицательна, если протекающий по ближайшей к проводу стороне рамки ток I_1 одного направления с током I_2, и положительна, если наоборот.

***Пример* 3.** Рамка с площадью поперечного сечения S=10^{-3} м^2, содержащая N=10^3 витков тонкого провода, подвешена на упругой нити, постоянная кручения C которой равна 10 мкН·м/град (см. примечание к примеру 2 в разделе «Примеры решения задач» в занятии 4). Плоскость рамки параллельна направлению магнитного поля с индукцией B=0,45·10^{-3} Тл. Определить работу, совершаемую силами поля над рамкой после того, как через ее витки пропустили ток $I=\sqrt{2}$ А.

Решение. Работа магнитных сил равна убыли потенциальной энергии рамки при ее повороте в магнитном поле

$$A = W_1 - W_2,$$

где W_1, W_2 – потенциальные энергии рамки в начальном и конечном положениях. Потенциальная энергия рамки с током в однородном магнитном поле равна

$$W = -p_m B\cos\alpha,$$

где p_m=INS – величина магнитного момента рамки, α – угол между векторами магнитного момента и магнитной индукции. В начальный момент времени, сразу после включения тока, когда рамка еще не успевает повернуться, вектор магнитного момента перпендикулярен вектору магнитной индукции, α=90°, поэтому W_1=0. В положении устойчивого равновесия потенциальная энергия рамки равна $W_2=-p_m B\cos\alpha_2$, где α_2 – угол между векторами магнитного момента и магнитной индукции в этом положении (он определен в примере 2 раздела «Примеры решения задач» занятия 4 и равен α=45°). Окончательно работа магнитных сил равна

$$A = p_m B\cos\alpha = ISNB\cos\alpha = 4{,}5 \text{ мДж}.$$

Пример* 4. *(В 11.66) Однородный медный диск A радиусом R=5 см помещен в магнитное поле с индукцией B=0,2 Тл так, что плоскость диска перпендикулярна к направлению магнитного

поля (рис. 5.3). Ток I=5 А проходит по радиусу диска ab (a и b – скользящий контакт). Диск вращается с частотой n=3 Гц. Найти: а) мощность P такого двигателя; б) направление вращения диска при условии, что магнитное поле направлено от чертежа к нам; в) вращающий момент M, действующий на диск.

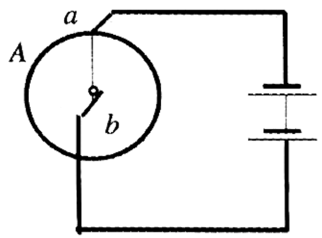

Рис.5.3

Решение. а) на радиус ab (рис. 5.3) действует сила F=IBR. Работа при одном обороте диска A=$I\Delta\Phi$=IBS, где S – площадь, описываемая радиусом за один оборот, т.е. площадь диска. Если T – период вращения, то мощность такого двигателя равна

$$P=\frac{A}{T}=\pi nBIR^2=24 \text{ мВт};$$

б) диск вращается по часовой стрелке; в) на элемент радиуса dx действует сила dF=$BIdx$ и вращающий момент dM=xdF=$BIxdx$, где x – расстояние элемента dx от оси вращения. На весь диск действует вращающий момент

$$M=\int_0^R BIxdx=\frac{BIR^2}{2}=1{,}25 \text{ мН·м}.$$

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1. (В.11.56) Два прямолинейных длинных параллельных проводника находятся на расстоянии d_1=10 см друг от друга. По проводникам в одном направлении текут токи I_1=20 А и I_2=30 А. Какую работу A надо совершить (на единицу длины), чтобы раздвинуть эти проводники до расстояния d_2=20 см?

Ответ: A=83 мкДж/м.

2. (Ч.25.3) По проводу, согнутому в форме квадрата (рамке) со стороной длиной a=10 см, течет ток силой I=10 А. Плоскость квадрата составляет угол α=30° с линиями индукции однородного магнитного поля, B=0,1 Тл. Составляющая вектора магнитной индукции, перпендикулярная плоскости рамки, образует с направлением тока правовинтовую систему. Учитывая, что угол α не меняется при перемещении, вычислить работу A внешней силы, которую необходимо совершить для того, чтобы удалить провод за пределы поля.

Ответ: A=5 мДж.

3. В одной плоскости с длинным прямым проводом, по которому течет ток I_1=50 А, расположена прямоугольная рамка так, что две большие стороны ее длиной l=65 см параллельны проводу, а расстояние от провода до ближайшей из этих сторон равно длине ее меньших сторон. Найти магнитный поток Ф, пронизывающий рамку.

Ответ: Ф=4,5 мкВб.

4. В одной плоскости с длинным прямым проводом, по которому течет ток I_1=50 А, расположена прямоугольная рамка так, что две большие стороны ее длиной l=65 см параллельны проводу, а расстояние от провода до ближайшей из этих сторон равно длине ее меньших сторон. Найти потенциальную энергию этой рамки, если по рамке протекает ток I_2=5 А. В каком случае потенциальная энергия положительна: когда ток, протекающий по ближайшей к проводу стороне рамки, одного направления с током провода или когда эти токи противоположны? (Указание: см. задачу 3 занятия 5.)

Ответ: W=23 мкДж.

5. Квадратная рамка со стороной длиной a=2 см, содержащая N=100 витков тонкого провода, подвешена на упругой нити, постоянная кручения которой C=10 мкН·м/град (см. замечание к примеру 2 в разделе «Примеры решения задач» занятия 4). Ось вращения рамки проходит через середины ее противоположных сторон и совпадает с нитью. Плоскость рамки совпадает с направлением вектора индукции внешнего магнитного поля B=30 мТл. Определить потенциальную энергию W рамки после того, как через ее витки пропустили ток I=1 А.

Ответ: W=–1,0 мДж.

6. Квадратная рамка со стороной длиной a=1 см, содержащая N=200 витков тонкого провода, подвешена в магнитном поле с индукцией B=30 мТл на упругой нити, постоянная кручения C которой равна 10 мкН·м/град (см. примечание к примеру 2 в разделе «Примеры решения задач» занятия 4). Ось вращения рамки проходит через середины ее противоположных сторон и совпадает с нитью. Определить потенциальную энергию рамки W_1 и упругой нити W_2 после того, как через витки рамки пропустили ток I=1 А. Магнитный момент, возникающий у рамки сразу после включения тока, направлен против индукции внешнего магнитного поля.

Ответ: W_1=0,52 мДж, W_2=0,08 мДж.

7. Круговой контур радиусом R=2 см помещен в однородное магнитное поле с напряженностью H=150 кА/м. По контуру течет ток I=2 А, и направление его магнитного момента совпадает с направлением вектора напряженности. Какую работу A надо совершить, чтобы повернуть контур на угол φ=90° вокруг оси, совпадающей с диаметром контура? В процессе поворота ток, протекающий по контуру, считать неизменным.

Ответ: A=0,47 мДж.

8. (Ч.25.4) По кольцу радиусом R=10 см, сделанному из тонкого гибкого провода, течет ток I=100 А. Перпендикулярно плоскости кольца возбуждено магнитное поле с индукцией B=0,1 Тл по направлению, совпадающему с направлением индукции B_1 собственного магнитного поля кольца. Определить работу A внешних сил, которые, действуя на провод, деформировали его и придали ему форму квадрата. Сила тока при этом поддерживалась неизменной. Работой против упругих сил пренебречь.

Ответ: A=68 мДж.

9. Однородный медный диск A радиусом R=5 см и массой 25 кг помещен в магнитное поле с индукцией B=0,2 Тл так, что плоскость диска перпендикулярна к направлению магнитного поля (см. рис. 5.3). Ток I=5 А проходит по радиусу диска ab (ab –

скользящие контакты). Найти работу, совершаемую таким двигателем, за время t=20 с.

Ответ: $A=10^{-2}$ Дж.

10. Квадратная рамка со стороной a=0,1 м лежит в одной плоскости с бесконечно длинным прямолинейным проводом так, что ее ближняя сторона параллельна этому проводу и находится на расстоянии a от него. По проводу и рамке протекают соответственно токи I_1=1 А и I_2=0,1 А, причем направления тока провода и тока, протекающего по ближайшей к нему стороне рамки, одинаковы. Найти работу внешних сил, необходимую для поворота рамки относительно ее оси, параллельной бесконечному проводу, и проходящую через ее середину, на угол 180°. В процессе поворота ток, протекающий по рамке, считать неизменным.

Ответ: A=2,8 нДж.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ Б

1. Плоский квадратный контур (рамка) со стороной a=10 см, по которому течет ток I=200 А, находится в однородном магнитном поле B=1 Тл. Угол между плоскостью рамки и вектором магнитной индукции равен α=30°. Направление тока в контуре составляет правовинтовую систему с нормальной составляющей к плоскости контура вектора магнитной индукции. Какую работу A нужно совершить внешними силами при повороте рамки вокруг оси, проходящей через середины ее противоположных сторон и перпендикулярной силовым линиям поля, чтобы уменьшить угол α между плоскостью рамки и вектором магнитной индукции до нуля. В процессе поворота ток, протекающий по рамке, считать неизменным.

Ответ: A=1 Дж.

2. В однородном магнитном поле напряженностью $H=10^2$ кА/м помещена квадратная рамка, площадь сечения которой равна S=0,1 м^2. Ток в рамке I=1 А. В начальном положении рамки угол между векторами магнитного момента рамки и напряженности магнитного поля равен α_1=120°, затем

рамка поворачивается так, что этот угол уменьшается до α_2=60°. Найти изменение потенциальной ΔW энергии рамки. В процессе поворота ток, протекающий по рамке, считать неизменным.

Ответ: $\Delta W=-13$ мДж.

3. (Ч.21.9) В одной плоскости с длинным прямым проводом, по которому течет ток I_1, расположена прямоугольная рамка так, что две большие стороны ее длиной a параллельны проводу, а расстояние от провода до ближайшей из этих сторон равно ее ширине. Найти работу, совершаемую силами поля, если рамка поворачивается вокруг ее дальней от провода стороны на угол, равный 180°. В процессе поворота ток I_2, протекающий по рамке, считать неизменным. В каком случае эта работа положительна: когда направление тока в рамке до поворота составляет правый винт с направлением поля или наоборот?

Ответ: $A=\dfrac{\mu_0}{2\pi}aI_1 I_2\ln 3.$

4. Квадратная рамка со стороной a и током I_1 находится в одной плоскости с бесконечно длинным проводом. По бесконечному проводу течет ток I_2 в том же направлении, что и ток, протекающий по ближайшей к нему стороне рамки. Расстояние от провода до ближайшей к нему стороны рамки равно r_1. Рамка, оставаясь в плоскости провода, медленно перемещается так, что это расстояние увеличивается до r_2. Найти работу внешних сил, необходимую для такого перемещения.

Ответ: $A=\dfrac{\mu_0}{2\pi}aI_1I_2\ln\dfrac{r_2(r_1+a)}{r_1(r_2+a)}.$

5. Квадратная рамка, с площадью поперечного сечения S=5 см^2, содержащая N=3000 витков тонкого провода, находится в однородном магнитном поле с индукцией B=2 мТл. Рамка подвешена на упругой нити, постоянная кручения которой C=0,1 мН·м/град (см. замечание к примеру 2 в разделе «Примеры решения задач» занятия 4). Плоскость рамки параллельна вектору индукции внешнего магнитного поля. Определить потенциальную энергию W_1 рамки с током и потенциальную энергию упругой нити W_2 после того, как через витки рамки пропустили ток 4 А.

Ответ: W_1=–10 мДж, W_2=10 мДж.

6. (В.11.63) Квадратная рамка подвешена на проволоке так, что направление магнитного поля составляет угол α=90° с нормалью к плоскости рамки. Магнитная индукция поля B=14 мТл, длина стороны рамки 1 см. Если по рамке пропустить ток I=1 А, то она поворачивается на угол φ=1°. Найти постоянную кручения материала проволоки. (Определение постоянной кручения см. в замечании к примеру 2 в разделе «Примеры решения задач» занятия 4.)

Ответ: C=1,4 мкН·м/град.

7. Проволочный виток с током I=2 А и радиусом R =1 м деформируется сначала в восьмерку, затем складывается в той же плоскости при неизменном токе и длине в двухвитковый контур так, что токи в обоих витках имеют одинаковое направление с направлением тока в проволочном витке. Плоскость, в которой лежат виток и двухвитковый контур, перпендикулярна силовым линиям магнитного поля с индукцией B=1 мТл. Пренебрегая работой сил упругости, найти работу внешних сил, необходимую для такой деформации.

Ответ: A=3,1 мДж.

8. По двум прямолинейным медным шинам, установленным под углом α=30° к горизонту, на расстоянии l=1 м друг от друга при условии $\frac{IBl}{mg}$>tgα вверх скользит медная перемычка массой m=1 кг (рис. 5.4). Концы шин у их оснований замкнуты на источник тока I=10³ А. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B=10⁻² Тл, силовые линии которой перпендикулярны

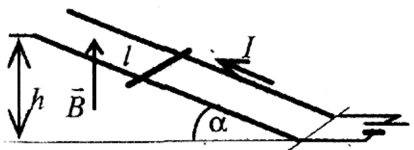

Рис. 5.4

к горизонту. Сопротивления шин и перемычки, которые вместе с источником тока образуют замкнутый контур, пренебрежимо малы. Направление тока в контуре составляет правовинтовую систему с направлением вектора магнитной индукции. Найти кинетическую энергию K перемычки на высоте h=1 м.

Ответ: K=7,5 Дж.

9. Стержень массы m=1 кг помещен в магнитное поле B=1 Тл и свободно вращается вокруг вертикальной оси по проводящему кольцу, плоскость которого перпендикулярна магнитной индукции (рис. 5.5). К концу стержня, конец которого находится на оси вращения, и проводящему кольцу подсоединен источник тока такой, что по стержню течет ток I=1 А. Найти угловую скорость ω стержня после N=10 оборотов.

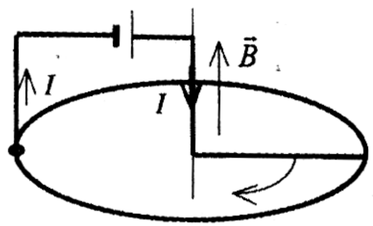

Рис. 5.5

Ответ: ω=14 рад/с.

10. Круговой контур радиусом R с током силой I помещен в аксиально-симметричное магнитостатическое поле так, что ось симметрии контура, перпендикулярная его плоскости, совпадает с единственной прямой силовой линией, а магнитный момент направлен по вектору магнитной индукции $\vec{B}$. Зависимость проекции вектора $\vec{B}$ на ось контура от координат точек оси дается формулой $B_x = B_0 e^{-\alpha x^2}$, где B_0>0, α>0 – постоянные. Вычислите силу, действующую на контур с током, как функцию координат его центра. Магнитостатическое поле считать слабонеоднородным.

Ответ: F_x=$-2\pi\alpha R^2 I B_0 x\exp(-\alpha x^2)$.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

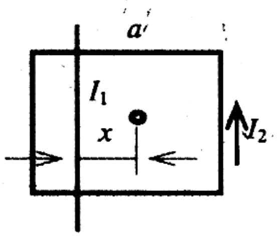

Рис. 5.6

1. Квадратная рамка со стороной a лежит в одной плоскости с бесконечно длинным прямолинейным проводом (рис. 5.6), по которому течет ток I_1. По рамке течет ток I_2, и одна из сторон рамки параллельна этому проводу. Найти потенциальную энергию рамки W как функцию расстояния ее центра до провода.

Ответ: $W=k\ln\left\{\dfrac{(a/2)+x}{(a/2)-x}\right\}$, $-(a/2)<x<a/2$;

$W=k\ln\left\{\dfrac{x+(a/2)}{x-(a/2)}\right\}$, если $x<-(a/2)$, $x>a/2$; $k=\dfrac{\mu_0}{2\pi}aI_1I_2$.

2. По двум параллельным медным шинам в форме параболы $y=kx^2$, расстояние между которыми равно l, скользит, оставаясь перпендикулярной плоскости x, y, перемычка массой m (рис. 5.7). Вектор индукции магнитного поля направлен вертикально вверх вдоль оси y против направления силы тяжести. В основании концы шин замыкаются через источник тока, образуя с перемычкой замкнутый контур, по которому течет ток I такого направления, что перемычка под его действием поднимается вверх. Найти, на какую высоту поднимется перемычка.

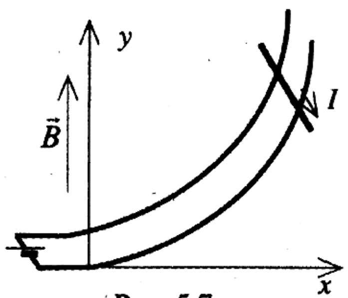

Рис. 5.7

Ответ: $h=(IBl)^2/(4k(mg)^2)$.

3. По двум параллельным прямым проводникам длиной l каждый, находящимся на расстоянии a, текут в одном

направлении токи I_1, I_2. Вычислить работу внешних сил, необходимую для увеличения расстояния между проводами до величины $b>a$, не предполагая $a<<l$, $b<<l$.

Ответ:

$$F=\frac{\mu_0}{2\pi}I_1I_2\left\{\sqrt{l^2+b^2}-\sqrt{l^2+a^2}-b+a-l\ln\frac{a(l+\sqrt{l^2+b^2})}{b(l+\sqrt{l^2+a^2})}\right\}.$$

4. Однородный медный цилиндр радиусом R и длиной l ($R<<l$) скатывается с высоты h с горки из двух прямолинейных параллельных медных шин, которые составляют угол $\alpha=30°$ с горизонтом (рис. 5.4). Цилиндр движется в магнитном поле B, силовые линии которого перпендикулярны горизонту. Найти скорость υ цилиндра у подножия горки, если цилиндр и шины вместе с источником тока, подключенным к концам шин, образуют замкнутый прямоугольный контур, по которому течет ток I.

Ответ: $\upsilon=2\sqrt{\dfrac{h}{3}}\sqrt{g\pm IB\dfrac{l}{m}\text{ctg}\alpha}$ (знак «–» в случае, если направление тока контура образует правый винт с направлением вектора магнитной индукции, знак «+», если наоборот).

5. Найти потенциальную энергию взаимодействия W двух круговых витков с токами I_1, I_2, находящихся на одной оси. Радиусы витков соответственно равны R_1, R_2, причем их значения пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием a между плоскостями витков. Направления токов в витках противоположны.

Ответ: $W=\mu_0\pi(R_1R_2)^2\,I_1I_2/(2a^3)$.

6. Прямоугольная рамка с током, стороны которой имеют длину a и b, находится в магнитном поле бесконечно длинного прямолинейного провода с током I_1. Ток, протекающий в рамке, равен I_2. Считая, что две стороны рамки длиной a параллельны бесконечному проводу (рис.5.8), найти потенциальную энергию W рамки.

Ответ: $W = -\frac{\mu_0}{2\pi} a I_1 I_2 \ln\left|\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\right|$, где α_1, α_2 – углы между нормалью к плоскости рамки и вектором магнитной индукции у ближней к бесконечному проводу и у дальней стороны рамки a. Если расстояние r от центра рамки до провода велико $r >> b$, то

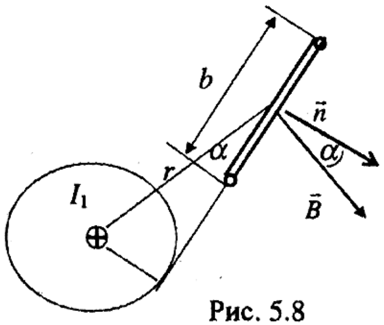

Рис. 5.8

$$W = -\frac{\mu_0 ab}{2\pi r} I_1 I_2 \cos\alpha,$$

где α – угол между нормалью к плоскости рамки и вектором магнитной индукции в ее центре.

7. Из бесконечности вдоль оси соленоида движется классическая частица массой m=9,1·10^{-31} кг и магнитным моментом p_m=9,28·10^{-24} А·м^2 (электрон). Длина соленоида l=10 см, его радиус R=2 см, число витков N=10^4. Ток соленоида I=0,1 А. Считая скорость частицы на бесконечности пренебрежимо малой, вычислить ее скорость: а) на входе в соленоид; б) в его центре. Силой тяжести пренебречь.

Ответ: а) $\upsilon_{гр} = \sqrt{\frac{p_m \mu_0 NI}{m\sqrt{R^2 + l^2}}}$, б) $\upsilon_{ц} = \sqrt{\frac{p_m \mu_0 NI}{m\sqrt{R^2 + (l/2)^2}}}$.

8. Кольцо радиусом R, по которому циркулирует ток I, поместили в неоднородное аксиально-симметричное поле. Ось кольца совпадает с осью симметрии магнитного поля. Индукция $\vec{B}$ магнитного поля, в котором находится кольцо, направлена под углом α к оси симметрии поля (рис. 5.9). Масса кольца m. Определить ускорение кольца.

Ответ: $a = \frac{2\pi RIB\sin\alpha}{m}$.

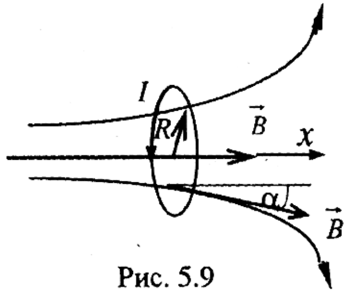

Рис. 5.9

9. ***(И.3.269).*** Небольшой виток с током находится на расстоянии r от длинного прямого проводника с током I. Магнитный момент витка равен p_m. Найти модуль и направление вектора силы, действующей на виток, если вектор $\vec{p}_m$: а) параллелен прямому проводу; б) направлен по направлению магнитного поля тока I в месте расположения витка.

Ответ: а) F=0; б) $F = \frac{\mu_0 p_m I}{2\pi r^2}$, $\vec{F}$ направлен в противоположную радиусу-вектору сторону.

10. Однослойная катушка (соленоид) имеет длину l и радиус сечения R. Ток соленоида I, число витков на единицу длины n. Найти работу, совершаемую силами поля по перемещению стрелки компаса с магнитным моментом p_m из бесконечности в центр соленоида.

Ответ: $A = \frac{\mu_0 p_m nI}{\sqrt{1 + (2R/l)^2}}$.

Занятие 6. Применение теоремы о циркуляции к расчету магнитных полей тороида и соленоида

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Поток магнитной индукции.

2. Теорема Гаусса для вектора $\vec{B}$.

3. Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля (закон полного тока).

4. Магнитное поле соленоида и тороида.

5. Магнитное поле безграничной плоскости, по которой течет ток.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Поток вектора магнитной индукции $\vec{B}$ через произвольную конечную поверхность S:

$$\int_S \vec{B}\,d\vec{S} = \int_S BdS\cos\alpha.$$

2. Теорема Гаусса

Поток вектора магнитной индукции через произвольную замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S \vec{B}\,d\vec{S} = 0.$$

3. Теорема о циркуляции для вектора магнитной индукции

Циркуляция вектора магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, которые охватываются этим контуром:

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{N} I_i .$$

4. Магнитное поле соленоида

Величина магнитной индукции внутри бесконечно длинного соленоида без магнитного сердечника равна

$$B=\mu_0 nI,$$

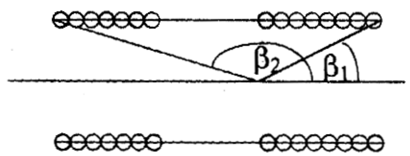

Рис. 6.1

где I – ток соленоида, n – число витков на единицу длины соленоида, $n=N/l$. Величина магнитной индукции на оси соленоида конечной длины без магнитного сердечника равна

$$B=\frac{1}{2}\mu_0 nI(\cos\beta_1-\cos\beta_2)$$

(углы β_1, β_2 изображены на рис. 6.1).

5. Магнитное поле тороида

Величина магнитной индукции внутри тороида без магнитного сердечника вычисляется по формуле

$$B=\frac{\mu_0 NI}{2\pi r}=\mu_0 nI\frac{R}{r},$$

где R – радиус тороида, r – расстояние от центра тороида до произвольной точки внутри его.

6. Величина магнитной индукции безграничной плоскости, по которой течет ток, равна

$$B=\mu_0 i/2,$$

где $i=I/l$ – линейная плотность тока, одинаковая во всех точках плоскости, l – отрезок прямой, перпендикулярный линиям тока. Вектор магнитной индукции $\vec{B}$ перпендикулярен линиям тока и параллелен безграничной плоскости, причем вектор $\vec{B}$ направлен с разных сторон плоскости в противоположные стороны, образуя правовинтовую систему с направлением тока I.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Элементарный заряд e=1,60·10^{-19} Кл.

Масса электрона m=9,11·10^{-31} кг.

Магнитная постоянная μ_0=4π·10^{-7} Гн/м.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Дать определение потока вектора магнитной индукции через элементарную площадку.

2. В каком случае поток вектора магнитной индукции $\vec{B}$ через элементарную площадку dS положителен, а в каком отрицателен?

3. Сформулировать теорему Гаусса. Записать ее в интегральной и дифференциальной формах. Выражением какого фундаментального свойства магнитного поля она является.

4. Какое векторное поле называют соленоидальным (вихревым)? Записать условие соленоидальности как в интегральной, так и в дифференциальной формах.

5. Какое поле (электрическое или магнитное) является потенциальным? Какое из этих полей соленоидально? Дивергенция от вектора какого поля равна нулю? Для какого поля ротор от вектора этого поля равен нулю?

6. Дайте определение циркуляции векторного поля $\vec{B}$ по замкнутому контуру L.

7. Найдите циркуляцию вектора магнитной индукции вдоль силовой линии бесконечно длинного прямолинейного провода, по которому течет ток I.

8. Запишите теорему о циркуляции вектора $\vec{B}$ в дифференциальной и интегральной формах.

9. Когда циркуляция вектора $\vec{B}$ по замкнутому контуру равна нулю?

10. Является ли магнитное поле потенциальным?

11. Нарисуйте силовые линии вектора магнитной индукции соленоида конечной длины.

12. Вычислите циркуляцию вектора магнитной индукции $\vec{B}$ бесконечно длинного соленоида по прямоугольному контуру, который охватывает N витков соленоида с током I в каждом витке. Две стороны прямоугольного контура длиной l параллельны оси соленоида, а две другие пересекают витки соленоида.

13. Как доказать, что поле бесконечно длинного соленоида вне соленоида равно нулю?

14. Вычислите поле полубесконечного соленоида на его оси, там где силовая линия вектора магнитной индукции выходит из соленоида.

15. Найдите циркуляцию вектора магнитной индукции $\vec{B}$ по окружности, лежащей в плоскости тороида, центр которой совпадает с центром тороида. Число витков тороида равно N, ток – I. Чему равна эта циркуляция в случае, когда окружность находится внутри соленоида и когда она вне его?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. По бесконечной пластине толщиной d параллельно ее поверхности течет однородный ток плотности j. Найти индукцию магнитного поля этого тока как функцию расстояния h от средней плоскости пластины.

Решение. Пусть ток I течет вдоль пластины в направлении, перпендикулярном плоскости, в которой лежит ось Ox (рис. 6.2), к нам. Рассмотрим магнитное поле в плоскости xOy. На оси Ox, лежащей в этой плоскости и проходящей через середину сечения пластины, возьмем два элементарных тока dI_1, dI_2, расположенных симметрично относительно точки O (рис 6.2). Результирующий вектор индукции $d\vec{B}$, создаваемой элементами токов dI_1, dI_2, в точке A, лежащей на оси Ox, параллелен этой оси и перпендикулярен направлению тока (рис. 6.2). Векторы магнитных индукций от всех элементов тока dI_1, dI_2 в точках A и C, симметрично расположенных относительно оси Ox, равны по величине и направлены в противоположные стороны, образуя с направлением тока правовинтовую систему.

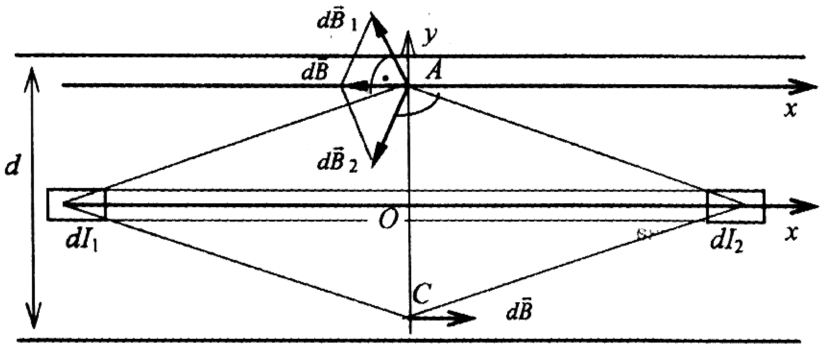

Рис. 6.2

Очевидно, что если ось Ax лежит выше оси Ox, то результирующий вектор магнитной индукции B_A, создаваемой в точке A всеми токами, протекающими ниже оси Ax, также направлен против направления оси Ox. Хотя вектор магнитной индукции, создаваемой токами, протекающими выше оси Ax, направлен в противоположную сторону, но он меньше B_A. Это означает, что вектор магнитной индукции $\vec{B}_-$ в точке A или любой точке, лежащей выше оси Ox, направлен против оси Ox (рис. 6.3).

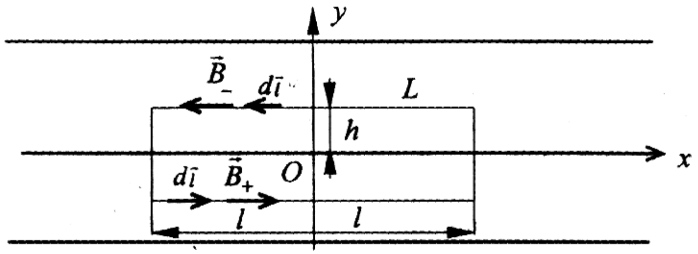

Рис. 6.3

Аналогично можно показать, что вектор магнитной индукции $\vec{B}_+$ (рис. 6.3) в любой точке, лежащей ниже оси Ox,

направлен вдоль оси Ox. Так как плотность тока, согласно условию задачи, неизменна вдоль оси Ox, то величина вектора магнитной индукции постоянна вдоль оси Ox. В силу симметрии задачи величины векторов магнитных индукций на одинаковом расстоянии от средней плоскости пластины одинаковы, поэтому значение магнитной индукции в произвольной точке зависит только от расстояния этой точки до оси Ox.

Найдем циркуляцию вектора $\vec{B}$ по прямоугольному контуру L (рис. 6.3). Вклад в нее по двум сторонам, параллельным оси Oy, равен нулю, так как вектор перемещения вдоль этих сторон $d\vec{l} \perp \vec{B}$. Направления $d\vec{l}$ по верхней и нижней сторонам контура совпадают соответственно с направлениями индукций $\vec{B}_-$, $\vec{B}_+$ выше оси Ox и ниже этой оси. Поэтому, обозначив $B=|\vec{B}_-|=|\vec{B}_+|$, получим

$$\oint_L \vec{B}\,d\vec{l} = 2lB, \qquad (6.2)$$

где l – длина прямоугольника. Ток, охватываемый контуром L, равен $I_L=2jhl$, где h – расстояние от оси Ox до точки, где определяется поле, j – плотность тока. Поэтому теорему о циркуляции для контура L, который охватывает ток I_L, запишем в виде $2Bl=2\mu_0 jhl$, откуда

$$B=\mu_0 jh,$$

если $h<d/2$.

***Пример* 2**. Найти величину и направление вектора магнитной индукции $\vec{B}$ на оси соленоида конечной длиной l, радиусом R. Число витков соленоида равно N, ток, текущий по его виткам, равен I.

Решение. Величина магнитной индукции, возбуждаемой одним витком соленоида в точке, находящейся на оси соленоида на расстоянии h от центра витка (рис. 6.4), равна

$$B = \frac{\mu_0 I R^2}{2(h^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Для определенности считаем, что ток в соленоиде составляет с направлением оси Ox правовинтовую систему. Далее воспользуемся приемом, приведенным в [1], заменив реальный ток соленоида током, протекающим по тонкостенному проводящему цилиндру с линейной плотностью $i=\frac{NI}{l}=nI$, совпадающей со средним значением линейной плотности тока, текущего по виткам соленоида. Элементарный ток цилиндра в интервале dh равен idh. Если центр кругового тока idh находится на расстоянии h от точки x, то магнитная индукция dB в точке x, создаваемая этим круговым током, равна

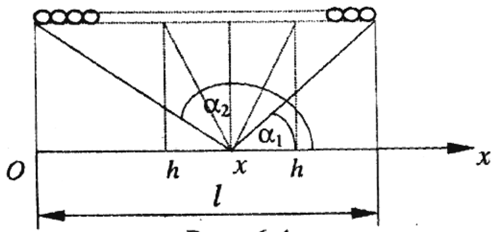

Рис. 6.4

$$dB=\frac{\mu_0 R^2 i dh}{2(R^2+h^2)^{3/2}}.$$

Найдем вклад в полное значение магнитной индукции от тока, текущего по виткам, центры которых расположены на оси Ox, между точками O и x:

$$B_1=\frac{1}{2}\mu_0 i R^2\int_0^x \frac{dh}{(R^2+h^2)^{3/2}}=\frac{1}{2}\mu_0 nI\frac{x}{\sqrt{R^2+x^2}}.$$

Вклад в магнитную индукцию от тока, текущего по виткам, центры которых лежат на оси Ox, между точками x и $x=l$ таков:

$$B_2=\frac{1}{2}\mu_0 i R^2\int_0^{l-x} \frac{dh}{(R^2+h^2)^{3/2}}=\frac{1}{2}\mu_0 nI\frac{l-x}{\sqrt{R^2+(l-x)^2}}.$$

Так как направления магнитных полей, создаваемых частями соленоида слева и справа от точки x одинаковы, то окончательно магнитная индукция на оси соленоида в точке x равна

$$B = B_1 + B_2 = \frac{1}{2}\mu_0 nI\left\{\frac{l-x}{\sqrt{R^2+(l-x)^2}} - \frac{(-x)}{\sqrt{R^2+x^2}}\right\}.$$

Обозначим через α_1 – угол между осью Ox и радиусом-вектором, проведенным из точки x в любую точку крайнего справа витка, а через α_2 угол между осью Ox и радиусом-вектором, проведенным из точки x в любую точку крайнего слева витка катушки (рис.6.4).Тогда последняя формула примет вид

$$B=\frac{1}{2}\mu_0 nI(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2).$$

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1. (Ч.24.9) В одной плоскости с длинным прямым проводом, по которому течет ток I=50 А, расположена прямоугольная рамка так, что две ее большие стороны длиной l=65 см параллельны проводу, а расстояние от провода до ближайшей из этих сторон равно длине ее меньших сторон. Рамка содержит 1000 витков провода. Найти магнитный поток Φ, пронизывающий рамку.

Ответ: Φ=4,5 мВб.

2. (Ч.24.12) Тороид квадратного сечения содержит 1000 витков. Наружный диаметр D тороида равен 40 см, внутренний – d=20 см. Найти магнитный поток Φ внутри тороида, если ток, протекающий по обмотке, равен I=10 А. (Учесть неоднородность поля тороида.)

Ответ: Φ=0,14 мВб.

3. Используя теорему о циркуляции для вектора магнитной индукции $\vec{B}$, определить его модуль и направление в верхнем и нижнем полупространствах безграничной плоскости, по которой течет ток с линейной плотностью i, одинаковой во всех точках плоскости.

Ответ: $B=\mu_0 i/2$. Вектор магнитной индукции $\vec{B}$ перпендикулярен линиям тока и параллелен безграничной плоскости, причем вектор $\vec{B}$ направлен с разных сторон плоскости в противоположные стороны, образуя правовинтовую систему с направлением тока.

4. (В.11.27) Катушка длиной l=30 см имеет N=1000 витков. Найти магнитную индукцию B внутри катушки, если по катушке проходит ток I=2 А. Диаметр катушки считать малым по сравнению с ее длиной.

Ответ: B=8,4 мТл.

5. (В.11.29) Из проволоки диаметром d=1 мм надо намотать соленоид, внутри которого должна быть напряженность магнитного поля H=24 кА/м. По проволоке можно пропускать предельный ток I=6 А. Из какого числа слоев будет состоять обмотка соленоида, если витки наматывать плотно друг к другу? Диаметр катушки считать малым по сравнению с ее длиной.

Ответ: Из 4 слоев.

6. По обмотке короткой катушки длиной l=60 см и радиусом r=40 см течет ток силой I=5 А. Сколько витков проволоки в один слой намотано на катушку, если напряженность H в центре катушки равна 800 А/м?

Ответ: 160 витков.

7. (В.11.31) Каким должно быть отношение длины l катушки к ее диаметру D, чтобы индукцию магнитного поля в центре катушки можно было найти по формуле для индукции поля бесконечно длинного соленоида? Ошибка при таком допущении не должна превышать δ=5 %. Допустимая ошибка $\delta=(B_2-B_1)/B_2$, где B_1 – индукция поля внутри катушки конечной длины и B_2 – индукция поля внутри бесконечно длинной катушки.

Ответ: $l/D=(1-\delta)/\sqrt{1-(1-\delta)^2}\approx(1-\delta)/\sqrt{2\delta}$; при $\delta\leq 0{,}05$ получим $l/D\geq 3$.

8. (Ч.24-4) Диаметр D тороида без сердечника по средней линии равен 30 см. Сечение тороида – это круг радиусом r=5 см. По обмотке тороида, содержащей N=2000 витков, течет ток I=5 А. Пользуясь теоремой о циркуляции для вектора B, определить максимальное и минимальное значения этого вектора внутри тороида.

Ответ: $B_{мах}$=20 мТл, $B_{мин}$=10 мТл.

9. (В.11.30) Напряженность магнитного поля в соленоиде длиной l=20 см и диаметром D=5 см равна H=1 кА/м. Диаметр медной проволоки обмотки соленоида d=0,5 мм, удельное сопротивление меди ρ=0,017 мкОм м. Найти число ампер-витков и разность потенциалов, которую нужно приложить к концам обмотки.

Ответ: IN=200 А вит, U=2,7 В.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ Б

1. (В.11.68) Найти магнитный поток Φ, пересекаемый радиусом ab диска A (рис. 5.3) за время t =1 мин вращения. Радиус диска R=10 см. Индукция магнитного поля B=0,1 Тл. Диск вращается с частотой n=5,3 $с^{-1}$.

Ответ: Φ=1Вб.

2. Определить модуль и направление вектора магнитной индукции $\vec{B}$ двух параллельных безграничных плоскостей, по которым текут токи с линейными плотностями i=const. Рассмотреть два случая: *а*) токи текут в противоположных направлениях; *б*) токи текут в одном направлении.

Ответ: *а*) $B=\mu_0 i$ между плоскостями и B=0 вне плоскостей; *б*) между плоскостями B=0, вне плоскостей $B=\mu_0 i$. В обоих случаях магнитное поле направлено перпендикулярно току и параллельно токонесущим плоскостям.

3. ***(И.3.233)*** По сечению круглого однородного прямолинейного провода, радиус которого равен R, равномерно распределен ток плотностью j. Найти циркуляцию вектора магнитной индукции вдоль окружности радиусом r с центром на оси проводника, считая плоскость окружности перпендикулярной этой оси. Используя полученный результат, найти вектор магнитной индукции как функцию радиуса-вектора $\vec{r}$, направленного от оси проводника и перпендикулярного этой оси как в случае $r=|\vec{r}|<R$, так и в случае $r>R$.

Ответ: $\oint\limits_L \vec{B}\,d\vec{l} = 2\pi rB$, $\quad \vec{B}=\begin{cases}(1/2)\mu_0\left[\vec{j}\vec{r}\right] & \text{при} \quad r\le R,\\ (1/2)\mu_0\left[\vec{j}\vec{r}\right]R^2/r^2 & \text{при} \quad r\ge R.\end{cases}$

4. ***(И.3.242)*** Найти магнитный поток Φ внутри тороида прямоугольного сечения через плоскость, перпендикулярную его оси, если ток в обмотке I=1,7 А, полное число витков N=1000, отношение внешнего диаметра к внутреннему δ=1,6 и высота h=5,0 см.

Ответ: Φ=8 мкВб.

5. ***(Ч.21.9)*** Катушка длиной l=20 см содержит N=100 витков. По обмотке катушки идет ток силой I=5 А. Диаметр d катушки равен 20 см. Определить магнитную индукцию B вне катушки в точке, лежащей на ее оси, на расстоянии a=10 см от конца катушки.

Ответ: B=0,38 мТл.

6. ***(И.3.236)*** Соленоид небольшой длины l имеет радиус сечения R и n витков на единицу длины. По соленоиду течет постоянный ток I. Найти индукцию магнитного поля в центре соленоида.

Ответ: $B=\mu_0 nI\Big/\sqrt{1+(2R/l)^2}$.

7. ***(Ч.21.13)*** Тонкая лента шириной l=40 см свернута в трубку радиусом R=30 см. По ленте вокруг оси трубки течет равномерно распределенный по ее ширине ток I=200 А.

Определить магнитную индукцию B на оси трубки в двух точках: в средней точке и в точке, совпадающей с концом трубки.

Ответ: B=0,35 мТл, B =0,25 мТл.

8. Отношение длины катушки к ее диаметру l/D=3. Какой будет погрешность в определении индукции магнитного поля в центре катушки, если эту индукцию найти по формуле для индукции поля бесконечно длинного соленоида? Погрешность определяется по формуле $\delta=(B_2-B_1)/B_2$, где B_1 – индукция поля внутри катушки конечной длины и B_2 – индукция поля внутри бесконечно длинной катушки.

Ответ: δ=0,05.

9. Диаметр соленоида D=5 см, его длина l=20 см. Какую ошибку мы допускаем при нахождении магнитного поля в центре соленоида, принимая его за бесконечный?

Ответ: δ=0,03.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1. Внутри тонкой проводящей цилиндрической оболочки радиусом b находится коаксиальный с ней прямолинейный провод радиусом a. По этим проводникам текут постоянные токи I одинаковой величины, но противоположного направления. Определить азимутальную B_α и радиальную B_r составляющие магнитного поля $\vec{B}$, создаваемого такой системой во всех точках пространства. Магнитное поле удобно вычислять в цилиндрической системе координат, направив ось z вдоль провода.

Ответ: $B_\alpha=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a^2}r$ при $r<a$, $\quad B_\alpha=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ при $a<r<b, B_\alpha=0$ при $r>b$; $\quad B_r=0$, $B_z=0$.

2. ***(И.3.230)*** Однородный ток плотностью j течет внутри неограниченной пластины толщиной $2d$ параллельно ее поверхности. Найти индукцию магнитного поля этого тока как функцию расстояния x от средней плоскости пластины.

Ответ: $B = \begin{cases} \mu_0 jx & \text{внутри пластины,} \\ \mu_0 jd & \text{вне пластины.} \end{cases}$

3. (И.3.237б) Очень длинный прямой соленоид имеет радиус сечения R и n витков на единицу длины. По соленоиду течет постоянный ток I. Пусть x – расстояние, отсчитываемое вдоль оси соленоида от его торца. Найти расстояние x_0 от торца соленоида до точки на его оси, в которой индукция поля отличается от индукции в глубине соленоида на δ=1%.

Ответ: x_0=5R.

4. (И.3.237а) Очень длинный прямой соленоид имеет радиус сечения R и n витков на единицу длины. По соленоиду течет постоянный ток I. Пусть x – расстояние, отсчитываемое вдоль оси соленоида от его торца. Найти индукцию магнитного поля на оси соленоида как функцию x.

Ответ: $B=\frac{\mu_0}{2}nI(1-x/\sqrt{x^2+R^2})$, где $x>0$ вне соленоида и $x<0$ внутри соленоида.

5. (И.3.240) Постоянный ток I=10 А течет по длинному прямому проводнику круглого сечения. Найти магнитный поток через одну из половин осевого сечения проводника в расчете на один метр длины.

Ответ: $\Phi = \mu_0 I / 4\pi$.

6. (И.3.239) На деревянный тороид малого поперечного сечения намотано равномерно N=2,5·10^3 витков провода, по которому течет ток I. Найти отношение η индукции магнитного поля внутри тороида к индукции магнитного поля в центре тороида.

Ответ: η=800.

7. (И.3.241) Имеется очень длинный прямой соленоид с током I. Площадь поперечного сечения соленоида равна S, число витков на единицу длины – n. Найти поток вектора магнитной индукции через торец соленоида.

Ответ: $\Phi = \mu_0 nSI / 2$.

8. (И.3.235) Найти плотность тока как функцию расстояния r от оси аксиально-симметричного параллельного потока электронов, если индукция магнитного поля внутри потока зависит от r как $B = br^{\alpha}$, где b, α – положительные постоянные.

Ответ: $j(r) = \frac{b}{\mu_0}(1+\alpha)r^{\alpha-1}$.

9. (И.3.231) Постоянный ток I течет по длинному полубесконечному прямому проводу, перпендикулярному безграничной проводящей плоскости. Из точки O (рис. 6.5), где он стыкуется с плоскостью, ток растекается радиально-симметрично по безграничной плоскости. Найти индукцию магнитного поля во всех точках пространства.

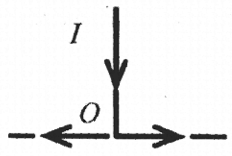

Рис.6.5

Ответ: В том полупространстве, где находится прямой провод, $B=\mu_0 I/2\pi r$, r – расстояние от провода, в другом полупространстве B=0.

Занятие 7. Магнитное поле в веществе

1. Микро- и макротоки в веществе, магнетики.
2. Вектор намагничивания.
3. Теоремы о циркуляции для вектора магнитной индукции, вектора намагничивания и вектора напряженности в магнетиках.
4. Относительная магнитная проницаемость, магнитная восприимчивость.
5. Условия на границе раздела двух магнетиков.
6. Магнитомеханические явления.
7. Диамагнетики, парамагнетики, ферромагнетики.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Вектор намагничивания равен сумме магнитных моментов $\vec{p}_m$ атомов, молекул некоторого физически малого объема V к величине этого объема:

$$\vec{J} = \frac{1}{V}\sum_V \vec{p}_m$$

2. Теорема о циркуляции для вектора магнитной индукции в магнетике

Циркуляция вектора магнитной индукции по замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости I и молекулярных токов I_m, которые охватываются контуром

$$\oint \vec{B}d\vec{l} = \mu_0(I+I_m).$$

3. Теорема циркуляции для вектора намагниченности в магнетике

Циркуляция вектора намагниченности по замкнутому контуру равна алгебраической сумме молекулярных токов I_m, которые охватываются контуром:

$$\oint \vec{J}d\vec{l} = I_m.$$

4. Теорема о циркуляции для вектора напряженности в магнетике

Циркуляция вектора напряженности по замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов проводимости I, которые охватываются контуром:

$$\oint \vec{H}d\vec{l} = I.$$

5. Относительная магнитная проницаемость, магнитная восприимчивость

В каждой точке магнетика векторы намагничивания и напряженности связаны следующим образом:

$$\vec{J} = \chi \vec{H},$$

где χ – магнитная восприимчивость. В неферромагнитной среде в случае не слишком сильных полей χ=const. Безразмерная величина $\mu=1+\chi$, показывающая, во сколько раз поле в вакууме больше, чем поле в веществе, называется относительной магнитной проницаемостью.

6. Условия на границе двух магнетиков:

$$B_{1n}=B_{2n}, \quad H_{1\tau}=H_{2\tau},$$

$$\frac{H_{1n}}{H_{2n}} = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \frac{B_{1\tau}}{B_{2\tau}} = \frac{\mu_1}{\mu_2},$$

где B_{1n}, B_{2n}, $H_{1\tau}$, $H_{2\tau}$ – соответственно нормальные и тангенциальные составляющие вектора магнитной индукции и вектора напряженности в первой и второй средах.

7. Орбитальный магнитный момент электрона:

$$p_m = e\upsilon r/2,$$

где υ – скорость движения электрона по орбите атома радиусом r.

8. Механический момент электрона:

$$L = m\upsilon r.$$

9. Гиромагнитное отношение для орбитального магнитного и механического моментов электрона:

$$\frac{p_m}{L} = -\frac{e}{2m}.$$

10. Молярная магнитная восприимчивость диамагнетика:

$$\chi_м = -e^2 Z\mu_0\langle r^2\rangle N_A/(6m),$$

где Z – число электронов в атоме, $\langle r^2\rangle$ – средний квадрат расстояния электрона до ядра, N_A – число Авогадро, m – масса электрона.

11. Молярная магнитная восприимчивость парамагнетика:

$$\chi_м = \mu_0\, p_m^2\, N_A/3kT,$$

где p_m – магнитный момент атома, k – постоянная Больцмана, T – температура.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Элементарный заряд $q=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.
Масса электрона $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг.
Магнитная постоянная $\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м.
Постоянная Планка $h=6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж/с.
Магнетон Бора $\mu_Б=0{,}927\cdot10^{-23}$ Дж/Тл.
Число Авогадро $N_A=6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$.
Постоянная Больцмана $k=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К.

Далее, при решении задач там, где это необходимо, используйте следующие основные кривые намагничивания, приведенные на рис. 7.1.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Что такое микро- и макротоки? Какова природа молекулярного тока?
2. Написать гиромагнитное отношение для орбитальных магнитного и механического моментов электрона и гиромагнитное от-

ношение для собственных спинового магнитного момента электрона и его механического момента.

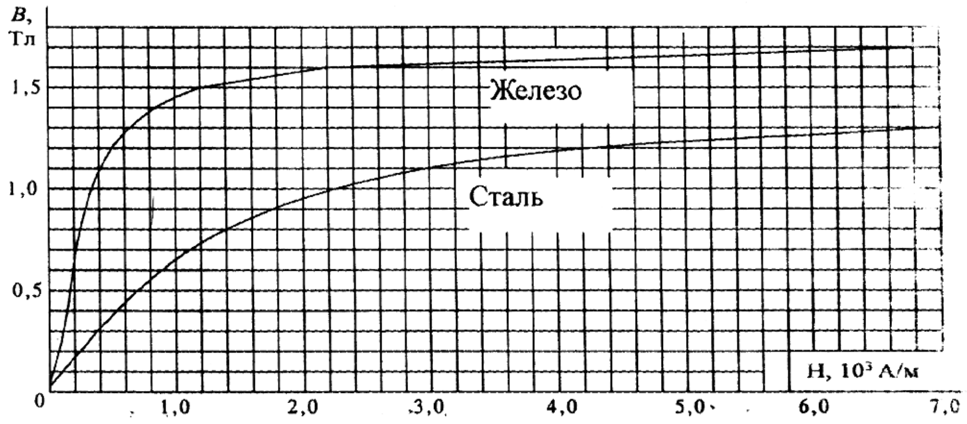

рис. 7.1

3. Что такое магнетон Бора?
4. Объяснить опыты Эйнштейна и де Хааса, Барнета, Штерна и Герлаха.
5. Пояснить природу токов в правых частях теорем о циркуляции для векторов магнитной индукции и намагничивания.
6. Написать закон преломления для силовых линий магнитной индукции. Где наблюдается сгущение этих силовых линий: в области с большей или меньшей относительной магнитной проницаемостью?
7. Объяснить процесс намагничивания парамагнетиков. Как изменяется намагниченность парамагнетика с ростом температуры?
8. Объяснить, в чем заключается явление диамагнетизма?
9. Написать уравнение движения электронной орбиты в магнитном поле. С какой частотой вращается плоскость этой орбиты вокруг направления магнитного поля?
10. Почему у атомов диамагнетика во внешнем магнитном поле индуцируется магнитный момент? Как он направлен?
11. Объяснить диамагнетизм с точки зрения явления электромагнитной индукции.

12. Какие вещества называются ферромагнетиками? Нарисовать петлю гистерезиса и объяснить, что такое основная кривая намагничивания, частный цикл, максимальная петля намагничивания?

13. Что такое остаточная намагниченность, коэрцитивная сила?

14. Что такое домены? Объяснить процесс намагничивания ферромагнетиков.

15. Как ведут себя ферромагнетики с ростом температуры?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример* 1**. ***(В. 11.50) Через центр железного кольца перпендикулярно к его плоскости проходит длинный прямолинейный провод, по которому течет ток I=25 А. Кольцо имеет четырехугольное сечение (рис. 7.2), размеры которого l_1=18 мм, l_2=22 мм и h=5 мм. Найти магнитный поток Ф, пронизывающий площадь сечения кольца, учитывая, что магнитное поле в различных точках сечения кольца различно. Значение μ считать постоянным и найти его по графику кривой $B=f(H)$ (рис. 7.1) для значения H на средней линии кольца.

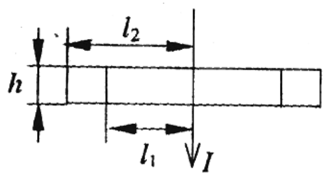

Рис.7.2

Решение. Напряженность магнитного поля, создаваемая бесконечно длинным прямолинейным проводом, равна $H=\dfrac{I}{2\pi x}$, где x – расстояние от провода до точки, в которой определяется поле. Возьмем элемент площади поперечного сечения кольца $dS=hdx$. Тогда магнитный поток сквозь этот элемент будет

$$d\Phi=BdS=\mu\mu_0\frac{I}{2\pi x}hdx.$$

Магнитный поток через все поперечное сечение кольца равен

$$\Phi=\frac{\mu_0\mu Ih}{2\pi}\int_{l_1}^{l_2}\frac{dx}{x}=\frac{\mu_0\mu Ih}{2\pi}\ln\frac{l_2}{l_1}. \qquad (7.1)$$

Вычислив напряженность $H=\dfrac{I}{\pi(l_1+l_2)}$=200 А·м на средней линии кольца, по графику кривой намагничивания (рис. 7.3) найдем значе-

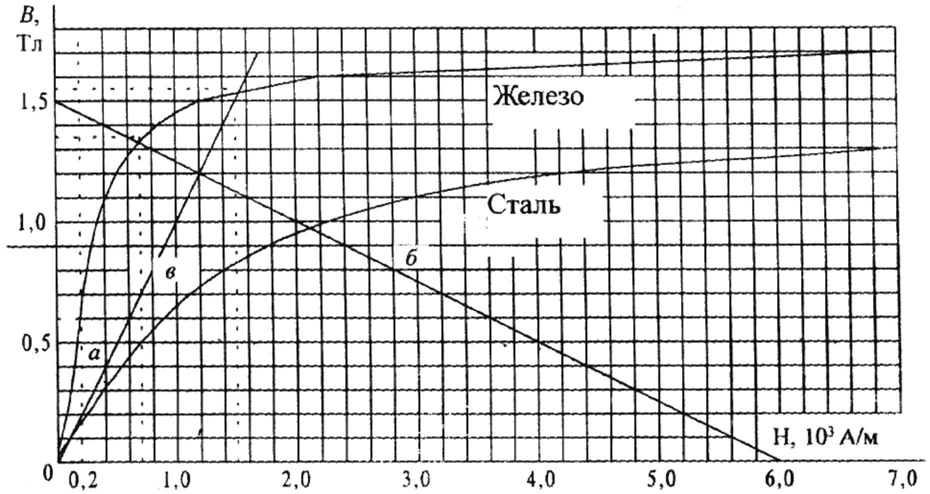

Рис. 7.3

ние магнитной индукции B. Для этого определим точку пересечения прямой H=200 А·м (на рис. 7.3 это вертикальная пунктирная прямая a) и кривой, соответствующей зависимости $B=f(H)$. Определив проекцию этой точки на ось B, найдем значение магнитной индукции B=0,6 Тл. Находя $\mu=B/\mu_0H$=2400 и подставляя остальные данные в (7.1), получим Ф=12 мкВб.

***Пример* 2**. Длина железного сердечника тороида l_1=1 м (рис. 7.4), длина воздушного зазора l_2=5 мм. Число ампер-витков тороида $IN=6\cdot10^3$ А·в. Найти индукцию магнитного поля в воздушном зазоре тороида.

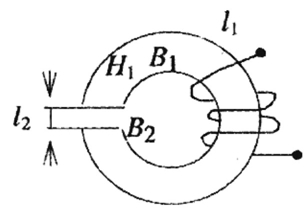

Рис. 7.4

Решение. При решении исходим из закона полного тока

$$\oint\vec{H}d\vec{l}=NI, \qquad (7.2)$$

где $\vec{H}$ – вектор напряженности магнитного поля, и условия на границе двух магнетиков для нормальной составляющей вектора магнитной индукции $\vec{B}$

$$B_{1n}=B_{2n}\,. \tag{7.3}$$

Обозначим через H_1, B_1 напряженность и индукцию магнитного поля в железе, а через H_2, B_2 - напряженность и индукцию магнитного поля в зазоре. Тогда формулу (7.2) запишем в виде

$$H_1 l_1+H_2 l_2=NI$$

Подставив в эту формулу напряженность $H_2=\dfrac{B_2}{\mu_0}$ в зазоре с учетом условия (7.3), которое в обозначениях данной задачи имеет вид $B_1=B_2$, получим

$$H_1 l_1+\frac{B_1}{\mu_0}l_2=NI. \tag{7.4}$$

Это уравнение прямой линии в координатных осях H_1, B_1 (рис. 7.3, прямая *б*). Одного уравнения (7.4) недостаточно для определения B_1. Чтобы найти B_1, воспользуемся основной кривой намагничивания $B=f(H)$ (рис. 7.3). Ордината точки пересечения прямой (5.4) и основной кривой намагничивания $B=f(H)$ дает значение магнитной индукции $B_2=B_1$. Для построения прямой по уравнению (7.4) находим

$$B=\mu_0\frac{IN}{l_2}=1{,}51 \text{ Тл при } H=0, \quad H=\frac{IN}{l_1}=6\cdot10^3 \text{ А/м при } B=0.$$

Отложив эти точки на осях B, H и проведя через них прямую линию (прямая *б*, рис. 7.3), определим искомую точку пересечения прямой (7.4) и основной кривой намагничивания $B=f(H)$. Проекция этой точки дает $B_1=B_2=1{,}35$ Тл.

***Пример* 3.** Число ампер-витков тороида с железным сердечником, имеющего воздушный зазор, равно $IN=2\cdot10^3$ А·в. Длина железного сердечника $l_1=1$ м. Найти величину воздушного зазора, если напряженность магнитного поля в зазоре больше напряженности магнитного поля в железном сердечнике в $\eta=\dfrac{10^4}{4\pi}$ раз.

***Решение*.** Обозначим через H_1, B_1 напряженность и индукцию магнитного поля в железном сердечнике, а через H_2, B_2 – напряженность и индукцию в воздушном зазоре. Напряженность и индукция в воздушном зазоре связаны соотношением $H_2=B_2/\mu_0$. Из этой формулы, учитывая равенство нормальных составляющих $B_1=B_2$ и соотношение $H_2=\eta H_1$, получим

$$B_1=\mu_0\eta H_1.$$

Это уравнение прямой линии в координатных осях H_1, B_1. Запишем его в явном виде

$$B_1=10^{-3}H_1 \tag{7.5}$$

и построим эту прямую на графике известной нелинейной зависимостью $B=f(H)$ (рис. 7.3, прямая *в*). Точка пересечения прямой (7.5) с основной кривой намагничивания $B=f(H)$ имеет следующие координаты (рис. 7.3):

$$H_1=1{,}5\cdot10^3 \text{ А/м}, \quad B_1=1{,}55 \text{ Тл}.$$

Записав закон полного тока $H_1l_1+H_2l_2=NI$ и исключив в нем $H_2==\eta H_1$, получим $H_1(l_1+\eta l_2)=IN$. Откуда

$$l_2=\frac{IN}{\eta H_1}-\frac{l_1}{\eta}=0{,}42 \text{ мм}.$$

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1. (В.11.39) Железный образец помещен в магнитное поле напряженностью $H=850$ А/м. Найти магнитную проницаемость μ железа.

Ответ: $\mu=1300$.

2. (В.11.41) Сколько ампер-витков потребуется для создания магнитного потока $\Phi=0{,}42$ мВб в соленоиде с железным сердечником длиной $l=120$ см и площадью поперечного сечения $S=3$ см^2?

Ответ: IN=1020 А·в.

3. (В.11.42) Длина железного сердечника тороида l_1=2,5 м, длина воздушного зазора l_2=1 см. Число витков в обмотке N=1000. При токе I=20 А индукция магнитного поля в воздушном зазоре B=1,6 Тл. Найти магнитную проницаемость μ железного сердечника при этих условиях. (Зависимость B от H для железа неизвестна.)

Ответ: $\mu = 440$.

4. (В.11.43) Длина железного сердечника тороида l_1=1 м, длина воздушного зазора l_2=1 см. Площадь поперечного сечения сердечника S=25 см^2. Сколько ампер-витков потребуется для создания магнитного потока Ф=1,4 мВб, если магнитная проницаемость материала сердечника μ=800?

Ответ: IN = 5000 А·в.

5. (В.11.44) Найти магнитную индукцию B в замкнутом железном сердечнике тороида длиной l=50 см, если число ампер-витков обмотки тороида IN=1500 А·в. Какова магнитная проницаемость μ материала сердечника при этих условиях?

Ответ: B =1,62 Тл; $\mu = 430$.

6. (В.11.45) Длина железного сердечника тороида l_1=1 м, длина воздушного зазора l_2=3 мм. Число витков в обмотке тороида N=2000. Найти напряженность магнитного поля H_2 в воздушном зазоре при токе I=1 А в обмотке тороида.

Ответ: H_2= 600 кА/м.

7. (В.11.46) Длина железного сердечника l_1=50 см, длина воздушного зазора l_2=2 мм. Число ампер-витков в обмотке тороида IN=2000 А·в. Во сколько раз уменьшится напряженность магнитного поля в воздушном зазоре, если при том же числе ампер-витков увеличить длину воздушного зазора вдвое?

Ответ: В 1,9 раза.

8. Сердечник тороида состоит из двух ферромагнетиков (рис. 7.5): железа длиной l_1=1,5 м и стали длиной l_2=0,3 м с основными

кривыми намагничивания, приведенными на (рис. 7.1). Обмотка тороида содержит IN=1500 ампер-витков. Найти напряженности магнитных полей H_1 в железе и H_2 в стали.

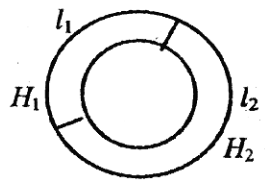

Рис. 7.5

Ответ: H_1= 400 А/м, H_2=3000 А/м.

9. (В.11.49) Через центр железного кольца перпендикулярно к его плоскости проходит длинный прямолинейный провод, по которому течет ток I=25 А. Кольцо имеет четырехугольное сечение (рис. 7.6), размеры которого R_1=18 мм, R_2=22 мм и h=5 мм. Считая приближенно, что в любой точке сечения кольца индукция одинакова и равна индукции на средней линии кольца, найти магнитный поток Ф, пронизывающий площадь сечения кольца.

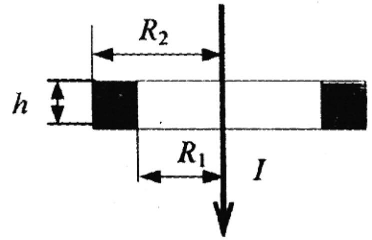

Рис.7.6

Ответ: Ф=12 мкВб.

10. (В.11.51) Замкнутый железный сердечник длиной l=50 см имеет обмотку из N=1000 витков. По обмотке течет ток I_1=1 А. Какой ток I_2 надо пустить через обмотку, чтобы при удалении сердечника индукция осталась прежней?

Ответ: I_2=630 А.

11. (Ч.27.6) Висмутовый шарик радиусом R=1 см помещен в однородное магнитное поле B_0=0,5 Тл. Определить магнитный момент p_m, приобретенный шариком, если магнитная восприимчивость висмута $\chi = -1{,}5\cdot 10^{-4}$.

Ответ: p_m=250 мкА·м^2.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ Б

1. Стальной сердечник находится в магнитном поле, величина индукции которого равна B=1 Тл. Найти магнитную проницаемость μ стали.

Ответ: μ=350.

2. ***(М.4.70)*** Замкнутый железный сердечник длиной 100 см по средней линии имеет обмотку в 3000 витков, по которой течет ток 1 А. Какой ток нужно пропустить через обмотку после удаления сердечника, чтобы индукция была равна половине первоначального значения?

Ответ: $I_2=220$ А.

3. ***(Ч.24.21)*** Тороид с железным сердечником, длина которого по средней линии l=1 м, имеет воздушный зазор l_0=4 мм. Обмотка содержит 8 витков/см. При каком токе индукция в зазоре будет равна 1 Тл?

Ответ: $I=4,4$ А .

4. Сердечник тороида состоит из двух ферромагнетиков (рис. 7.5): железа длиной l_1=1 м и стали длиной l_2=0,2 м с основными кривыми намагничивания, приведенными на (рис. 7.1). Обмотка тороида содержит IN=1000 ампер-витков. Найти напряженности магнитных полей H_1 в железе и H_2 в стали.

Ответ: H_1= 380 А/м, H_2=2800 А/м.

5. ***(Ч.24.20)*** В железном сердечнике соленоида индукция B=1,1 Тл. Железный сердечник заменили стальным. Определить, во сколько раз следует изменить силу тока в обмотке соленоида, чтобы индукция в сердечнике осталась неизменной.

Ответ: I_2/I_1 =7,5.

6. Стальное кольцо имеет воздушный зазор l_2=5 мм. Длина l_1 средней линии кольца равна 1 м. Сколько витков N содержит обмотка кольца, если при силе тока I=4 А индукция B магнитного поля в воздушном зазоре равна 0,5 Тл? Рассеянием магнитного потока в воздушном зазоре пренебречь.

Ответ: N=670.

7. Напряженность магнитного поля H_2 в воздушном зазоре тороида в $\eta=5\cdot10^3/(4\pi)$ раз больше, чем в стальном сердечнике тороида. Найти напряженности H_1 и H_2 в стальном сердечнике и в воздушном зазоре.

Ответ: H_1=1,8 кА/м, H_2=717 кА/м.

8. ***(В.11.52)*** Железный сердечник длиной l_1=50 см с воздушным зазором длиной l_2=0,1см имеет обмотку из N=20 витков. Какой ток I должен протекать по этой обмотке, чтобы в зазоре получить индукцию B_2=1,2 Тл?

Ответ: I= 60 А.

9. Определить намагниченность J тела при насыщении, если магнитный момент каждого атома равен магнетону Бора $\mu_Б$ и концентрация атомов $6\cdot10^{28}$ м$^{-3}$.

Ответ: J=556 кА/м.

10. Найти величину магнитной восприимчивости $\chi=\chi_m/V_m$, где V_m – объем одного моля водорода (диамагнетик), а средний квадрат расстояния электрона до ядра равен $\langle r^2\rangle=19,9\cdot10^{-20}$ м^2.

Ответ: $\chi=-3,1\cdot10^{-8}$.

11. Найти величину магнитной восприимчивости $\chi=\chi_m/V_m$, где V_m – объем одного моля кислорода (парамагнетик), магнитный момент молекулы которого равен $p_m=2\cdot10^{-23}$ А·м^2. Температура кислорода равна T=27 °С.

Ответ: $\chi=1,1\cdot10^{-6}$.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1. ***(И.3.277)*** Прямой бесконечно длинный проводник с током I лежит в плоскости раздела двух непроводящих сред с магнитными проницаемостями μ_1, μ_2 . Найти модуль индукции магнитного поля во всем пространстве в зависимости от расстояния r до провода. Иметь в виду, что линии вектора $\vec{B}$ являются окружностями с центром на оси проводника.

Ответ: $B=\dfrac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\dfrac{\mu_0 I}{\pi r}$.

2. ***(И 3.272)*** Постоянный магнит имеет форму достаточно тонкого диска, намагниченного вдоль его оси. Радиус диска R=1,0 см. Оценить значение молекулярного тока $I_{мол}$, текущего по ободу диска, если индукция на оси диска в точке, отстоящей на x=10 см от его центра, составляет B=30·10^{-3} Тл.

Ответ: $I_{мол} \approx \dfrac{2Bx^3}{\mu_0 R^2} = 0{,}5$ кА.

3. Сердечник тороида состоит из двух ферромагнетиков: железа длиной l=2 м и стали длиной l=0,6 м с основными кривыми намагничивания, приведенными на рис. 7.1 Обмотка тороида содержит IN=3000 витков. Найти напряженности магнитных полей H_1 в железе и H_2 в стали.

Ответ: H_1=450 А/м, H_2=3500 А/м.

4. В сильных магнитных полях или в случае низких температур магнитные моменты $\vec{p}_m$ атомов парамагнетика ориентируются вдоль направления магнитного поля или против него. Считая, что атомы распределены по этим двум направлениям в соответствии с распределением Больцмана, запишем

$$n_1 = Ae^{x}, \quad n_2 = Ae^{-x},$$

где n_1, n_2 – концентрации молекул с параллельной и антипараллельной ориентацией, $x=p_m B/kT$, $p_m=|\vec{p}_m|$, T – температура парамагнетика, A – нормировочная постоянная, определяемая условием $n_1+n_2=n$, n – полная концентрация атомов. Найти магнитную восприимчивость магнетика.

Ответ: $\chi = \dfrac{\mu_0 n p_m}{B}\,\mathrm{th}\left(\dfrac{p_m B}{kT}\right)$.

5. ***(И. 3.273)*** Индукция магнитного поля в вакууме вблизи плоской поверхности однородного изотропного магнетика равна B, причем вектор магнитной индукции составляет угол α с нормалью к поверхности. Магнитная проницаемость магнетика равна μ. Найти модуль вектора магнитной индукции B' магнитного поля в магнетике вблизи поверхности.

Ответ: $B' = B\sqrt{\mu^2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$.

6. ***(И. 3.280)*** На постоянный магнит, имеющий форму цилиндра длиной l=15 см, намотали равномерно N=300 витков тонкого провода. При пропускании по нему тока I=3,0 А поле вне магнита исчезло. Найти коэрцитивную силу H_c материала, из которого изготовлен магнит.

Ответ: H_c= 6 кА/м.

7. В однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}_0$ помещен шар из однородного и изотропного магнетика с проницаемостью μ. Определить напряженность $\vec{H}$ и индукцию $\vec{B}$ поля в магнетике.

Ответ: $\vec{H} = \dfrac{3}{\mu_0(2+\mu)}\vec{B}_0$, $\vec{B} = \dfrac{3\mu}{(2+\mu)}\vec{B}_0$.

8. ***(И. 3.278)*** Круговой контур с током лежит на плоской границе раздела вакуума и магнетика. Проницаемость последнего равна μ. Найти индукцию $\vec{B}$ магнитного поля в произвольной точке оси контура внутри магнетика, если индукция поля в этой точке в отсутствии магнетика равна $\vec{B}_0$.

Ответ: $\vec{B} = \dfrac{2\mu}{1+\mu}\vec{B}_0$.

9. ***(И 3.287)*** Небольшой шарик объемом V из парамагнетика с магнитной восприимчивостью χ медленно переместили вдоль оси катушки конечной длины с током из точки, где магнитная индукция равна B, в область, где магнитное поле практически отсутствует. Какую при этом совершили работу?

Ответ: $A=\chi V B^2/2\mu_0$.

10. (И. 3.275) Постоянный ток I течет вдоль длинного однородного цилиндрического провода круглого сечения. Провод сделан из парамагнетика с магнитной восприимчивостью χ. Найти поверхностный молекулярный ток $I_{пов}$.

Ответ: $I_{пов}=\chi I$.

МОДУЛЬ 5. Электромагнитное поле. Колебания и волны

Занятие 1. Явление электромагнитной индукции

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Сущность явления электромагнитной индукции. Правило Ленца.
2. Закон электромагнитной индукции.
3. ЭДС индукции, возникающая в проводнике, движущемся в постоянном магнитном поле.
4. Потокосцепление.
5. Количество электричества, протекающего в контуре при изменении магнитного потока.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. ЭДС индукции, возникающая в замкнутом контуре:

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где $\dfrac{d\Phi}{dt}$ – скорость изменения магнитного потока сквозь замкнутый контур.

2. ЭДС индукции, возникающая в катушке:

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Psi}{dt},$$

где $\Psi = N\Phi$ – потокосцепление катушки (полный магнитный поток), N – число витков катушки.

3. ЭДС индукции, возникающая в проводнике, движущемся в постоянном магнитном поле:

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где $d\Phi$ – магнитный поток через поверхность, заметаемую проводником при его перемещении за время dt. В случае прямого отрезка проводника из последней формулы следует, что

$$\mathscr{E} = [\vec{B}\vec{l}]\vec{\upsilon}.$$

где $\vec{B}$ – индукция постоянного магнитного поля, $\vec{l}$ – вектор длины прямолинейного проводника, $\vec{\upsilon}$ – скорость проводника.

При движении проводника в направлении, перпендикулярном проводнику, получим

$$\mathscr{E} = Bl\upsilon \sin\alpha,$$

где α – угол между вектором магнитной индукции и проводником.

4. Количество электричества, протекающего в катушке при изменении магнитного потока:

$$q = -\frac{1}{R}\Delta\Psi,$$

где R – омическое сопротивление катушки, $\Delta\Psi$ – изменение потокосцепления через катушку.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Удельное сопротивление меди $\rho = 0{,}017$ мкОм·м.

Плотность меди $\rho_0 = 8{,}6\cdot10^3$ кг/м^3.

Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Сформулируйте основной закон электромагнитной индукции.
2. Почему возникает ЭДС индукции?
3. Что означает знак минус в формуле для ЭДС индукции?
4. Является ли электрическое поле, порождаемое изменяющимся магнитным потоком, потенциальным полем?
5. Чему равна циркуляция вектора напряжённости электрического поля, вызывающего ЭДС индукции?

6. Будет ли возникать электрическое поле при изменении магнитного поля, если в пространстве, где это изменение происходит, нет проводящего замкнутого контура?
7. Что однозначно определяет ЭДС индукции в замкнутом контуре – скорость изменения потока вектора магнитной индукции или потока вектора напряжённости магнитного поля?
8. Что такое вихревые токи, при каких условиях они возникают и какую имеют природу?
9. Почему в интегральной форме уравнения Максвелла, описывающего явление электромагнитной индукции, стоит полная производная от магнитного потока по времени, а в дифференциальной форме – частная производная от магнитной индукции по времени?
10. Как используется явление электромагнитной индукции для успокоения колебаний подвижных систем электроизмерительных приборов?
11. Что такое бетатрон и как в нём используется явление электромагнитной индукции?
12. Может ли постоянное магнитное поле вызвать индукционный ток в контуре?
13. Какие обобщения были сделаны Максвеллом при рассмотрении явления электромагнитной индукции?
14. Как можно объяснить диамагнетизм с точки зрения явления электромагнитной индукции?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. В однородном магнитном поле с индукцией B=0,1 Тл равномерно вращается рамка, содержащая N=1000 витков, с частотой ν=10 с$^{-1}$. Площадь S рамки равна 150 см^2. Определить мгновенное значение ЭДС индукции $\mathscr{E}$, соответствующее углу поворота рамки 30°.

Решение. Мгновенное значение ЭДС индукции $\mathscr{E}$ определяется основным уравнением электромагнитной индукции

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Psi}{dt}. \qquad (1.1)$$

Потокосцепление $\Psi = N\Phi$, где N – число витков, пронизываемых магнитным потоком Ψ. Подставив выражение Ψ в формулу (1.1), получим

$$\mathscr{E} = -N\frac{d\Phi}{dt}. \tag{1.2}$$

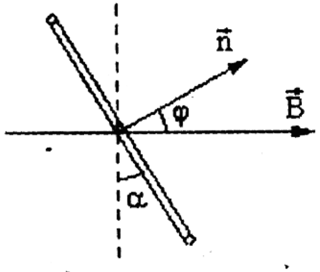

Рис. 1.1

Магнитный поток Φ, пронизывающий рамку, определяется по формуле $\Phi = BS\cos\varphi$, где B – магнитная индукция; S – площадь рамки; φ – угол между вектором индукции и нормалью к рамке (рис. 1.1).

При вращении рамки угол φ меняется, как известно, по закону

$\varphi = \varphi_0 + \omega t$,

где φ_0 – угол между вектором индукции и нормалью к рамке в начальный момент времени, ω – угловая скорость.

Полагая $\varphi_0 = 0$, получим, что при вращении рамки магнитный поток Φ, пронизывающий рамку в момент времени t, будет изменяться по закону $\Phi = BS\cos\omega t$. Подставив в формулу (1.2) выражение Φ и продифференцировав по времени, найдем мгновенное значение ЭДС индукции:

$$\mathscr{E} = NBS\omega\sin\omega t. \tag{1.3}$$

Угловая скорость ω связана с частотой вращения ν соотношением $\omega = 2\pi\nu$. Подставив выражение ω в формулу (1.3) и заменив ωt на угол α, получим

$$\mathscr{E} = 2\pi\nu NBS\sin\alpha. \tag{1.4}$$

Произведя вычисления по формуле (1.4), найдем

$$\mathscr{E} = 2\cdot 3{,}14\cdot 10\cdot 1000\cdot 0{,}1\cdot 150\cdot 10^{-4}\cdot\sin 30°\ \text{В} = 47{,}1\ \text{В}.$$

Пример 2. Катушка, состоящая из N=100 витков провода площадью S=10 см^2 каждый, помещена в однородное магнитное поле и включена в цепь баллистического гальванометра. Ось

катушки совпадает с направлением поля. При быстром повороте катушки на 180° вокруг ее диаметра через гальванометр проходит электрический заряд $q=2\cdot 10^{-6}$ Кл. Определить индукцию B магнитного поля. Сопротивление катушки и гальванометра R=5000 Ом.

Решение. При повороте катушки в магнитном поле в ней возникает кратковременный индукционный ток. Электрический заряд q, проходящий через гальванометр, можно определить по формуле

$$q = -\frac{1}{R}\Delta\Psi,$$

где R – омическое сопротивление катушки и гальванометра, $\Delta\Psi$ – изменение потокосцепления через катушку, равное

$$\Delta\Psi = N(\Phi_2 - \Phi_1),$$

где Φ_1 и Φ_2 – магнитные потоки, пронизывающие поперечное сечение катушки в ее начальном и конечном положениях, N – число витков провода в катушке.

До и после поворота плоскости витков перпендикулярны к направлению магнитного поля. Однако, если в первом случае вектор магнитной индукции $\vec{B}$ совпадает с направлением нормали к плоскостям витков, то во втором случае он направлен в противоположную сторону. Поэтому

$$\Phi_1 = BS\cos 0 = BS \quad \text{и} \quad \Phi_2 = BS\cos\pi = -BS.$$

Таким образом,

$$q = -\frac{N(-BS - BS)}{R} = \frac{2NBS}{R}$$

и

$$B = \frac{qR}{2NS}.$$

Произведя вычисления, найдём

$$B = \frac{2\cdot 10^{-6}\cdot 5\cdot 10^{3}}{2\cdot 10^{-3}\cdot 100}\ \text{Тл} = 0{,}05\ \text{Тл}.$$

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1.(В.11.93) В однородном магнитном поле с индукцией B=0,1 Тл движется проводник длиной l=*10* см. Скорость движения проводника υ=*15* м/с направлена перпендикулярно к проводнику и магнитному полю. Найти индуцированную в проводнике ЭДС.

Ответ: $\mathscr{E} = -0{,}15$ В.

2.(В.11.94) Катушка диаметром D=10 см, состоящая из N=500 витков проволоки, находится в магнитном поле, силовые линии которого перпендикулярны плоскости витков катушки. Найти среднюю ЭДС индукции $\mathscr{E}_{ср}$, возникающую в этой катушке, если индукция магнитного поля B увеличивается в течение времени t=0,1 с от 0 до 2 Тл.

Ответ: $\mathscr{E}_{ср} = 78{,}4$ В.

3.(В.11.95) Скорость самолета с реактивным двигателем υ=950 км/ч. Найти ЭДС индукции $\mathscr{E}$, возникающую на концах крыльев такого самолета, если вертикальная составляющая напряженности земного магнитного поля $H_в$=39,8 А/м и размах крыльев самолета l=12,5 м.

Ответ: $\mathscr{E}$ = 165 мВ.

4.(В.11.96) В магнитном поле, индукция которого B=0,05 Тл, вращается стержень длиной l=1 м с угловой скоростью ω=20 рад/с. Ось вращения проходит через конец стержня и параллельна магнитному полю. Найти ЭДС индукции $\mathscr{E}$, возникающую на концах стержня.

Ответ: $\mathscr{E}$ = 0,5 В.

5.(В.11.98) Круговой проволочный виток площадью S = 0,01 м^2 находится в однородном магнитном поле, индукция которого B = 1 Тл. Плоскость витка перпендикулярна к направлению магнитного поля. Найти среднюю ЭДС индукции $\mathscr{E}_{ср}$, возникающую в витке при выключении поля в течение времени t=10 мс.

Ответ: $\mathscr{E}$=1 В.

6.(В.11.99) В однородном магнитном поле, индукция которого B=0,1 Тл, равномерно вращается рамка, состоящая из N=100 витков проволоки. Частота вращения рамки ν = 5 с$^{-1}$, площадь рамки S= 0,01 м^2. Ось вращения лежит в плоскости рамки, проходит через её центр и перпендикулярна к направлению магнитного поля. Найти максимальную ЭДС индукции $\mathscr{E}_{max}$ во вращающейся рамке.

Ответ: $\mathscr{E}_{max}$=3,14 В.

7.(В.11.100) В однородном магнитном поле, индукция которого B=0,8 Тл, равномерно вращается рамка с угловой скоростью ω=15 рад/с. Площадь рамки S=150 см^2. Ось вращения находится в плоскости рамки и составляет угол α=30° с направлением магнитного поля. Найти максимальную ЭДС индукции $\mathscr{E}_{max}$ во вращающейся рамке.

Ответ: $\mathscr{E}_{max}$=0,09 В.

8.(В.11.101) Однородный медный диск A (рис.1.2) радиусом R=5 см помещен в магнитное поле с индукцией B=0,2 Тл так, что плоскость диска перпендикулярна к направлению магнитного поля. По цепи aba может идти ток (a и b – скользящие контакты). Диск вращается с частотой, ν=3 с$^{-1}$. Найти ЭДС $\mathscr{E}$ такого генератора. Указать направление электрического тока, если магнитное поле направлено от нас к чертежу, а диск вращается против часовой стрелки.

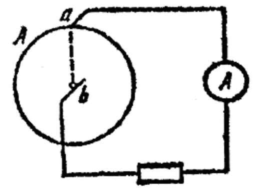

Рис.1.2

Ответ: $\mathscr{E}$=4,7 мВ.

9.(В.11.102) Горизонтальный стержень длиной l=1 м вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов. Ось вращения параллельна магнитному полю, индукция которого B=50 мкТл. При какой частоте вращения ν стержня разность потенциалов на концах этого стержня U=1мВ?

Ответ: ν =6,4 $с^{-1}$

10.(В.11.103) На соленоид длиной l=20 см и площадью поперечного сечения S=30 $см^2$ надет проволочный виток. Обмотка соленоида имеет N=320 витков, по нему идет ток I=3 А. Какая средняя ЭДС $\mathscr{E}_{ср}$ индуцируется в надетом на соленоид витке, когда ток в соленоиде выключается в течение времени t=1 мс?

Ответ: $\mathscr{E}_{ср}$=18 мВ.

11.(В.11.105) На соленоид длиной l=144 см и диаметром D=5 см надет проволочный виток. Обмотка соленоида имеет N=2000 витков и по ней течет ток I=2 А. Соленоид имеет железный сердечник. Какая средняя ЭДС $\mathscr{E}_{ср}$ индуцируется в надетом на соленоид витке, когда ток в соленоиде выключается в течение времени t=2 мс? (Зависимость $B(H)$ приведена в справочных данных к следующему занятию.)

Ответ: $\mathscr{E}_{ср}$=1,42 В.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ Б

1.(М.4.51) Рамка площадью S=50 $см^2$, содержащая N=100 витков, равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией B=40 мТл. Определить максимальную ЭДС индукции $\mathscr{E}_{max}$, если ось вращения перпендикулярна линиям индукции и лежит в плоскости рамки. Рамка вращается с частотой ν=960 об/мин.

Ответ: $\mathscr{E}_{max}$=2,01 В.

2.(М.4.52) Квадратная рамка со стороной a=20 см расположена в однородном магнитном поле так, что нормаль к рамке образует угол α=60° с направлением поля. Магнитное поле изменяется с течением времени по закону $B=B_o\cos\omega t$, где B_o=0,2 Тл и ω=300 $с^{-1}$. Определить величину ЭДС индукции $\mathscr{E}$ в рамке для момента времени t=4 с.

Ответ: $\mathscr{E}$=0,1 В.

3.(Ч.25.14) Рамка площадью S=100 $см^2$ содержит N=1000 витков провода и имеет омическое сопротивление r=12 Ом. К концам рамки подключено внешнее сопротивление R=20 Ом. Рамка равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией B=0,1 Тл вокруг оси, перпендикулярной линиям магнитной индукции; делая ν=8 об/с. Чему равно максимальное значение мощности переменного тока в цепи P_{max}?

Ответ: P_{max}=79 Вт.

4.(Ч.25.8) В однородном магнитном поле с индукцией B=1 Тл находится прямой проводник длиной l=20 см. Концы проводника замкнуты проводом, находящимся вне поля. Сопротивление всей цепи R = 0,1 Ом. Найти силу F, которую нужно приложить к проводнику, чтобы перемещать его перпендикулярно линиям магнитной индукции и проводнику со скоростью υ = 2,5 м/с.

Ответ: F=1 Н.

5.(Ч.25.9) Прямой проводник длиной l=10 см помещен в однородное магнитное поле с индукцией B=1 Тл. Концы проводника замкнуты гибким проводом, находящимся вне поля. Сопротивление всей цепи R=0.4 Ом. Какая мощность P потребуется для того, чтобы двигать проводник перпендикулярно линиям индукции и проводнику со скоростью υ=20 м/с?

Ответ: P=1 мВт.

6.(Ч.25.10) К источнику тока с ЭДС $\mathscr{E}$ = 0,5 В и ничтожно малым внутренним сопротивлением присоединены два металлических стержня, расположенных горизонтально и параллельно друг другу. Расстояние l между стержнями равно 20 см. Стержни находятся в однородном магнитном поле, направленном вертикально. Магнитная индукция B=1,5 Тл. По стержням под действием сил поля скользит со скоростью υ = 1 м/с прямолинейный провод, расположенный перпендикулярно стержням. Сопротивление провода R = 0,02 0м. Сопротивление стержней пренебрежимо мало. Определить: 1) ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$; 2) силу F, действующую на провод со стороны поля; 3) силу тока I в цепи; 4) мощность P_1, расходуемую на движение провода; 5) мощность P_2, расходуемую на нагревание провода; 6) мощность P_3, отдаваемую в цепь источника тока.

Ответ: 1) $\mathcal{E}_i$=0,3 В; 2) F=3 Н; 3) I=10 А; 4) P_1=3 Вт;

5) P_2=2 Вт; 6) P_3=5 Вт.

7.(Ч.25.12) Рамка площадью S=200 $см^2$ равномерно вращается с частотой ν=10 c^{-1} относительно оси, лежащей в плоскости рамки и перпендикулярной линиям индукции однородного магнитного поля (B= 0,2 Тл). Каково среднее значение ЭДС индукции $\langle\mathcal{E}_i\rangle$, возникающей в рамке за время, в течение которого магнитный поток, пронизывающий рамку, изменится от нуля до максимального значения?

Ответ: $\langle\mathcal{E}_i\rangle$= 0,16 В.

8.(Ч.25.15) Магнитная индукция B поля между полюсами двухполюсного генератора равна 0,8 Тл. Ротор имеет N=100 витков площадью S=400 см^2. Определить частоту ν вращения ротора, если максимальное значение ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$=200 В.

Ответ: ν=600 мин$^{-1}$.

9.(Ч.25.16) Короткая катушка, содержащая N=1000 витков, равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией B=0,04 Тл с угловой скоростью ω=5 рад/с относительно оси, совпадающей с диаметром катушки и перпендикулярной линиям индукции поля. Определить мгновенное значение ЭДС индукции $\mathcal{E}_i$ для тех моментов времени, когда плоскость катушки составляет угол α=60° с линиями индукции поля. Площадь S катушки равна 100 см^2.

Ответ: $\mathcal{E}_i$=1 В.

10.(Ч.25.17) Проволочный виток радиусом r=4 см, имеющий сопротивление R=0,01 0м, находится в однородном магнитном поле с индукцией B=0,04 Тл. Плоскость витка составляет угол α=30° с линиями индукции поля. Какое количество электричества q протечет по витку, если магнитное поле исчезнет?

Ответ: q=10 мКл.

11.(Ч.25.18) Проволочное кольцо радиусом r=10 см лежит на столе. Какое количество электричества q протечет по кольцу, если его повернуть с одной стороны на другую? Сопротивление R кольца равно 1 Ом. Вертикальная составляющая индукции B магнитного поля Земли равна 50 мкТл.

Ответ: q=3,14 мкКл.

12.(Ч.25.20) Между полюсами электромагнита помещена катушка, соединенная с баллистическим гальванометром. Ось катушки параллельна линиям индукции. Катушка сопротивлением R_1=4 0м имеет N=15 витков площадью S=2 см^2. Сопротивление R_2 гальванометра равно 46 0м. Когда ток в обмотке электромагнита выключили, по цепи гальванометра протекло количество электричества q=90 мкКл. Вычислить магнитную индукцию B поля электромагнита.

Ответ: B=1,5 Тл.

13.(Ч.25.21) Рамка из провода сопротивлением R=0,01 Ом равномерно вращается в однородном магнитном поле с индукцией B=0,05 Тл. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям индукции. Площадь рамки S=100 см^2. Найти, какое количество электричества q протечет через рамку за время поворота ее на угол α=30° в следующих трех случаях: 1) от α_o=0 до α_1=30°; 2) от α_1 до α_2=60°; 3) от α_3=90°. Отсчёт углов вести от такого положения рамки, при котором её плоскость перпендикулярна силовым линиям магнитного поля.

Ответ: 1) q=6,7 мКл; 2) q=18 мКл; 3) q=25 мКл.

14.(Ч.25.22) Тонкий медный провод массой m=1 г согнут в виде квадрата, и концы его замкнуты. Квадрат помещен в однородное магнитное поле (B=0,1 Тл) так, что плоскость его перпендикулярна линиям индукции поля. Определить количество электричества q, которое протечет по проводнику, если квадрат, потянув за противоположные вершины, вытянуть в линию.

Ответ: q=41,4 мКл.

15.(Ч.25.23) На расстоянии a=1 м от длинного прямого провода с током I=1 кА находится кольцо радиусом r=1 см. Кольцо расположено так, что поток, пронизывающий его, максимален. Определить количество электричества q, которое протечет по кольцу, когда ток в проводнике будет выключен. Сопротивление R кольца 0,01 Ом.

Указание. Поле в пределах кольца считать однородным.

Ответ: q=6,28 мкКл.

16.(Ч.25.24) По длинному прямому проводу течет ток. Вблизи провода расположена квадратная рамка из тонкого провода сопротивлением R=0,02 0м. Провод лежит в плоскости рамки и параллелен двум ее сторонам, расстояния до которых от провода соответственно равны a_1=10 см, a_2=20 см. Найти силу тока I в проводе, если при его включении через рамку протекло количество электричества q=693 мкКл.

Ответ: I=1 кА.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1.(И.3.288) Провод, имеющий форму параболы $y=ax^2$, находится в однородном магнитном поле с индукцией B, причем вектор B перпендикулярен к плоскости $x0y$. Из вершины параболы в момент t=0 начинают перемещать поступательно перемычку с постоянным ускорением ω (рис. 1.3). Найти ЭДС индукции $\mathscr{E}_i$ в образовавшемся контуре как функцию y.

Ответ: $\mathscr{E}_i = By\sqrt{8\omega/a}$.

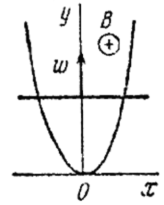

Рис. 1.3

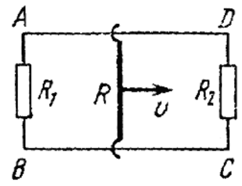

Рис. 1.4

2.(И.3.289). Прямоугольный контур со скользящей перемычкой длиной l находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости контура (рис. 1.4). Индукция поля равна B. Перемычка имеет сопротивление R, стороны AB и CD – сопротивления R_1 и R_2. Пренебрегая самоиндукцией контура, найти ток в перемычке при её поступательном перемещении с постоянной скоростью υ.

Ответ: $$I = \frac{Bl\upsilon}{R + R_1R_2/(R_1+R_2)}.$$

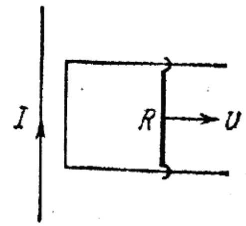

Рис. 1.5

3.(И.3.293. Длинный прямой проводник с током I и П-образный проводник с подвижной перемычкой расположены в одной плоскости, как показано на рис. 1.5. Перемычку, длина которой l и сопротивление R, перемещают вправо с постоянной скоростью υ. Найти ток $I_{инд}$, индуцируемый в контуре, как функцию расстояния r между перемычкой и прямым проводником. Сопротивление П-образного проводника и самоиндукция контура пренебрежимо малы.

Ответ: $$I_{инд} = \frac{\mu_0 l\upsilon I}{2\pi r R}.$$

4.(И.3.294) Квадратная рамка со стороной a и длинный прямой провод с током I находятся в одной плоскости, как показано на рис. 1.6. Рамку поступательно перемещают вправо с по-

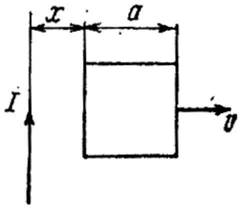

Рис.1 .6

стоянной скоростью υ. Найти ЭДС индукции в рамке как функцию расстояния x.

Ответ: $\mathscr{E}_i = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{2Ia^2\upsilon}{x(x+a)}$.

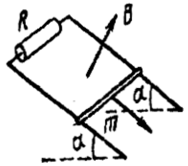

Рис. 1.7

5.(И3.296) По двум гладким медным шинам, установленным под углом α к горизонту, скользит под действием силы тяжести медная перемычка массой m (рис. 1.7). Вверху шины замкнуты на сопротивление R. Расстояние между шинами l. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B, перпендикулярном к плоскости, в которой перемещается перемычка. Сопротивления шин, перемычки и скользящих контактов, а также самоиндукция контура пренебрежимо малы. Найти установившуюся скорость перемычки υ.

Ответ: $\upsilon = \dfrac{mgR\sin\alpha}{B^2l^2}$.

6.(И.3.299) Между полюсами электромагнита находится небольшая катушка, ось которой совпадает с направлением магнитного поля. Площадь поперечного сечения катушки S=3,0 мм^2, число витков N=60. При повороте катушки на 180° вокруг ее диаметра через подключенный к ней баллистический гальванометр протекает заряд q=4,5 мкКл. Найти модуль вектора индукции магнитного поля между полюсами, если полное сопротивление электрической цепи R=40 Ом.

Ответ: $B = \dfrac{qR}{2NS} = 0{,}5$ Тл.

7.(И.3.301) Имеется длинный прямой проводник с током I_0. На расстояниях a и b от него расположены два параллельных ему провода, замкнутых на одном конце сопротивлением R (рис. 1.8). По проводам без трения перемещают с постоянной скоростью υ стержень-перемычку. Пренебрегая сопротивлением проводов, стержня и скользящих контактов, найти: а) значение и направление индукционного тока в стержне; б) силу, необходимую для поддержания постоянства скорости стержня.

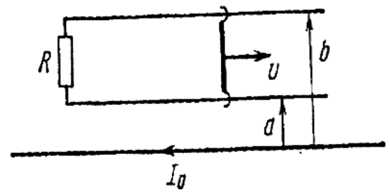

Рис. 1.8

Ответ: а) $I = \dfrac{\mu_0 I_0 \upsilon}{2\pi R}\ln\dfrac{b}{a}$; б) $F = \dfrac{\upsilon}{R}\left(\dfrac{\mu_0 I_0\upsilon}{2\pi R}\ln\dfrac{b}{a}\right)^2$.

8.(И.3.302) Проводник AB массой m скользит без трения по двум длинным проводящим рельсам, расположенным на расстоянии l друг от друга (рис. 1.9). На левом конце рельсы замкнуты сопротивлением R. Система находится в однородном магнитном поле, перпендикулярном к плоскости контура. В момент t=0 стержню AB сообщили вправо начальную скорость υ_0. Пренебрегая сопротивлением рельсов и стержня AB, а также самоиндукцией, найти: а) расстояние, пройденное стержнем до остановки; б) количество тепла, выделенное при этом на сопротивлении R.

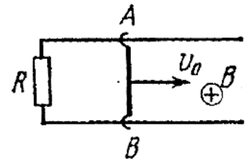

Рис. 1.9

Ответ: а) $s = \dfrac{\upsilon_o \mu R}{l^2B^2}$; б) $Q = \dfrac{m\upsilon_0^2}{2}$.

9.(И.3.309) На длинный прямой соленоид, имеющий диаметр сечения d=5 см и содержащий n=20 витков на один сантиметр длины, плотно надет круговой виток из медного провода сечением S=1,0 мм^2. Найти ток в витке, если ток в обмотке соленоида увеличивают с постоянной скоростью $\dot{I}$ =100 А/с. Индуктивностью витка пренебречь.

Ответ: $I = \dfrac{\mu_0 nSd\dot{I}}{4\rho} = 2$ мА.

10.(И.3.311) Непроводящее тонкое кольцо массой m, имеющее заряд q, может свободно вращаться вокруг своей оси. В начальный момент кольцо покоилось и магнитное поле отсутствовало. Затем включили практически однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости кольца, которое начало нарастать во времени по некоторому закону $B(t)$. Найти угловую скорость ω кольца в зависимости от индукции $B(t)$.

Ответ: $\omega = -\dfrac{q}{2m} B(t)$.

Занятие 2. Явление самоиндукции и взаимной индукции

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Сущность явления самоиндукции.
2. Индуктивность контура и катушки.
3. ЭДС самоиндукции.
4. Индуктивность соленоида и тороида.
5. Взаимная индукция.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Поток самоиндукции:

$$\Phi_c = IL,$$

где I – сила тока в замкнутом контуре, L – индуктивность контура (коэффициент самоиндукции).

2. Полный магнитный поток (потокосцепление) самоиндукции:

$$\Psi_c = IL,$$

где I – сила тока в катушке, L – индуктивность катушки.

3. ЭДС самоиндукции, возникающая в замкнутом контуре или катушке при наличии ферромагнетика:

$$\mathcal{E}_c = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right),$$

где $\dfrac{dI}{dt}$ – скорость изменения тока в контуре или в катушке,

$\dfrac{dL}{dt}$ – скорость изменения индуктивности контура или катушки.

4. ЭДС самоиндукции, возникающая в замкнутом контуре или катушке при отсутствии ферромагнетика (L=const):

$$\mathscr{E}_c = -L\frac{dI}{dt},$$

где $\frac{dI}{dt}$ – скорость изменения тока в контуре или в катушке.

5. Индуктивность длинного соленоида или тонкого тороида:

$$L = \mu_0 \mu n^2 V,$$

где μ_0 – магнитная постоянная, равная $4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м, μ – магнитная проницаемость материала сердечника, n – число витков на единицу длины, V – объём соленоида или тороида.

6. Полный магнитный поток (потокосцепление) взаимной индукции:

$$\Psi_{21} = I_1 L_{21},$$

где Ψ_{21} – полный магнитный поток (потокосцепление), вызванный током в первой катушке и пронизывающий витки второй катушки, I_1 – сила тока в первой катушке, L_{21} – взаимная индуктивность катушек.

7. ЭДС взаимной индукции:

$$\mathscr{E}_{21} = -L_{21}\frac{dI_1}{dt},$$

где $\mathscr{E}_{21}$ – ЭДС взаимной индукции, возникающая во втором контуре (катушке) за счёт изменения силы тока I_1 в первом контуре (катушке), L_{21} – взаимная индуктивность контуров (катушек).

8. Индуктивное сопротивление контура (катушки) переменному току:

$$x_L = \omega L,$$

где ω – циклическая частота переменного тока, L – индуктивность контура (катушки).

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Удельное сопротивление меди ρ=0,017 мкОм·м.

Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

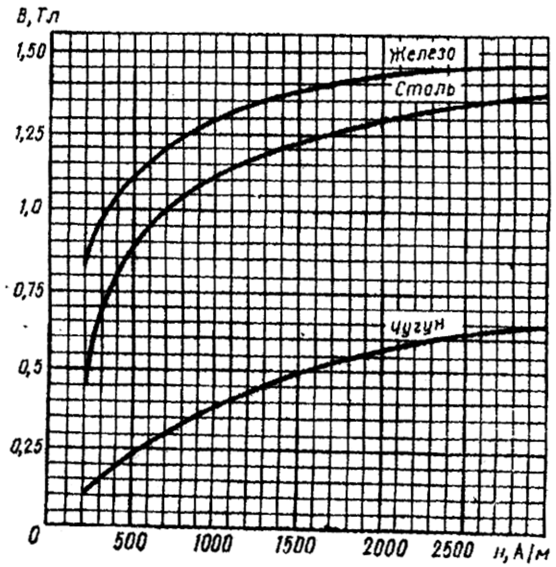

Рис. 2.1.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Сформулируйте сущность явления самоиндукции и дайте физическое объяснение явлению.
2. Как будет выглядеть выражение для ЭДС самоиндукции при наличии ферромагнетика?
3. Каков физический смысл коэффициента самоиндукции?
4. Выражение $\Phi_c = IL$ справедливо для переменного или для постоянного тока?
5. Зависит ли индуктивность контура или катушки от силы тока для случаев: а) диамагнитной среды; б) парамагнитной среды; в) ферромагнитной среды; г) вакуума?
6. Какой соленоид можно считать длинным?

7. Какой тороид можно считать тонким?

7. Чему равна индукция магнитного поля внутри и снаружи бесконечно длинного соленоида и замкнутого тороида?

8. Как объяснить наличие реактивного сопротивления контура или катушки переменному току?

9. Назовите одно или несколько применений явления самоиндукции.

10. Что такое взаимная индукция и как определить ЭДС взаимной индукции?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Обмотка соленоида состоит из одного слоя плотно прилегающих друг к другу витков медного провода диаметром d=0,2 мм. Диаметр D соленоида равен 5 см. По соленоиду течет ток I=2 А. Определить количество электричества q, протекающее через обмотку, если концы ее замкнуть накоротко. Толщиной изоляции пренебречь.

Решение. Так как при замыкании концов обмотки накоротко происходит изменение магнитного потока через сечение соленоида, то количество электричества, протекающего при этом через обмотку, можно найти по формуле

$$q = -\frac{1}{R}\Delta\Psi, \tag{2.1}$$

где R – омическое сопротивление катушки, $\Delta\Psi = \Psi_2 - \Psi_1$ – изменение потокосцепления через катушку.

Потокосцепление Ψ пропорционально силе тока в соленоиде. Следовательно, $\Psi_1 = LI$; $\Psi_2 = 0$, так как Ψ_2 соответствует тому моменту, когда ток в цепи обратится в нуль.

Таким образом, $\Delta\Psi = -LI$.

Подставив последнее выражение в формулу (2.1), получим

$$q = \frac{LI}{R}. \tag{2.2}$$

Для определения заряда, протекающего через обмотку соленоида, следует найти индуктивность L соленоида и сопротивление R обмотки соленоида, которые выражаются формулами

$$L = \mu_0 n^2 V = \mu_0 \frac{N^2}{l_1} S_1 = \frac{\mu_0 \pi D^2 N^2}{4 l_1}; \quad R = \rho\frac{l}{S} = \frac{4\rho l}{\pi d^2},$$

где μ_0 – магнитная постоянная, n – число витков на единице длины; V – объём соленоида; N – общее число витков соленоида; l_1 – длина соленоида; S_1 – площадь сечения соленоида; ρ – удельное сопротивление провода; l – длина провода; S – площадь сечения провода; d – диаметр провода; D – диаметр соленоида.

Подставив найденные выражения L и R в формулу (2.2), получим

$$q = \frac{\mu_0 \pi D^2 N^2}{4 l_1 4 \rho l} \pi d^2 I. \tag{2.3}$$

Заметим, что длина провода l может быть выражена через диаметр D соленоида соотношением $l=\pi DN$, тогда формуле (2.3) можно придать вид

$$q = \frac{\mu_0 \pi D^2 N^2 \pi d^2}{16 l_1 \rho \pi D N} I = \frac{\mu_0 \pi D N d^2}{16 l_1 \rho} I.$$

Но l_1/N есть диаметр провода, так как витки плотно прилегают друг к другу. Следовательно,

$$q = \frac{\mu_0 \pi D N d^2}{16 d \rho} I = \frac{\mu_0 \pi D d}{16 \rho} I. \tag{2.4}$$

Произведя вычисления по формуле (2.4), получим

$$q = \frac{4\cdot 10^{-7}\cdot 3{,}14^2\cdot 5\cdot 10^{-2}\cdot 0{,}2\cdot 10^{-3}\cdot 2}{16\cdot 0{,}017\cdot 10^{-6}} \text{ Кл} = 2{,}9\cdot 10^{-4}\text{ Кл}.$$

Пример 2. Две катушки намотаны на один общий сердечник. Индуктивность первой катушки L_1=0,3 Гн, второй – L_2=0,6 Гн; сопротивление второй катушки R_2=500 Ом. Какой ток

I_2 потечет во второй катушке, если ток $I_1 = 0{,}2$ А, текущий в первой катушке, выключить в течение времени t=2 мс?

Решение. Силу тока во второй катушке будем искать по закону Ома для полной цепи:

$$I_2 = \mathscr{E}_2/R_2\,, \tag{2.5}$$

где $\mathscr{E}_2$ – ЭДС взаимной индукции, индуцируемая во второй катушке за счёт изменения тока в первой катушке,

$$\mathscr{E}_2 = -L_{21}\frac{dI_1}{dt} \approx -L_{21}\frac{\Delta I_1}{\Delta t}\,, \tag{2.6}$$

где L_{21} – взаимная индуктивность второй и первой катушек, $\dfrac{\Delta I_1}{\Delta t}$ – скорость изменения силы тока в первой катушке,

$$L_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{N_2\Phi_{21}}{I_1}\,, \tag{2.7}$$

где Ψ_{21} и Φ_{21} – потокосцепление и магнитный поток, пронизывающий витки второй катушки, вызываемый током первой катушки, N_2 – число витков второй катушки,

$$\Phi_{21} = B_1 S = \mu_0\mu I_1 n_1 S\,,$$

где B_1 – индукция магнитного поля, создаваемая током первой катушки; S – площадь поперечного сечения сердечника; n_1 – число витков на единицу длины первой катушки; μ_0 – магнитная постоянная; μ – магнитная проницаемость материала сердечника.

Подставив выражение для Φ_{21} в формулу (2.7), получим

$$L_{21} = \frac{N_2\mu_0\mu I_1 n_1 S}{I_1} = \mu_0\mu n_1 n_2 Sl = \mu_0\mu n_1 n_2 V\,, \tag{2.8}$$

где n_2 – число витков на единицу длины второй катушки (n_2=$N_2 l$), l – длина сердечника, V – объём катушек (сердечника).

Индуктивности первой и второй катушек:

$$L_1 = \mu_0\mu n_1^2 V\,,\ L_2 = \mu_0\mu n_2^2 V\,.$$

Перемножив левые и правые части этих выражений, получим

$$L_1 L_2 = (\mu_0\mu)^2 n_1^2 n_2^2 V^2\,.$$

Отсюда

$$n_1 n_2 = \frac{\sqrt{L_1 L_2}}{\mu_0\mu V}\,.$$

Подставив последнее выражение в формулу (2.8), получим

$$L_{21} = \frac{\mu_0\mu V\sqrt{L_1 L_2}}{\mu_0\mu V} = \sqrt{L_1 L_2}\,. \tag{2.9}$$

Подставляя (2.6) в (2.5) и используя (2.9), окончательно имеем

$$I_2 = -\frac{L_{21}\Delta I_1}{R_2\Delta t} = -\frac{\sqrt{L_1 L_2}(0 - I_1)}{R_2\Delta t} = \frac{\sqrt{L_1 L_2}\,I_1}{R_2\Delta t}\,. \tag{2.10}$$

Подставляя числовые значения в формулу (2.10), получаем

$$I_2 = \frac{\sqrt{0{,}3\cdot 0{,}6}\cdot 0{,}2}{500\cdot 2\cdot 10^{-3}} = 0{,}085\text{ А.}$$

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1.(В.11.107) Катушка длиной l=20 см имеет N=400 витков. Площадь поперечного сечения катушки S=9 см^2. Найти индуктивность L_1 катушки. Какова будет индуктивность L_2 катушки, если внутрь катушки введен железный сердечник? Магнитная проницаемость материала сердечника μ=400.

Ответ: L_1=0,9 мГн, L_2=0,36 Гн.

2.(В.11.108) Обмотка соленоида состоит из N витков медной проволоки, поперечное сечение которой S_0=1 мм^2. Длина соленоида l=25 см, его сопротивление R=0,2 0м. Найти индуктивность L соленоида.

Ответ: L=55 мкГн.

3.(В.11.109) Катушка длиной l=20 см и диаметром D=3 см имеет N=400 витков. По катушке идет ток I=2 А. Найти индуктивность L катушки и магнитный поток Ф, пронизывающий площадь ее поперечного сечения.

Ответ: L=0,71 мГн; Ф=3,55 мкВб.

4.(В.11.110) Сколько витков проволоки диаметром d=0,6 мм имеет однослойная обмотка катушки, индуктивность которой L=1 мГн и диаметр D=4 см? Витки плотно прилегают друг к другу.

Ответ: N=380.

5.(В.11.111) Катушка с железным сердечником имеет площадь поперечного сечения S=20 см^2 и число витков N=500. Индуктивность катушки с сердечником L=0,28 Гн при токе через обмотку I=5 А. Найти магнитную проницаемость μ железного сердечника.

Ответ: μ = 655.

6.(В.11.113) Сколько витков имеет катушка, индуктивность которой L=1 мГн, если при токе I=1 А магнитный поток сквозь катушку Ф=2 мкВб?

Ответ: N=500.

7.(В.11.114). Площадь поперечного сечения соленоида с железным сердечником S=10 см^2, длина соленоида l=1 м. Найти магнитную проницаемость μ материала сердечника, если магнитный поток, пронизывающий поперечное сечение соленоида, Ф=1,4 мВб. Какому току I, текущему через соленоид, соответствует этот магнитный поток, если известно, что индуктивность соленоида при этих условиях L=0,44 Гн?

Ответ: μ = 655; I=2,3А.

8.(В.11.115) В соленоид длиной l=50 см вставлен сердечник из такого сорта железа, для которого зависимость $B=f(H)$ неизвестна. Число витков на единицу длины соленоида n=400 см$^{-1}$ площадь поперечного сечения соленоида S=10 см^2. Найти магнитную проницаемость μ материала сердечника при токе через обмотку соленоида I=5 А, если известно, что магнитный поток, пронизывающий поперечное сечение соленоида с сердечником, Ф=1,6 мВб. Какова индуктивность L соленоида при этих условиях?

Ответ: μ = 640; L= 64 мГн.

9.(В.11.116) Имеется соленоид с железным сердечником длиной l=50 см, площадью поперечного сечения S=10 см^2 и числом витков N=1000. Найти индуктивность L этого соленоида, если по обмотке соленоида течет ток: а) I=0,1 А; б) I=0,2 А; в) I=1,25 А.

Ответ: а) L=8,5 Гн; б) L=5,25 Гн; в) L=1,16 Гн.

10.(В.11.117) Две катушки намотаны на один общий сердечник. Индуктивность первой катушки L_1=0,2 Гн, второй – L_2=0,8 Гн; сопротивление второй катушки R_2=600 Ом. Какой ток I_2 потечет во второй катушке, если ток I_1=0,3 А, текущий в первой катушке, выключить в течение времени t=1 мс?

Ответ: I_2=0,2 А.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ Б

1.(Ч.25.25) По катушке индуктивностью L= 0,03 мГн течет ток I = 0,6 А. При размыкании цепи сила тока изменяется практически до нуля за время Δt =120 мкс. Определить среднюю ЭДС самоиндукции $\langle\mathcal{E}_c\rangle$, возникающую в контуре.

Ответ: $\langle\mathcal{E}_c\rangle$=0,15 В.

2.(Ч.25.26) С помощью реостата равномерно увеличивают силу тока в катушке на ΔI = 0,1 А в течение времени Δt=1 с. Индуктивность L катушки равна 0,01 Гн. Найти среднее значение ЭДС самоиндукции $\langle\mathcal{E}_c\rangle$.

Ответ: $\langle\mathcal{E}_c\rangle$=1 мВ.

3.(Ч.25.27) Индуктивность L катушки равна 2 мГн. Ток частотой ν=50 Гц, протекающий по катушке, изменяется по синусоидальному закону. Определить среднюю ЭДС самоиндукции $\langle\mathcal{E}_c\rangle$, возникающую за интервал времени Δt, в течение которого ток в катушке изменяется от минимального до максимального значения. Амплитудное значение силы тока I_0=10 А.

Ответ: $\langle\mathscr{E}_c\rangle$=4 В.

4.(Ч.25.28) Катушка сопротивлением R_1=0,5 Ом с индуктивностью L=4 мГн соединена параллельно с проводом сопротивлением R_2=2,5 Ом, по которому течет постоянный ток I=1А. Определить количество электричества q, которое будет индуцировано в катушке при размыкании цепи ключом K (рис. 2.2).

Ответ: q= 6,7 мКл.

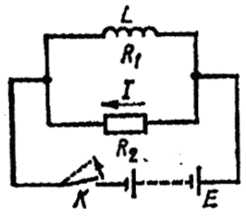

Рис. 2.2

5.(Ч.25.32) Катушка, намотанная на немагнитный цилиндрический каркас, имеет N_1=750 витков и индуктивность L_1=25 мГн. Чтобы увеличить индуктивность катушки до L_2=36 мГн, обмотку с катушки сняли и заменили обмоткой из более тонкой проволоки с таким расчетом, чтобы длина катушки осталась прежней. Определить число N_2 витков катушки после перемотки.

Ответ: N_2=900.

6.(Ч.25.33) Определить индуктивность L двухпроводной линии на участке длиной l= 1 км. Радиус R провода равен 1 мм, расстояние d между осевыми линиями равно 0,4 м.

Указание. Учесть только внутренний магнитный поток, т. е. поток, пронизывающий контур, ограниченный проводами.

Ответ: L=2,4 мГн.

7.(Ч.25.38) Соленоид содержит N=1000 витков. Площадь S сечения сердечника равна 10 см^2. По обмотке течет ток, создающий поле с индукцией B=1,5 Тл. Найти среднюю ЭДС самоиндукции $\langle\mathscr{E}_c\rangle$, возникающую в соленоиде, если ток уменьшится до нуля за время t=500 мкс.

Ответ: $\langle\mathscr{E}_c\rangle$=3 кВ.

8.(Ч.25.39) Обмотка соленоида с железным сердечником содержит N=500 витков. Длина l сердечника равна 50 см. Как и во сколько раз изменится индуктивность L соленоида, если сила тока, протекающего по обмотке, возрастет от I_1=0,2 А до I_2=1 А.

Ответ: уменьшится в 3,3 раза.

9.(Ч.25.40) Две катушки расположены на небольшом расстоянии одна от другой. Когда сила тока в первой катушке изменяется с быстротой $\dfrac{\Delta I}{\Delta t}$ = 5 А/с, во второй катушке возникает ЭДС индукции $\mathscr{E}_i$=0,1 В. Определить коэффициент L_{21} взаимной индукции катушек.

Ответ: L_{21}=20 мГн.

10.(Ч.25.41) Обмотка тороида с немагнитным сердечником имеет N_1=251 виток. Средний диаметр $\langle D\rangle$ тороида равен 8 см, диаметр d витков равен 2 см. На тороид намотана вторичная обмотка, имеющая N_2= 100 витков. При замыкании первичной обмотки в ней в течение t=1 мс устанавливается сила тока I=3 А. Найти среднюю ЭДС индукции $\langle\mathscr{E}_i\rangle$, возникающую во вторичной обмотке.

Ответ: $\langle\mathscr{E}_i\rangle$=118 мВ.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1.(И.3.319) Найти индуктивность L единицы длины кабеля, представляющего собой два тонкостенных коаксиальных металлических цилиндра, если радиус внешнего цилиндра в η= 3,6 раза больше, чем радиус внутреннего. Магнитную проницаемость среды между цилиндрами считать равной единице.

Ответ: $L = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\ln\eta$ = 0,26 мкГн/м.

2.(И.3.320) Определить индуктивность тороидального соленоида из N витков, внутренний радиус которого равен b, а поперечное сечение имеет форму квадрата со стороной a. Пространство внутри соленоида заполнено однородным парамагнетиком с магнитной проницаемостью μ.

Ответ: $L=\dfrac{\mu_0}{2\pi}\mu N^2 a\ \ln\left(1+\dfrac{a}{b}\right).$

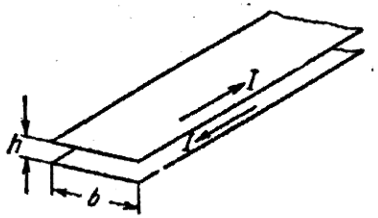

Рис. 2.3

3. (ИЗ.321) Вычислить индуктивность L единицы длины двухпроводной ленточной линии (рис. 2.3), если расстояние между лентами h значительно меньше их ширины b, а именно, $b/h = 50$.

Ответ: $L=\dfrac{\mu_0 h}{b}$=25 нГн/м.

4.(И.3.322) Найти индуктивность единицы длины двухпроводной линии, если радиус каждого провода в n раз меньше расстояния между их осями. Полем внутри проводов пренебречь, магнитную проницаемость всюду считать равной единице и $n>>1$.

Ответ: $L=\dfrac{\mu_0}{\pi}\ln(n-1).$

5.(И.3.329) Вычислить взаимную индуктивность L_{12} длинного прямого провода и прямоугольной рамки со сторонами a и b. Рамка и прямой провод лежат в одной плоскости, причем ближайшая к проводу сторона рамки длиной b параллельна проводу и отстоит от него на расстояние l.

Ответ: $L_{12}=\dfrac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\left(1+\dfrac{a}{l}\right).$

6.(И.3.330) Определить взаимную индуктивность тороидальной катушки и проходящего по ее оси бесконечного прямого провода. Катушка имеет прямоугольное сечение, ее внутренний радиус a, внешний b. Длина стороны поперечного сечения

тора, параллельная проводу, равна h. Число витков катушки N. Система находится в однородном магнетике с проницаемостью μ.

Ответ: $L_{12}=\dfrac{\mu_0\mu hN}{2\pi}\ln\left(\dfrac{b}{a}\right).$

7.(И.3.331) Два концентрических тонких проводника в форме окружностей с радиусами a и b лежат в одной плоскости. Имея в виду, что $a<<b$, найти:

а) их взаимную индуктивность;

б) магнитный поток, который пронизывает поверхность, натянутую на внешний проводник, когда по внутреннему проводнику течет ток I.

Ответ: а) $L_{12}\approx\dfrac{\mu_0\pi a^2}{2b}$; б) $\Phi_{12}=\dfrac{\mu_0\pi a^2 I}{2b}.$

8.(И.3.333) Найти приближенную формулу для взаимной индуктивности двух тонких витков одинакового радиуса a, если оси витков совпадают, а их центры находятся друг от друга на расстоянии l, причем $l>>a$.

Ответ: $L_{12}\approx\dfrac{\mu_0\pi a^4}{2l^3}.$

9.(И.3.343) Две одинаковые катушки, каждая индуктивности L, соединяют а) последовательно, б) параллельно. Считая взаимную индуктивность катушек пренебрежимо малой, найти индуктивность системы в обоих случаях.

Ответ: а) $L_{общ}=2L$; б) $L_{общ}=L/2$.

10.(И.3.344) Два соленоида одинаковой длины и почти одинакового сечения вставлены полностью один в другой. Найти их взаимную индуктивность, если их индуктивности равны L_1 и L_2.

Ответ: $L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$.

Занятие 3. Цепь с индуктивностью. Энергия магнитного поля

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Токи при замыкания и размыкании в цепи с индуктивностью.
2. Энергия магнитного поля контура с током или катушки.
3. Объёмная плотность энергии магнитного поля.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Ток в цепи с индуктивностью при включении источника постоянного тока:

$$I = I_0\left[1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right],$$

где I – сила тока после включения в произвольный момент времени t; I_0 – установившееся значение тока (при $t \to \infty$), R – сопротивление цепи после включения источника; L – индуктивность цепи.

2. Ток в цепи с индуктивностью при выключении источника постоянного тока:

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{R}{L}t\right),$$

где I – сила тока после выключения источника и замыкания цепи в момент времени t; I_0 – начальное значение тока; R – сопротивление цепи после выключения источника и замыкания цепи; L – индуктивность цепи.

3. Энергия магнитного поля контура или катушки с током

$$W = \frac{LI^2}{2}.$$

4. Объёмная плотность энергии магнитного поля:

$$w=\frac{\mu_0\mu H^2}{2}=\frac{B^2}{2\mu_0\mu}=\frac{BH}{2},$$

где μ_0 – магнитная постоянная, равная $4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м, μ – магнитная проницаемость магнетика.

5. Энергия однородного магнитного поля:

$$W=\frac{\mu_0\mu H^2}{2}V=\frac{B^2}{2\mu_0\mu}V=\frac{BH}{2}V,$$

где V – объём той части пространства, в которой необходимо найти энергию.

6. Энергия неоднородного магнитного поля:

$$W=\int_V w dV$$

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Удельное сопротивление меди $\rho = 0{,}017$ мкОм·м.
Плотность меди $\rho_0 = 8{,}6\cdot10^3$ кг/м^3.
Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Изобразите примеры схем, с помощью которых реализуются токи включения и выключения цепи с индуктивностью.
2. Что такое постоянная времени в цепи с индуктивностью?
3. Как физически объяснить постепенное нарастание и спад тока при включении и выключении соответственно источника постоянной ЭДС в цепи с индуктивностью?
4. Как влияют величины индуктивности и активного сопротивления цепи на скорость нарастания и спада тока (объяснить физически, не обращаясь к формулам)?

5. Как рассчитать энергию катушки или контура с током, если среда ферромагнитна?
6. Как найти энергию прямого проводника с током?
7. Можно ли пользоваться выражениями для плотности энергии, приведенными выше, для неоднородного магнитного поля.
8. Изменяется ли энергия магнитного поля постоянного полоскового магнита: а) при введении его в замкнутый контур или катушку; б) при замыкании или размыкании контура или катушки с введённым магнитом?
9. Куда уходит энергия магнитного поля из окружающего пространства при сложении вместе (параллельно) двух полосковых магнитов противоположными полюсами (магнитное поле вокруг магнитов при этом исчезает); откуда снова появляется энергия при их разъединении?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. На стержень из немагнитного материала длиной l=50 см намотан один слой провода так, что на каждый сантиметр длины стержня приходится 20 витков. Определить энергию W магнитного поля внутри соленоида, если сила тока в обмотке I равна 0,5 А. Площадь сечения стержня S равна 2 см^2.

Решение. Энергия магнитного поля соленоида с индуктивностью L, по обмотке которого течет ток I, выражается формулой

$$W=\frac{LI^2}{2}. \qquad (3.1)$$

Индуктивность соленоида в случае немагнитного сердечника зависит только от числа витков n на единицу длины и от объема V сердечника: $L=\mu_0 n^2 V$, где μ_0 – магнитная постоянная. Подставив выражение индуктивности L в формулу (3.1), получим

$$W = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 V I^2.$$

Учтя, что $V=lS$, запишем

$$W = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 S l. \qquad (3.2)$$

Сделав вычисления по формуле (3.2), найдем

$$W = \frac{4\cdot 3{,}14\cdot 10^{-7}\cdot(20\cdot 100)^2\cdot 0{,}5^2\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot 0{,}5}{2} = 1{,}26\cdot 10^{-4}\text{ Дж}.$$

Пример 2. По обмотке длинного соленоида со стальным сердечником течет ток I=2А. Определить объемную плотность энергии магнитного поля в сердечнике w, если число n витков на каждом сантиметре длины соленоида равно 7.

Решение. Объемная плотность энергии магнитного поля определяется по формуле

$$w = \frac{BH}{2}, \qquad (3.3)$$

где B и H – напряженность и индукция магнитного поля соответственно.

Напряженность H магнитного поля найдем по формуле

$$H=nI.$$

Подставив в неё значения n (n = 7 см$^{-1}$=700 м$^{-1}$) и I, найдем

$$H= 700\cdot 2 \text{ А/м} =1400 \text{ А/м}.$$

Магнитную индукцию B определим по графику зависимости B от H (см. справочный материал к 5-му занятию). Находим, что напряженности H=1400 А/м соответствует магнитная индукция B=1,2 Тл.

Произведя вычисление по формуле (3.3), найдем объемную плотность энергии:

$$w = \frac{1{,}2\cdot 1400}{2}\text{ Дж/м}^3 = 840\text{ Дж/м}^3.$$

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

В задачах этой группы при необходимости применять зависимость B(H), приведенную в справочных данных к предыдущему занятию.

1.(Ч.26.4) На железное кольцо намотано в один слой N=200 витков. Определить энергию W магнитного поля, если при токе I=2,5 А магнитный поток Ф в железе равен 0,5 мВб.

Ответ: W =0,125 Дж.

2.(Ч.26.5) По обмотке тороида течет ток силой I=0,56 А. Витки провода диаметром d=0,4 мм плотно прилегают друг к другу (толщиной изоляции пренебречь). Найти энергию W магнитного поля в стальном сердечнике тороида, если площадь S сечения его равна 4 см^2, диаметр D средней линии равен 30 см.

Ответ: W=317 мДж.

3.(Ч.26.6) При индукции B поля, равной 1 Тл, плотность энергии w магнитного поля в железе равна 200 Дж/м^3. Определить магнитную проницаемость μ железа при этих условиях.

Ответ: $\mu=2\cdot 10^3$.

4.(Ч.26.2) Индуктивность L катушки (без сердечника) равна 0,1 мГн. При какой силе тока I энергия W магнитного поля равна 100 мкДж?

Ответ: I= 1,4 А.

5.(Ч.26.3) Соленоид содержит N=1000 витков. Сила тока I в его обмотке равна 1 А, магнитный поток Ф, пронизывающий поперечное сечение соленоида, равен 0,1 мВб. Вычислить энергию W магнитного поля.

Ответ: W=50 мДж.

6.(В.11.125) Электрическая лампочка, сопротивление которой в горячем состоянии R=10 Ом, подключается через дроссель к 12-вольтовому аккумулятору. Индуктивность дросселя L=2 Гн, сопротивление r=1 Ом. Через какое время t после включения лампочка загорится, если она начинает заметно светиться при напряжении на ней U=6 В?

Ответ: t=0,145 с.

7.(В.11.126) Имеется катушка длиной l=20 см и диаметром D=2 см. Обмотка катушки состоит из N=200 витков медной проволоки, площадь поперечного сечения которой s=1 мм^2. Катушка включена в цепь с некоторой ЭДС. При помощи переключателя ЭДС выключается, и катушка замыкается накоротко. Через какое время t после выключения ЭДС ток в цепи уменьшится в 2 раза?

Ответ: $t = 2{,}56\cdot10^{-4}$ с.

8.(В.11.127) Катушка имеет индуктивность L=0,2 Гн и сопротивление R=1,64 Ом. Во сколько раз уменьшится ток в катушке через время t=0,05 с после того, как ЭДС выключена и катушка замкнута накоротко?

Ответ: В 1,5 раза.

9.(В.11.128) Катушка имеет индуктивность L=0,144 Гн и сопротивление R=10 Ом. Через какое время t после включения в катушке потечет ток, равный половине установившегося?

Ответ: t=10 мс.

10.(В.11.131) Через катушку, индуктивность которой L=21 мГн, течет ток, изменяющийся со временем по закону $I=I_o\sin\omega t$, где I_o=5 А, $\omega=2\pi/T$ и T=0,02 с. Найти зависимость от времени t: а) ЭДС самоиндукции $\mathscr{E}_c$, возникающей в катушке; б) энергии W магнитного поля катушки.

Ответ: а) $\mathscr{E}_c = -33\cos100\pi t$ В; б) $W=LI^2/2=0{,}263\sin^2 100\pi t$ Дж.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ Б

В задачах этой группы при необходимости применять зависимость B(H), приведенную в справочных данных к предыдущему занятию.

1.(В.11.40) Сколько ампер-витков потребуется для того, чтобы внутри соленоида малого диаметра и длиной l=30 см объемная плотность энергии магнитного поля была равна w=1,75 Дж/м^3?

Ответ: IN=500 А·в.

2.(В.11.112) Соленоид длиной l=50 см и площадью поперечного сечения S=2 см^2 имеет индуктивность L=0,2 мкГн. При каком токе I объемная плотность энергии магнитного поля внутри соленоида w =1 мДж/м^3?

Ответ: I=1 А.

3.(Ч.26.1) По обмотке соленоида индуктивностью L=0,2 Гн течет ток I=10 А. Определить энергию W магнитного поля соленоида.

Ответ: W=10 Дж.

4.(Ч.26.7) Определить объемную плотность энергии w магнитного поля в стальном сердечнике, если индукция B магнитного поля равна 0,5 Тл.

Ответ: w =50 Дж/м^3.

5.(Ч.26.8) Индукция магнитного поля тороида со стальным сердечником возросла от B_1=0,5 Тл до B_2=1 Тл. Найти, во сколько раз изменилась объемная плотность энергии w магнитного поля .

Ответ: увеличилась в 6,4 раза.

6.(Ч.26.10) Напряженность магнитного поля тороида со стальным сердечником возросла от H_1=200 А/м до H_2=800 А/м. Определить, во сколько раз изменилась объемная плотность энергии w магнитного поля .

Ответ: увеличилась в 8,4 раза.

7.(Ч.26.11) При некоторой силе тока I плотность энергии w магнитного поля соленоида (без сердечника) равна 0,2 Дж/м^3. Во сколько раз увеличится плотность энергии поля при той же силе тока, если соленоид будет иметь железный сердечник?

Ответ: в $1{,}6\cdot10^3$ раза.

8.(Ч.26.12) Найти плотность энергии w магнитного поля в железном сердечнике соленоида, если напряженность H намагничивающего поля равна 1,6 кА/м.

Ответ: w =1,1 кДж/м^3.

9.(Ч.26.13) Обмотка тороида с немагнитным сердечником имеет n=10 витков на каждый сантиметр длины. Определить плотность энергии w поля, если по обмотке течет ток I=16 А.

Ответ: w=161 Дж/м^3.

10.(Ч.26.14) Обмотка тороида содержит n=10 витков на каждый сантиметр длины. Сердечник немагнитный. При какой силе тока I в обмотке плотность энергии w магнитного поля равна 1 Дж/м^3?

Ответ: I=1,26 А.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

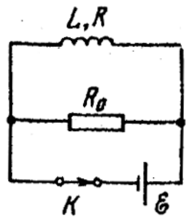

Рис. 3.1

1.(И.3.335) Катушка индуктивностью L=2,0 мкГ и сопротивлением R=1,0 Ом подключена к источнику постоянной ЭДС $\mathscr{E}$=3,0 В (рис. 3.1). Параллельно катушке включено сопротивление R_0=2,0 Ом. Найти количество тепла, которое выделится в катушке после размыкания ключа K. Внутреннее сопротивление источника пренебрежимо мало.

Ответ: Q=3 мкДж.

2. (И.3.336) На железный тор намотано N=500 витков. Найти энергию магнитного поля, если при токе I=2,0 А магнитный поток через поперечное сечение тора Ф=1,0 мВб.

Ответ: W=0,5 Дж.

3.(И.3.342) Исходя из выражения для объемной плотности магнитной энергии, показать, что работа, затрачиваемая на намагничивание единицы объема пара- или диамагнетика, $A=-JB/2$.

4.(И.3.346) Найти энергию W_{12} взаимодействия двух контуров с токами I_1 и I_2, если оба контура имеют вид окружностей с радиусами a и b ($a \ll b$), центры этих контуров находятся в одной точке и плоскости контуров составляют друг с другом угол α.

Ответ: $W_{12}=\dfrac{\mu_0\pi a^2}{2b}I_1I_2\cos\alpha$.

5.(И.3.298) Провод, согнутый в форме полуокружности радиусом a, вращают вокруг оси OO′ с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией B (рис. 3.2). Ось вращения перпендикулярна к направлению поля. Сопротивление всей цепи равно R. Пренебрегая магнитным полем индуцируемого тока, найти среднее за период вращения значение тепловой мощности, выделяемой в контуре.

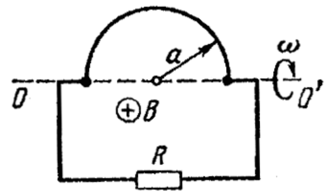

Рис. 3.2

Ответ: $\langle P\rangle=\dfrac{(\pi\omega a^2B)^2}{2R}$.

6.(И.3.317) Катушку индуктивностью L=300 мГ и сопротивлением R=140 мОм подключили к источнику постоянного напряжения. Через сколько времени ток, протекающий через катушку, достигнет η=50% от установившегося значения?

Ответ: t=1,5 с.

7.(И.3.318) Вычислить постоянную времени τ прямого соленоида длиной l=1,0 м, имеющего однослойную обмотку из медного провода массой m=1,0 кг. Предполагается, что диаметр сечения соленоида значительно меньше его длины.

Примечание. Постоянной времени τ называют отношение L/R, где L – индуктивность, R – активное сопротивление.

Ответ: τ = 0,7 мс.

8.(И.3.326) Замкнутая цепь состоит из последовательно включенных источника постоянной ЭДС $\mathscr{E}$ и дросселя индуктивности L. Активное сопротивление всей цепи равно R. В момент t=0 индуктивность дросселя скачком уменьшили в η раз. Найти ток в цепи как функцию времени t.

Указание. При скачкообразном изменении индуктивности полный магнитный поток (потокосцепление) остается неизменным.

Ответ: $I = \mathcal{E}\dfrac{1+(\eta-1)e^{-t\eta R/L}}{R}$.

9.(И.3.327) Найти закон изменения во времени тока, текущего через индуктивность L в схеме на рис. 3.3, после замыкания ключа K в момент $t = 0$.

Ответ: $I = \mathcal{E}\dfrac{1-e^{-tR/2L}}{R}$.

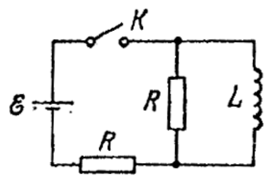

Рис. 3.3

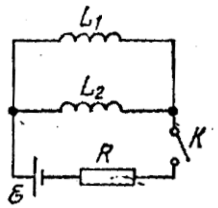

Рис. 3.4

10.(И.3.328) В схеме рис. 3.4 известны ЭДС источника, сопротивление R и индуктивности катушек L_1 и L_2. Внутреннее сопротивление источника и сопротивления катушек пренебрежимо малы. Найти установившиеся токи в катушках после замыкания ключа K.

Ответ: $I_1 = \mathcal{E}\dfrac{L_2}{R(L_1+L_2)}$, $\quad I_2 = \mathcal{E}\dfrac{L_1}{R(L_1+L_2)}$.

Занятие 4. Свободные механические и электромагнитные колебания

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Уравнение гармонических колебаний.
2. Скорость и ускорение колеблющейся точки.
3. Сила, вызывающая гармоническое колебание.
4. Энергия гармонических колебаний.
5. Гармонические осцилляторы (пружинный, математический и физический маятники, идеальный колебательный контур).

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Уравнение кинематики свободного гармонического колебательного движения:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $x(t)$ – отклонение колеблющейся точки от положения равновесия в момент времени t; A –амплитуда колебания; ω – циклическая частота; φ_0 – начальная фаза.

2. Скорость колеблющейся точки:

$$\upsilon(t) = A\omega\cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right).$$

3. Ускорение колеблющейся точки:

$$a(t) = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi).$$

4. Сила, вызывающая гармоническое колебание (сила упругости или квазиупругая сила):

$$F = -kx,$$

где k – жёсткость пружины или коэффициент квазиупругой силы; x – отклонение колеблющейся точки от положения равновесия.

5. Связь циклической частоты и периода колебаний:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

6. Связь частоты и периода колебаний:

$$\nu = \frac{1}{T}.$$

7. Период колебаний пружинного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}},$$

где m – масса колеблющегося тела; k – жёсткость пружины.

8. Период колебаний математического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l – длина нити; g – ускорение свободного падения.

9. Период колебаний физического маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgL}},$$

где J – момент инерции физического маятника относительно оси вращения; m – масса маятника; L – расстояние от оси вращения до центра тяжести.

10. Приведённая длина физического маятника:

$$l_{\text{пр}} = \frac{J}{mL}.$$

11. Период электромагнитных колебаний в идеальном колебательном контуре:

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

где L и C – индуктивность и ёмкость колебательного контура.

12. Напряжение на конденсаторе после замыкания ключа в идеальном колебательном контуре:

$$U_C = U_{0C}\cos\omega t,$$

где U_{0C} – напряжение на конденсаторе в начальный момент или амплитудное значение напряжения на конденсаторе.

13. Сила тока смещения в конденсаторе:

$$I_C = C\frac{dU_C}{dt}.$$

14. Кинетическая энергия свободных механических колебаний:

$$E_{кин}(t) = \frac{m\upsilon^2(t)}{2} = \frac{m\omega A^2}{4}[1+\cos(2\omega t+\pi)].$$

15. Потенциальная энергия свободных механических колебаний:

$$E_{пот}(t) = \frac{kx^2(t)}{2} = \frac{m\omega A^2}{4}(1+\cos 2\omega t).$$

16. Полная энергия свободных механических колебаний:

$$E = E_{пот}(t) + E_{кин}(t) = \frac{m\omega A^2}{2}.$$

17. Энергия электрического поля свободных электромагнитных колебаний в идеальном колебательном контуре:

$$E_{эл} = \frac{CU_{0C}^2}{4}(1+\cos 2\omega t).$$

18. Энергия магнитного поля свободных электромагнитных колебаний в идеальном колебательном контуре:

$$E_{маг} = \frac{LI_0^2}{4}[1+\cos(2\omega t+\pi)],$$

где I_0 – амплитудное значение тока в контуре.

19. Полная энергия свободных электромагнитных колебаний в идеальном колебательном контуре:

$$E_{полн} = \frac{CU_{0C}^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2}.$$

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Плотность меди $\rho_o = 8{,}6\cdot10^3$ кг/м^3.

Удельное сопротивление меди $\rho = 0{,}017$ мкОм·м.

Плотность алюминия $\rho_o = 2{,}6\cdot10^3$ кг/м^3.

Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Какие колебания называются гармоническими?
2. Дайте определение амплитуды и фазы гармонических колебаний.
3. Что такое частота колебаний?
4. Каков физический смысл циклической частоты колебаний?
5. Чему равно изменение фазы колебаний за время, равное периоду?
6. Что называется свободным колебанием?
7. При каких условиях свободные колебания математического и физического маятника можно считать гармоническими?
8. При каких условиях колебания пружинного маятника можно считать гармоническими?
9. Что означает требование малости амплитуды (по сравнению с чем?) и к каким колебательным системам оно относится?
10. Что такое приведённая длина физического маятника?
11. Почему в формулу полной энергии гармонических колебаний не входит время в отличие от формул кинетической и потенциальной энергий, а также энергий магнитного и электрического полей колебательного контура?

12. Как определить, что записывать в уравнении гармонических колебаний – закон синуса или косинуса? В каких случаях это имеет значение?
13. Объясните, какие физические процессы определяют механизм работы идеального колебательного контура.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Материальная точка массой m=5 г совершает гармонические колебания с частотой ν=0,5 Гц. Амплитуда колебаний A=3 см. Определить: 1) скорость υ точки в момент времени, когда смещение x=1,5 см; 2) максимальную силу F_{max}, действующую на точку; 3) полную энергию E колеблющейся точки.

Решение. Уравнение гармонического колебания имеет вид

$$x = A\cos(\omega t + \varphi), \tag{4.1}$$

а формулу скорости получим, взяв первую производную по времени от смещения:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi). \tag{4.2}$$

Чтобы выразить скорость через смещение, надо исключить из формул (4.1) и (4.2) время. Для этого возведем оба уравнения в квадрат, разделим первое на A^2, второе на $A^2\omega^2$ и сложим:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{A^2\omega^2} = 1, \text{ или } \frac{x^2}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{4\pi^2\nu^2 A^2} = 1.$$

Решив последнее уравнение относительно υ, найдем

$$\upsilon = \pm 2\pi\nu\sqrt{A^2 - x^2}.$$

Выполнив вычисления по этой формуле, получим

$$\upsilon = \pm 2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}5\sqrt{3^2 - 1{,}5^2} \text{ см/с} = \pm 8{,}2 \text{ см/с}.$$

Знак плюс соответствует случаю, когда направление скорости совпадает с положительным направлением оси x, знак минус – когда направление скорости совпадает с отрицательным направлением оси x.

Смещение при гармоническом колебании, кроме уравнения (4.1), может быть определено также уравнением

$$x = A\sin(\omega t + \varphi).$$

Повторив с этим уравнением такое же решение, получим тот же ответ. Силу, действующую на точку, найдем по второму закону Ньютона:

$$F = ma, \qquad (4.3)$$

где a – ускорение точки, которое получим, взяв производную по времени от скорости:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \varphi), \text{ или}$$

$$a = -4\pi^2\nu^2 A\cos(\omega t + \varphi).$$

Подставив выражение ускорения в формулу (4.3), получим

$$F = -4\pi^2\nu^2 mA\cos(\omega t + \varphi).$$

Отсюда максимальное значение силы равно

$$F_{max} = 4\pi^2\nu^2 mA.$$

Подставив в это уравнение численные значения, найдем

$$F_{max} = 4\cdot 3{,}14^2\cdot 0{,}5^2\cdot 5\cdot 10^{-3}\cdot 3\cdot 10^{-2}\,\text{Н} = 1{,}48\cdot 10^{-3}\,\text{Н}.$$

Полная энергия колеблющейся точки есть сумма кинетической и потенциальной энергий, вычисленных для любого момента времени.

Проще всего вычислить полную энергию в момент, когда кинетическая энергия достигает максимального значения. В этот момент потенциальная энергия равна нулю. Поэтому полная энергия E колеблющейся точки равна максимальной кинетической энергии T_{max}:

$$E = T_{max} = \frac{m\upsilon_{max}^2}{2}. \qquad (4.4)$$

Максимальную скорость определим из формулы (4.2), положив $\sin(\omega t + \varphi) = 1$:

$$\upsilon_{max} = 2\pi\nu A.$$

Подставив выражение скорости в формулу (4.4), найдем

$$E = 2\pi^2\nu^2 mA^2.$$

Подставив численные значения в эту формулу и произведя вычисления, получим

$$E = 2\cdot 3{,}14^2\cdot 5\cdot 10^{-3}\cdot 0{,}5^2\cdot (3\cdot 10^{-2})^2\ \text{Дж} = 22\cdot 10^{-6}\,\text{Дж},$$

или $E = 22{,}1$ мкДж.

Пример 2. Конденсатор емкостью C =300 нФ заряжается до напряжения U_{0C}=10 В и замыкается на катушку с индуктивностью L=25 мкГн. Чему равна амплитуда I_0 силы тока в образовавшемся колебательном контуре? Активным сопротивлением контура пренебречь.

Решение. Сила тока в конденсаторе равна

$$I = C\frac{dU_C}{dt}.$$

После замыкания конденсатора на катушку напряжение на нём изменяется со временем по закону

$$U_C = U_{0C}\cos\omega t.$$

Подставляем это выражение в предыдущую формулу и получаем:

$$I = -CU_{0C}\,\omega\sin\omega t.$$

Отсюда видно, что амплитуда тока

$$I = CU_{0C}\,\omega = CU_{0C}\frac{1}{\sqrt{LC}} = U_{0C}\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Подставив численные значения в эту формулу и произведя вычисления, получим

$$I_0 = 10\sqrt{\frac{300\cdot 10^{-9}}{25\cdot 10^{-6}}}\ \text{А} = 1{,}1\ \text{А}.$$

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1.(В.3.45) Однородный стержень длиной l=0,5 м совершает малые колебания в вертикальной плоскости около горизонтальной оси, проходящей через его верхний конец. Найти период колебаний T стержня.

Ответ: T=1,16 с.

2.(В.3.47) На концах вертикального стержня укреплены два груза. Центр масс грузов находится ниже середины стержня на расстоянии d=5 см. Найти длину l стержня, если известно, что период малых колебаний стержня с грузами вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину, T=2 с. Массой стержня пренебречь по сравнению с массой грузов.

Ответ: l=0,446 м.

3.(В.3.48) Обруч диаметром D=56,5 см висит на гвозде, вбитом в стену, и совершает малые колебания в плоскости, параллельной стене. Найти период колебаний T обруча.

Ответ: T=1,5 с.

4.(В.3.49) Какой наименьшей длины l надо взять нить, к которой подвешен однородный шарик диаметром D=4 см, чтобы при определении периода малых колебаний T шарика можно было рассматривать его как математический маятник? Ошибка δ при таком допущении не должна превышать 1%.

Ответ: l= 0, 069 м.

5.(В.3.50) Однородный шарик подвешен на нити, длина которой l равна радиусу шарика R. Во сколько раз период малых колебаний T_1 этого маятника больше периода малых колебаний T_2 математического маятника с таким же расстоянием от центра масс до точки подвеса?

Ответ: T_1/T_2=1,05.

6.(В.12.24) К пружине подвешен груз. Максимальная кинетическая энергия колебаний груза $W_{к\,max}$=1 Дж. Амплитуда колебаний A=5 см. Найти жесткость k пружины.

Ответ: k=800 Н/м.

7.(В.12.26) Медный шарик, подвешенный к пружине, совершает вертикальные колебания. Как изменится период колебаний, если к пружине вместо медного шарика подвесить алюминиевый такого же радиуса?

Ответ: уменьшится в 1,8 раза.

8.(В.14.9). Найти отношение энергии магнитного поля колебательного контура к энергии его электрического поля $W_м/W_{эл}$ для момента времени $T/8$.

Ответ: $W_м/W_{эл}$=1.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ Б

1.(Ч.6.2) Определить период T, частоту ν и начальную фазу φ колебаний, заданных уравнением $x = A\sin\omega(t+\tau)$, где ω=2,5π с$^{-1}$, τ=0,4 с.

Ответ: T=0,8 с; ν=1,24 Гц; φ=π рад.

2.(Ч.6.8) Определить максимальные значения скорости υ_{max} и ускорения a_{max} точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой A=3 см и циклической частотой $\omega = \dfrac{\pi}{2}$ с$^{-1}$.

Ответ: υ_{max} =4,71 см/с; a_{max} =7,40 см/с^2.

3.(Ч.6.37) К спиральной пружине подвесили грузик, в результате чего пружина растянулась на x=9 см. Каков будет период T колебаний грузика, если его немного оттянуть вниз и затем отпустить?

Ответ: T =0,6 с.

4.(Ч.6.38) Гиря, подвешенная к пружине, колеблется по вертикали с амплитудой A=4 см. Определить полную энергию E колебаний гири, если жесткость k пружины равна 1 кН/м.

Ответ: E =0,8 Дж.

5.(Ч.6.40) Математический маятник длиной l=1 м установлен в лифте. Лифт поднимается с ускорением a=2,5 м/с^2. Определить период T колебаний маятника.

Ответ: T =1,8 с.

6.(Ч.6.47) Из тонкого однородного диска радиусом R=20 см вырезана часть, имеющая вид круга радиусом r=10 см, так, как это показано на рис. 4.1. Оставшаяся часть диска колеблется относительно горизонтальной оси O, совпадающей с одной из образующих цилиндрической поверхности диска. Найти период T колебаний такого маятника.

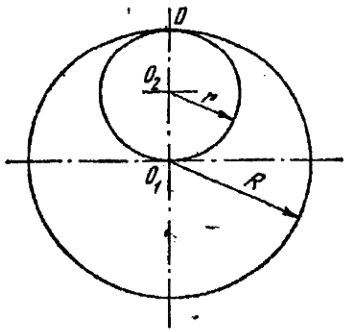

Рис. 4.1

Ответ: T=1,14 с.

7.(Ч.26.16) Конденсатор электроемкостью C=500 пФ соединен параллельно с катушкой длиной l=40 см и площадью сечения S, равной 5 см^2. Катушка содержит N=1000 витков. Сердечник немагнитный. Найти период T собственных колебаний контура.

Ответ: T=5,57 мкс.

8.(Ч.26.18) Колебательный контур имеет индуктивность L=1,6 мГн, электроемкость C=0,04 мкФ и максимальное напряжение U_{max} на зажимах, равное 200 В. Определить максимальную силу тока I_{max} в контуре. Сопротивление контура ничтожно мало.

Ответ: I_{max}=1 А.

9.(В.14.5) Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C=25 нФ и катушки с индуктивностью L=1,015Гн. Обкладки конденсатора имеют заряд q=2,5 мкКл. Написать уравнение (с числовыми коэффициентами) изменения разности потенциалов U на обкладках конденсатора и тока I в цепи. Найти разность потенциалов на обкладках конденсатора и ток в цепи в моменты времени $T/8$, $T/4$ и $T/2$. Построить графики этих зависимостей в пределах одного периода.

Ответ: $U=100\cos(2\pi 10^3 t)$ В, $I=-15{,}7\sin(2\pi\cdot 10^3 t)$ мА;

U_1= =70,7 В, I_1=-11,1 мА; U_2=0, I_2=—15,7 мА;

U_3=–100 В, I_3=0.

10.(В.14.6) Для колебательного контура предыдущей задачи написать уравнение (с числовыми коэффициентами) изменения со временем t энергии электрического поля $W_{эл}$, энергии магнитного' поля $W_м$ и полной энергии поля W. Найти энергию электрического поля, энергию магнитного поля и полную энергию поля в моменты времени $T/8$, $T/4$ и $T/2$. Построить графики этих зависимостей в пределах одного периода.

Ответ: $W_{эл}=125\cos^2(2\pi\cdot 10^3 t)$ мкДж, $W_м=125\sin^2(2\pi\cdot 10^3 t)$ мкДж, W=125 мкДж; $W_{эл1}$=62,5 мкДж, $W_{м1}$=62,5 мкДж, W_1=125 мкДж; $W_{эл2}$ = 0, $W_{м2}$=125 мкДж, W_2=125 мкДж; $W_{эл3}$=125 мкДж, $W_{м3}$=0, W_3=125 мкДж.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1.(И.4.3) Частица совершает гармонические колебания вдоль оси x около положения равновесия x=0. Частота колебаний ω= 4,00 рад/с. В некоторый момент координата частицы x=25,0 см и ее скорость υ=100 см/с. Найти координату x и скорость υ_x частицы через t=2,40 с после этого момента.

Ответ: x= –29 см; υ_x= – 81 см/с.

2.(И.4.21) Маятниковые часы установили в кабине лифта, которая начала подниматься с постоянным ускорением a, причем $a<g$. На высоте h ускорение кабины изменило свое направление на противоположное, оставшись по модулю тем же. Через

сколько времени после начала движения показания часов окажутся верными?

Ответ: $t=\sqrt{\dfrac{2h}{a}}\,\dfrac{\sqrt{1+\eta}-\sqrt{1-\eta}}{1-\sqrt{1-\eta}}$, где $\eta=a/g$.

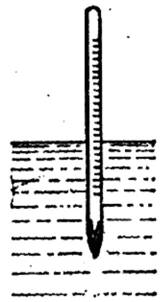

Рис. 4.2

3.(И.4.22) Вычислить период малых колебаний ареометра (рис. 4.2), которому сообщили небольшой толчок в вертикальном направлении. Масса ареометра m=50 г, радиус его трубки r=3,2 мм, плотность жидкости ρ=1,00 г/см^3. Сопротивление жидкости считать пренебрежимо малым.

Ответ: T=2,5 с.

4.(И.4.48) Физический маятник установили так, что его центр тяжести оказался над точкой подвеса. Из этого положения маятник начал двигаться к положению устойчивого равновесия, которое он прошел с угловой скоростью ω. Пренебрегая трением, найти период малых колебаний этого маятника.

Ответ: $T=4\pi/\omega$.

5.(И.4.97) В колебательном контуре, состоящем из плоского конденсатора и катушки индуктивности с пренебрежимо малым активным сопротивлением, происходят колебания с энергией W. Пластины конденсатора медленно раздвинули так, что частота колебаний увеличилась в η раз. Какую работу совершили при этом?

Ответ: $A=(\eta^2-1)W$.

Занятие 5. Затухающие и вынужденные колебания

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Уравнение затухающих колебаний и его параметры.
2. Коэффициент затухания.
3. Декремент затухания. Логарифмический декремент затухания.
4. Добротность колебательной системы.
5. Вынужденные колебания, резонанс.
6. Резонансные явления в колебательном контуре.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Уравнение кинематики затухающего колебания:

$$x(t)=A_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi_0),$$

где $x(t)$ – отклонение колеблющейся точки от положения равновесия в момент времени t; $\beta=\dfrac{r}{2m}$ – коэффициент затухания; r – коэффициент сопротивления среды; m – масса колеблющейся точки; A_0 – начальная амплитуда колебаний; $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$ – циклическая частота затухающих колебаний; ω_0 – циклическая частота свободных колебаний в отсутствии затухания.

2. Логарифмический декремент затухания и его связь с коэффициентом затухания:

$$\delta=\ln\frac{A_n}{A_{n+1}};\quad \delta=\beta T,$$

где A_n – амплитуда n-го колебания; A_{n+1} – амплитуда (n+1)-го колебания; A_n/A_{n+1} – декремент затухания.

3. Напряжение на конденсаторе в колебательном контуре при наличии затухания:

$$U_C=e^{-\beta t}U_{0C}(\cos\omega t+\varphi_0),$$

где $\beta = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания; R и L – активное сопротивление и индуктивность колебательного контура.

4. Уравнение вынужденных колебаний:

$$x(t) = A\cos(\omega t - \varphi),$$

где $x(t)$ – отклонение колеблющейся точки от положения равновесия в момент времени t; φ – отставание по фазе вынужденных колебаний от вынуждающей силы; A – амплитуда вынужденных колебаний; ω – циклическая частота вынужденных колебаний.

5. Амплитуда вынужденных колебаний:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}},$$

где F_0 – амплитуда вынуждающей силы, изменяющейся по закону $F = F_0 \cos\omega t$.

6. Отставание по фазе вынужденного колебания от вынуждающей силы:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

7. Циклическая частота резонанса:

$$\omega_р = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

8. Амплитуда резонанса:

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

9. Добротность колебательной системы:

$$Q = \frac{A_{рез}}{x_0} = \frac{\pi}{\delta},$$

где x_0 – статическое смещение колеблющейся точки от положения равновесия при воздействии силы F_0.

10. Добротность колебательного контура:

$$Q = \frac{\omega_р}{2\beta} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}},$$

где $\omega_р = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – резонансная частота колебательного контура,

$\beta = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания колебательного контура.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Плотность меди $\rho_о = 8{,}6\cdot10^3$ кг/м^3.

Удельное сопротивление меди $\rho = 0{,}017$ мкОм·м.

Плотность алюминия $\rho_о = 2{,}6\cdot10^3$ кг/м^3.

Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Дайте определение логарифмического декремента затухания.
2. Что такое апериодический процесс?
3. Каковы условия протекания апериодического процесса в механических колебательных системах и в колебательном контуре?
4. Объясните, какие физические процессы определяют механизм работы колебательного контура при наличии затухания.
5. Запишите уравнение вынужденного колебания.
6. Каков физический смысл добротности механической колебательной системы?
7. Запишите условие исчезновения резонанса при увеличении затухания.
8. Каково соотношение фаз между вынужденным колебанием и вынуждающей силой?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Под действием вынуждающей силы $F_x = F_m \cos\omega t$ система совершает установившиеся колебания, описываемые функцией $x = a\cos(\omega t - \varphi)$. Найти работу вынуждающей силы за период.

Работа переменной силы

$$A = \int F_x dx = \int F_m \cos\omega t \, \mathrm{d}x .$$

Так как $x = a\cos(\omega t - \varphi)$, то $\mathrm{d}x = -a\omega \sin(\omega t - \varphi)\,\mathrm{d}t$.

Подставляем последнее выражение в формулу работы

$$A = -aF_m\,\omega \int \cos\omega t \sin(\omega t - \varphi)\,\mathrm{d}t .$$

Используя известную формулу тригонометрии $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ и выполнив преобразования, получим:

$$A = -aF_m \int_0^T \cos\omega t(\sin\omega t\cos\varphi - \cos\omega t\sin\varphi)\,\mathrm{d}(\omega t) =$$

$$= -aF_m\left[\int_0^T \cos\omega t\sin\omega t\cos\varphi\,\mathrm{d}(\omega t) - \int_0^T \cos^2\omega t\sin\varphi\,\mathrm{d}(\omega t)\right] =$$

$$= -aF_m\left[\cos\varphi\int_0^T \cos\omega t\sin\omega t\,\mathrm{d}(\omega t) - \sin\varphi\int_0^T \cos^2\omega t\,\mathrm{d}(\omega t)\right].$$

Используя табличные интегралы

$$\int \sin x\cos x = \frac{\sin^2 x}{2} \quad \text{и} \quad \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x ,$$

получим

$$A = -aF_m\left[\cos\varphi\frac{\sin^2\omega t}{2}\Big|_0^T - \sin\varphi\left(\frac{\omega t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\omega t\right)\Big|_0^T\right].$$

Подставляя пределы и учитывая, что $T = 2\pi/\omega$, получим

$$A = -aF_m\left[\cos\varphi\sin^2 2\pi - \sin\varphi\left(\pi + \frac{1}{4}\sin\pi\right)\right];$$

$$A = \pi aF_m \sin\varphi .$$

Пример 2. Батарея, состоящая из двух одинаковых заряженных конденсаторов емкостью $C_0 = 10$ *мкф* каждый, включается в цепь, индуктивность и активное сопротивление которой равны $L = 10$ *мГн* и $R = 40$ *Ом*. Определить период T возникающих в цепи электромагнитных колебаний и ее добротность Q, если конденсаторы соединены параллельно и последовательно.

Решение. Период T электромагнитных колебаний определим по формуле

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}},$$

где L – индуктивность контура, R – его активное сопротивление и C – емкость батареи конденсаторов. При параллельном и последовательном соединениях двух одинаковых конденсаторов емкостью C_0 значения емкости батареи соответственно равны

$$C_1 = 2C_0 \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{C_0}{2}.$$

Поэтому искомые периоды колебаний T_1 и T_2 можно найти по формулам

$$T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{2LC_0} - \dfrac{R^2}{4L^2}}} \quad \text{и} \quad T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{2}{LC_0} - \dfrac{R^2}{4L^2}}}.$$

Подставив числовые значения и произведя вычисления, получим

$$T_1 = \frac{2\cdot 3{,}14}{\sqrt{\dfrac{1}{2\cdot 0{,}01\cdot 10^{-5}} - \dfrac{1600}{4\cdot 10^{-4}}}}\,\text{c} = 6{,}28\cdot 10^{-3}\ \text{c};$$

$$T_2 = \frac{2 \cdot 3{,}14}{\sqrt{\dfrac{2}{0{,}01 \cdot 10^{-5}} - \dfrac{1600}{4 \cdot 10^{-4}}}}\ \text{с} = 1{,}57 \cdot 10^{-3}\ \text{с}.$$

Добротность Q колебательного контура найдём по формуле

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Таким образом,

$$Q_1 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{2C_0}} \quad \text{и} \quad Q_2 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2L}{C_0}} = 2Q_1.$$

Подставив числовые значения и произведя вычисления, получим

$$Q_1 = \frac{1}{40}\sqrt{\frac{0{,}01}{2 \cdot 10^{-5}}} = 0{,}559; \quad Q_2 = 2 \cdot 0{,}559 = 1{,}12.$$

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1.(В.12.53) Тело массой m =10 г совершает затухающие колебания с максимальной амплитудой A_{max}=7 см, начальной фазой φ=0 и коэффициентом затухания β =1,6 с$^{-1}$. На это тело начала действовать внешняя периодическая сила F, под действием которой установились вынужденные колебания. Уравнение вынужденных колебаний имеет вид x=5sin($10\pi t$–$3\pi/4$) см. Найти (с числовыми коэффициентами) уравнение собственных колебаний и закон изменения внешней периодической силы $F(t)$.

Ответ: $x = 7e^{-1{,}6t}\sin 10{,}5\pi t$ см; $F = 72\sin 10\pi t$ мН.

2.(Ч.6.59) Логарифмический декремент затухания маятника δ = 0,003. Определить число N полных колебаний, которые должен сделать маятник, чтобы амплитуда уменьшилась в два раза.

Ответ: N = 231.

3.(Ч.6.60) Гиря массой m = 500 г подвешена к спиральной пружине жесткостью k = 20 Н/м и совершает упругие колебания в некоторой среде. Логарифмический декремент затухания δ=0,004. Определить число N полных колебаний, которые должна совершить гиря, чтобы амплитуда колебаний уменьшилась в 2 раза. За какое время t произойдет это уменьшение?

Ответ: N = 173; t = 2 мин 52 с.

4.(Ч.6.69) Определить логарифмический декремент затухания δ колебательной системы, для которой резонанс наблюдается при частоте, меньшей собственной частоты ν_0 = 10 кГц на $\Delta\nu$=2 Гц.

Ответ: δ=0,089.

5.(Ч.6.71) Пружинный маятник (жесткость k пружины равна 10 Н/м, масса m груза равна 100 г) совершает вынужденные колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления r =2· 10^{-2} кг/с. Определить коэффициент затухания β и резонансную амплитуду $A_{рез}$, если амплитудное значение вынуждающей силы F_0=10 мН.

Ответ: β=0,1 с$^{-1}$; $A_{рез}$=5 см.

6.(В.12.55) По грунтовой дороге прошел трактор, оставив следы в виде ряда углублений, находящихся на расстоянии l=30 см друг от друга. По этой дороге покатили детскую коляску, имеющую две одинаковые рессоры, каждая из которых прогибается на x_0=2 см под действием груза массой m_0=1 кг. С какой скоростью υ катили коляску, если от толчков на углублениях она, попав в резонанс, начала сильно раскачиваться? Масса коляски M=10 кг.

Ответ: υ=1,7 км/ч.

7.(В.14.11) Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C=0,2 мкФ и катушки с индуктивностью L=5,07 мГн. При каком логарифмическом декременте затухания δ разность потенциалов на обкладках конденсатора за время t=1мс уменьшится в три раза? Каково при этом сопротивление R контура?

Ответ: δ=0,22; R=11,1 Ом.

8.(В.14.12) Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C=405 нФ, катушки с индуктивностью L=10 мГн и сопротивления R=2 Ом. Во сколько раз уменьшится разность потенциалов на обкладках конденсатора за один период колебаний?

Ответ: в 1,04 раза.

9.(В.14.13) Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C=2,22 нФ и катушки длиной l=20 см из медной проволоки диаметром d=0,5 мм. Найти логарифмический декремент затухания δ колебаний.

Ответ: δ=0,018.

10.(В.14.14) Колебательный контур имеет емкость C=1,1 нФ и индуктивность L=5 мГн. Логарифмический декремент затухания δ=0,005. За какое время вследствие затухания потеряется 99% энергии контура?

Ответ: t=6,8 мс.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ Б

1.(В.12.43) Период затухающих колебаний T = 4 с; логарифмический декремент затухания δ = 1,6; начальная фаза φ = 0. При $t=T/4$ смещение точки x = 4,5 см. Написать уравнение движения этого колебания. Построить график этого колебания в пределах двух периодов.

Ответ: $x = 6{,}7e^{-0{,}4t}\sin\dfrac{\pi}{2}t$ см.

2.(В.12.45) Уравнение затухающих колебаний дано в виде $x=5e^{-0{,}25t}\sin 0{,}5\pi t$ м. Найти скорость υ колеблющейся точки в моменты времени t, равные: 0, T, $2T$, $3T$ и $4T$.

Ответ: υ_1=7,85 м/с, υ_2=2,88 м/с, υ_3=1,06 м/с, υ_4=0,39 м/с, υ_5=0,14 м/с.

3.(В.12.46) Логарифмический декремент затухания математического маятника δ=0,2. Во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний за одно полное колебание маятника?

Ответ: В 1,22 раза.

4.(В.12.47) Найти логарифмический декремент затухания δ математического маятника, если за время t=1 мин амплитуда колебаний уменьшилась в 2 раза. Длина маятника l=1 м.

Ответ: δ=0,023.

5.(В.12.48) Математический маятник длиной l=24,7 см совершает затухающие колебания. Через какое время t энергия колебаний маятника уменьшится в 9,4 раза? Задачу решить при значениях логарифмического декремента затухания: а) δ=0,01; б) δ=1.

Ответ: а) t=120 с; б) t=1,22 с.

6.(В.14.10) Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью C=7 мкФ и катушки с индуктивностью L=0,23 Гн и сопротивлением R=40 Ом. Обкладки конденсатора имеют заряд q=0,56 мКл. Найти период T колебаний контура и логарифмический декремент затухания δ колебаний. Написать уравнение изменения со временем t разности потенциалов U на обкладках конденсатора. Найти разность потенциалов в моменты времени, равные: $T/2$, T, $3T/2$ и $2T$. Построить график $U=f(t)$ в пределах двух периодов.

Ответ: T=8 мс; δ=0,7; $U=80e^{-87}\cos 250\pi t$ В; U_1=–56,5 В, U_2=40 В, U_3=–28 В, U_4=20 В.

7.(В.14.15) Колебательный контур состоит из конденсатора и катушки длиной l=40 см из медной проволоки, площадь поперечного сечения которой s=0,1 мм^2. Найти емкость конденсатора C, если, вычисляя период колебаний контура по приближенной формуле $T = 2\pi\sqrt{LC}$, мы допускаем ошибку ε=1%.

Указание. Учесть, что ошибка $\varepsilon=(T_2-T_1)/T_2$, где T_1 – период колебаний, найденный по приближенной формуле, а T_2 – период колебаний, найденный по точной формуле.

Ответ: C=0,7 мкФ.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1.(И.4.73) Математический маятник совершает колебания в среде, для которой логарифмический декремент затухания δ_o=1,50. Каким будет логарифмический декремент затухания, если сопротивление среды увеличить в n=2,00 раза? Во сколько раз n' следует увеличить сопротивление среды, чтобы колебания стали невозможны?

Ответ: δ = 3,3; n' = 4,3 раза.

2.(И.4.77). Найти добротность математического маятника длиной l=50 см, если за промежуток времени τ=5,2 мин его полная механическая энергия уменьшилась в $\eta=4{,}0\cdot10^4$ раза.

Ответ: $Q=1{,}3\cdot10^2$.

3.(И.4.85) Шарик массой m, подвешенный к пружинке, удлиняет последнюю на величину Δl. Под действием внешней вертикальной силы, меняющейся по гармоническому закону с амплитудой F_0, шарик совершает вынужденные колебания. Логарифмический декремент затухания равен δ. Пренебрегая массой пружинки, найти циклическую частоту вынуждающей силы, при которой амплитуда смещения шарика максимальна. Каково значение этой амплитуды?

Ответ: $\omega_{рез}=\sqrt{\dfrac{1-(\delta/2\pi)^2}{1+(\delta/2\pi)^2}\dfrac{g}{\Delta l}}$; $A_{рез}=\dfrac{\delta F_0\Delta l}{4\pi mg}\left(1+\dfrac{4\pi^2}{\delta^2}\right)$.

4.(И.4.90) Шарик массой m=50,0 г подвешен на невесомой пружинке жесткостью k=20,0 Н/м. Под действием вынуждающей вертикальной гармонической силы, изменяющейся с частотой ω=25,0 рад/с, шарик совершает установившиеся колебания с амплитудой a=1,3 см. При этом смещение шарика отстает по фазе от вынуждающей силы на $\varphi=\frac{3}{4}\pi$. Найти: а) добротность Q данной колебательной системы; б) работу A вынуждающей силы за период колебания.

Ответ: Q=0,35; A=6 мДж.

5.(И.4.104) Колебательный контур состоит из конденсатора емкости C=4,0 мкФ и катушки с индуктивностью L=2,0 мГ и активным сопротивлением R=10 Ом. Найти отношение энергии магнитного поля катушки к энергии электрического поля конденсатора в момент максимума тока.

Ответ: $W_L/W_C=5$.

Занятие 6. Переменный электрический ток

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Квазистационарные токи.
2. Активное, реактивное и полное сопротивление цепи переменного тока.
3. Фазовые соотношения между током и напряжением в элементах цепи.
4. Действующие значения тока и напряжения.
5. Работа и мощность в цепи переменного тока.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Реактивное сопротивление конденсатора переменному току:

$$X_C=\frac{1}{\omega C},$$

где ω – циклическая частота переменного тока; C– электроёмкость конденсатора.

2. Реактивное сопротивление катушки индуктивности переменному току:

$$X_L=\omega L,$$

где L – индуктивность катушки.

3. Полное сопротивление последовательной цепи переменному току, содержащей активное сопротивление, электроёмкость и индуктивность:

$$Z=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

где R – активное сопротивление цепи.

4. Угол сдвига фаз между током и напряжением в последовательной цепи, содержащей активное сопротивление, электроёмкость и индуктивность:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

5. Закон Ома для переменного тока:

$$I_{эф} = \frac{U_{эф}}{Z},$$

где $I_{эф}$ и $U_{эф}$ – эффективные (действующие) значения тока и напряжения.

6. Связь между эффективными (действующими) значениями тока и напряжения и амплитудными I_0 и U_0 значениями:

$$I_{эф} = I_0/\sqrt{2},\ U_{эф} = U_0/\sqrt{2}.$$

7. Мощность переменного тока:

$$P = I_{эф}U_{эф}\cos\varphi.$$

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Плотность меди ρ_o=8,6·10^3 кг/м^3.

Удельное сопротивление меди ρ=0,017 мкОм·м.

Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м.

Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

Скорость света в вакууме c=3·10^8 м/с.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Что такое квазистационарные токи?

2. В чём сущность метода векторных диаграмм?

3. Каков сдвиг по фазе между током и напряжением на конденсаторе?

4. Каков сдвиг по фазе между током и напряжением на катушке индуктивности?

5. Каков сдвиг по фазе между током и напряжением на активном сопротивлении?

6. Как найти сдвиг по фазе между током и напряжением на источнике переменного тока?

7. Постройте векторную диаграмму для цепи, в которой R, L и C соединены последовательно.

8. Постройте векторную диаграмму для цепи, в которой R и C соединены параллельно, а с L – последовательно.

9. Постройте векторную диаграмму для цепи, в которой L и C соединены параллельно, а с R – последовательно.

10. Постройте векторную диаграмму для цепи, в которой R и L соединены параллельно, а с C – последовательно.

11. Постройте векторную диаграмму для цепи, в которой R, L и C соединены параллельно.

12. Получите формулы для полного сопротивления цепи переменному току и угла сдвига по фазе между током и напряжением для случаев, перечисленных в пп. 7, 8, 9, 10, 11.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Концы цепи, состоящей из последовательно включенных конденсатора и активного сопротивления R=110 Ом, подсоединили к переменному напряжению с амплитудным значением U_0=110 В. При этом амплитуда установившегося тока в цепи I_0=0,50 А. Найти разность фаз φ между током и подаваемым напряжением.

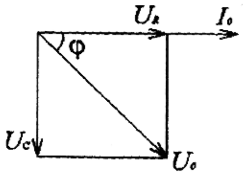

Рис. 6.1

Решение. Построим векторную диаграмму данной цепи (рис 6.1). Здесь U_R– напряжение на активном сопротивлении, U_C– напряжение на конденсаторе. Из векторной диаграммы следует, что

$$\cos\varphi = \frac{U_R}{U_0} = \frac{I_0 R}{U_0}\ ;\ \varphi = \arccos\ \frac{I_0 R}{U_0}.$$

Подставляем данные и вычисляем:

$$\varphi = \arccos\frac{0,5\cdot 110}{110} = 60^\circ.$$

Пример 2. К сети с действующим напряжением $U_{эф}$=100 В подключили катушку, индуктивное сопротивление которой X_L=30 Ом и импеданс Z=50 Ом. Найти разность фаз φ между током и напряжением, а также тепловую мощность P, выделяемую в катушке.

Решение. Построим векторную диаграмму данной цепи (рис. 6.2). Здесь U_L– напряжение на индуктивном сопротивлении катушки. Из векторной диаграммы следует, что

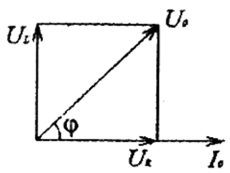

Рис. 6.2

$$\cos\varphi = \frac{U_R}{U_0}.$$

Полное сопротивление (импеданс) данной цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2},$$

где X_L – индуктивное сопротивление катушки переменному току.

Отсюда $R = \sqrt{Z^2 - X_L^2}$.

Так как $U_R = I_0 R = I_0\sqrt{Z^2 - X_L^2}$, то

$$\cos\varphi = \frac{I_0\sqrt{Z^2 - X_L^2}}{U_0} = \frac{\sqrt{Z^2 - X_L^2}}{Z};$$

$\varphi = \arccos\dfrac{\sqrt{Z^2 - X_L^2}}{Z}$. Подставляя сюда числовые значения, найдём

$$\varphi = \arccos\frac{\sqrt{50^2 - 30^2}}{50} = \arccos 0,8 = 37^\circ.$$

Далее находим мощность, выделяемую в катушке, по формуле

$$P = I_{эф}\, U_{эф}\cos\varphi,$$

где $I_{эф} = \dfrac{I_0}{\sqrt{2}}$ – действующее значение силы тока, $U_{эф} = \dfrac{U_0}{\sqrt{2}}$ – действующее значение напряжения сети.

Из формулы полного сопротивления $Z = \dfrac{U_0}{I_0} = \dfrac{U_{эф}\sqrt{2}}{I_{эф}\sqrt{2}} = \dfrac{U_{эф}}{I_{эф}}$

находим $I_{эф} = \dfrac{U_{эф}}{Z}$.

Подставляем последнее выражение в формулу мощности

$$P = \frac{U_{эф}^2}{Z}\cos\varphi = \frac{U_{эф}^2\sqrt{Z^2 - X_L^2}}{Z^2}.$$

Подставляя числовые значения в последнее выражение, получим

$$P = \frac{100^2\sqrt{50^2 - 30^2}}{50^2} = 160\,\text{Вт.}$$

Пример 3. Переменное напряжение, действующее значение которого $U_{эф}$=220 В, а частота ν=50 Гц, подано на катушку без сердечника с индуктивностью L=31,8 мГн и активным сопротивлением R=10,0 Ом. Определить:

а) количество теплоты Q, выделяющееся в катушке за секунду.

б) как изменится Q, если последовательно с катушкой включить конденсатор с емкостью C=319 мкФ.

Решение. Первая часть задачи может быть решена с использованием векторной диаграммы, приведенной на рис. 6.2 (см. пример 2), откуда следует, что

$$\cos\varphi = \frac{U_R}{U_0} = \frac{I_0 R}{U_0} = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}.$$

Найдя действующее значение силы тока как

$$I_{эф} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{U_0}{Z\sqrt{2}} = \frac{U_{эф}\sqrt{2}}{Z\sqrt{2}} = \frac{U_{эф}}{Z}$$

и используя формулу мощности

$$P = I_{эф} U_{эф} \cos\varphi,$$

получим

$$P = \frac{U_{эф}^2 R}{Z\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{U_{эф}^2 R}{R^2 + X_L^2}.$$

Выразим реактивное сопротивление катушки X_L через данные задачи

$$X_L = \omega^2 L^2 = 4\pi^2\nu^2 L^2$$

и подставим его в выражение для мощности

$$P = \frac{U_{эф}^2 R}{R^2 + 4\pi^2\nu^2 L^2}.$$

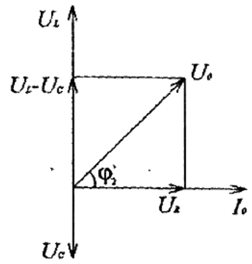

Рис. 6.3

Поскольку мощность равна количеству тепла Q, выделяющемуся в одну секунду, то ответ первой части задачи в общем виде

$$Q_1 = \frac{U_{эф}^2 R}{R^2 + 4\pi^2\nu^2 L^2}.$$

Подставив числовые значения и произведя вычисления, получим

$$Q_1 = \frac{220^2 \cdot 10}{10^2 + 4\cdot\pi^2\cdot 50^2 (31{,}8\cdot 10^{-3})^2} = 2{,}4\cdot 10^3\ \text{Вт=2,4 кВт.}$$

Для второй части задачи векторную диаграмму можно изобразить в виде, представленном на рис 6.3. Полное сопротивление цепи для этого случая находим по формуле

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Поскольку, как и раньше, $\cos\varphi = \dfrac{R}{Z}$, а $I_{эф} = \dfrac{U_{эф}}{Z}$, то, подставляя эти выражения, а также новое выражение для Z в формулу мощности, получим

$$P = Q_2 = \frac{U_{эф}^2 R}{Z^2} = \frac{U_{эф}^2 R}{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Подставляем числовые значения и вычисляем

$$Q_2 = \frac{220^2 \cdot 10}{10^2 + \left(2\cdot\pi\cdot 50\cdot 31{,}8\cdot 10^{-3} - \dfrac{1}{2\cdot\pi\cdot 50\cdot 319\cdot 10^{-6}}\right)^2} =$$

$$= 4{,}84\cdot 10^3\ \text{Вт} = 4{,}84\ \text{кВт}.$$

Поскольку второй вопрос задачи состоит в том, чтобы определить, как изменится количество тепла, выделяющееся в катушке за секунду, то ответ на этот вопрос будет следующий:

количество тепла увеличится в

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{4{,}84}{2{,}4} = 2\ \text{раза}.$$

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1. (В. 14.23) Найти полное сопротивление цепи Z и сдвиг фаз между напряжением и током при различных способах включения сопротивления R, емкости C и индуктивности L. Рассмотреть случаи: а) R и С включены последовательно; б) R и C включены параллельно; в) R и L включены последовательно; г) R и L включены параллельно; д) R, L и C включены последовательно.

Ответ: а) $Z = \sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}$, $tg\varphi = -1/R\omega C$;

б) $Z = \dfrac{R}{\sqrt{R^2\omega^2 C^2 + 1}}$, $tg\varphi = -R\omega C$;

в) $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$, $tg\varphi = \omega L/R$;

г) $Z = \dfrac{R\omega L}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$, $tg\varphi = R/\omega L$;

д) $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - 1/\omega C\right)^2}$, $tg\varphi = \dfrac{\omega L - 1/\omega C}{R}$.

2. (В.14.24) Конденсатор емкостью C=1 мкФ и резистор с сопротивлением R=3 кОм включены в цепь переменного тока с частотой ν=50 Гц. Найти полное сопротивление I цепи, если конденсатор и резистор включены: а) последовательно; б) параллельно.

Ответ: а) Z=4,38·кОм; б) Z=2,18 кОм.

3. (В.14.25) В цепь переменного тока напряжением U=220 В и частотой ν=50 Гц включены последовательно емкость C=35,4 мкФ, сопротивление R=100 Ом и индуктивность L=0,7 Гн. Найти ток I в цепи и падения напряжения U_C, U_R и U_L на емкости, сопротивлении и индуктивности.

Ответ: I=1,34 А; U_C=121 В; U_R=134 В; U_L=295 В.

4. (В.14.26) Индуктивность L=22,6 мГн и сопротивление R включены параллельно в цепь переменного тока частотой ν=50 Гц. Найти сопротивление R, если известно, что сдвиг фаз между напряжением и током φ=60°.

Ответ: R=12,3 Ом.

5. (В.14.27) Активное сопротивление R и индуктивность L соединены параллельно и включены в цепь переменного тока напряжением U=127 В и частотой ν=50 Гц. Найти сопротивление R и индуктивность L, если известно, что цепь поглощает мощность P=404 Вт и сдвиг фаз между напряжением и током φ=60°.

Ответ: R=40 Ом; L=74 мГн.

6. (В.14.28) В цепь переменного тока напряжением U=220 В включены последовательно емкость C, сопротивление R и индуктивность L. Найти падение напряжения U_R на сопротивлении, если известно, что падение напряжения на конденсаторе $U_C=2U_R$, на индуктивности $U_L=3U_R$.

Ответ: U_R=156 В.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ Б

1. (В.14.16) Катушка длиной l=50 см и площадью поперечного сечения S=10 см^2 включена в цепь переменного тока частотой ν=50 Гц. Число витков катушки N=3000. Найти сопротивление R катушки, если сдвиг фаз между напряжением и током φ=60°.

Ответ: R=4,1 Ом.

2. (В.14.17) Обмотка катушки состоит из N=500 витков медной проволоки, площадь поперечного сечения которой s=1 мм^2. Длина катушки l=50 см, ее диаметр D=5 см. При какой частоте ν переменного тока полное сопротивление Z катушки вдвое больше ее активного сопротивления R?

Ответ: ν=300 Гц.

3. (В.14.18) Два конденсатора с емкостями C_1=0,2 мкФ и C_2=0,1 мкФ включены последовательно в цепь переменного тока напряжением U=220 В и частотой ν=50 Гц. Найти ток I в цепи и падения потенциала U_{C1} и U_{C2} на первом и втором конденсаторах.

Ответ: I=4,6 мА; U_{C1}=73,4 В; U_{C2}=146,6 В.

4. (В.14.19) Катушка длиной l=25 см и радиусом r=2 см имеет обмотку из N=1000 витков медной проволоки, площадь поперечного сечения которой s=1 мм^2. Катушка включена в цепь переменного тока частотой ν=50 Гц. Какую часть полного сопротивления Z катушки составляют активное сопротивление R и индуктивное сопротивление X_L?

Ответ: 74 %, 68 %.

5. (В.14.20) Конденсатор емкостью C=20 мкФ и резистор, сопротивление которого R=150 Ом, включены последовательно в цепь переменного тока частотой ν=50 Гц. Какую часть напряжения U, приложенного к этой цепи, составляют падения напряжения на конденсаторе U_c и на резисторе U_R?

Ответ: 72,5%, 68,5%.

6. (В.14.21) Конденсатор и электрическая лампочка соединены последовательно и включены в цепь переменного тока напряжением U=440 В и частотой ν=50 Гц. Какую емкость C должен иметь конденсатор для того, чтобы через лампочку протекал ток I=0,5 А и падение потенциала на ней было равным $U_л$=110 В?

Ответ: C=3,74 мкФ.

7. (В.14.22) Катушка с активным сопротивлением R=10 Ом и индуктивностью L включена в цепь переменного тока напряжением U=7 В и частотой ν=50 Гц. Найти индуктивность L катушки, если известно, что катушка поглощает мощность P=400 Вт и сдвиг фаз между напряжением и током φ=60°.

Ответ: L=55 мГн.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1.(И.4.120) Длинный однослойный соленоид из проволоки с удельным сопротивлением ρ имеет на единицу длины n плотно расположенных витков. Толщина изоляции провода пренебрежимо мала. Радиус сечения соленоида равен a. Найти разность фаз между током и переменным напряжением с частотой ν, которое подключено к концам соленоида.

Ответ: Ток отстаёт по фазе от напряжения на угол φ, определяемый уравнением $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\mu_0\pi^2\nu a}{4n\rho}$.

2.(И.4.124) Цепь, состоящая из последовательно соединенных конденсатора емкостью C=22 мкФ и катушки с активным сопротивлением R=20 Ом и индуктивностью L=0,35 Гн, подключена к сети переменного напряжения с амплитудой U_0=180 В и частотой ω=314 рад/с. Найти:

а) амплитуду тока в цепи;

б) разность фаз между током и внешним напряжением;

в) амплитуды напряжения на конденсаторе и катушке.

Ответ: а) $I_o = U_0\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2} = 4{,}5$ А;

б) $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$, $\varphi = -60^\circ$ (ток опережает напряжение);

в) $U_{0C} = I_0/\omega C = 0{,}65$ кВ, $U_{0L} = I_0\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = 0{,}50$ кВ.

3.(И.4.125) Цепь из последовательно соединенных конденсатора емкостью C, сопротивления R и катушки с индуктивностью L и пренебрежимо малым активным сопротивлением подключена к генератору синусоидального напряжения, частоту которого можно менять при постоянной амплитуде. Найти частоту, при которой максимальна амплитуда напряжения:

а) на конденсаторе; б) на катушке.

Ответ: а) $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$; б) $\omega = \omega_0^2 \Big/ \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$,

где $\omega_0^2 = 1/LC$, $\beta = R/2L$.

4.(И.4.126) Переменное напряжение с частотой ω=314 рад/с и амплитудным значением U_0=180 В подключено к концам цепи, состоящей из последовательно соединенных конденсатора и катушки с активным сопротивлением R=40 Ом и индуктивностью L= 0,36 Гн. При каком значении емкости конденсатора амплитуда напряжения на катушке будет максимальной? Чему равна эта амплитуда и соответствующая амплитуда напряжения на конденсаторе?

Ответ: При $C = \dfrac{1}{\omega^2 L}$ =28 мкФ;

$U_{0L} = U_0\sqrt{1 + (\omega L/R)^2}$ =0,54 кВ; $U_{0C} = U_0\omega L/R$ =0,51кВ.

5.(И.4.129) Найти добротность колебательного контура, в который последовательно включен источник переменной ЭДС, если при резонансе напряжение на конденсаторе в n раз превышает напряжение на источнике.

Ответ: $Q = \sqrt{n^2 - 1/4}$.

6.(И.4.130) Цепь переменного тока, состоящая из последовательно соединенных катушки и конденсатора, подключена к источнику переменной ЭДС, причем индуктивность катушки подобрана так, что ток в цепи максимален. Найти добротность системы, если известно, что при увеличении индуктивности в n раз ток в цепи уменьшается в η раз.

Ответ: $Q = \sqrt{\dfrac{\eta^2 - 1}{(n-1)^2} - 1/4}$.

7.(И.4.138) Катушка с индуктивностью L=0,70 Гн и активным сопротивлением r =20 Ом соединена последовательно с безындукционным сопротивлением R, и между концами этой цепи приложено переменное напряжение с действующим значением $U_{эф}$ = 220 В и частотой ω=314 рад/с. При каком значении сопротивления R в цепи будет выделяться максимальная тепловая мощность? Чему она равна?

Ответ: При $R = \omega L - R$ =0,20 кОм; $P_м = \dfrac{U_{эф}^2}{2\omega L}$ =0,11 кВт.

8.(И.4.141) Цепь, состоящую из последовательно соединенных безындукционного сопротивления R=0,16 кОм и катушки с активным сопротивлением, подключили к сети с действующим напряжением $U_{эф}$=220 В. Найти тепловую мощность, выделяемую на катушке, если действующие напряжения на сопротивлении R и катушке равны соответственно $U_{1эф}$=80 В и $U_{2эф}$=180 В.

Ответ: $P_2 = \frac{1}{2}\left(U_{эф}^2 - U_{1эф}^2 - U_{2эф}^2\right)/R$ =30 Вт.

9.(И.4.142) Катушка и безындукционное сопротивление R = 25 Ом подключены параллельно к сети переменного напряжения. Найти тепловую мощность, выделяемую в катушке, если из сети потребляется ток $I_{эф}$=0,90 А, а через катушку и сопротивление R текут токи соответственно $I_{1эф}$=0,50 А и $I_{2эф}$=0,60 А.

Ответ: $P_1 = \frac{1}{2}\left(I_{эф}^2 - I_{1эф}^2 - I_{2эф}^2\right)R$ =2,5 Вт.

10.(И.4.145) Конденсатор емкостью C=1,0 мкФ и катушку с активным сопротивлением R=0,10 Ом и индуктивностью L=1,0 мГн подключили параллельно к источнику синусоидального напряжения с действующим значением $U_{эф}$ = 31 В. Найти:

а) частоту ω, при которой наступает резонанс;

б) действующее значение подводимого тока при резонансе, а также соответствующие токи через катушку и конденсатор.

Ответ:

а) $\omega_{рез} = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{L^2}} = 3\cdot 10^4$ рад/с; б) $I_{эф} = U_{эф}RC/L = 3$ мА,

$I_{эфL} = U_{эф}\sqrt{C/L} = 1{,}0$ А, $I_{эфC} = U_{эф}\sqrt{\dfrac{C}{L} - \left(\dfrac{RC}{L}\right)^2} = 1{,}0$ А.

Занятие 7. Сложение колебаний и волновые процессы

СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРИИ

1. Сложение колебаний одного направления.
2. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний.
3. Продольные и поперечные волны.
4. Скорость распространения, частота, длина волны, волновой вектор.
5. Электромагнитные волны в вакууме и в диэлектрике.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Амплитуда и начальная фаза колебания, полученного при сложении двух колебаний $x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ и $x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$, направленных вдоль одной прямой (при $\omega_1=\omega_2$):

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)},$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2},$$

где $\varphi_1, \varphi_2, A_1, A_2$ – начальные фазы и амплитуды складываемых колебаний.

Частные случаи сложения однонаправленных колебаний:

а) при $\varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi$ и $\omega_1=\omega_2$

$$A = A_1 + A_2;$$

б) при $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\pi$ и $\omega_1=\omega_2$

$$A = A_1 - A_2;$$

в) при $\omega_1\approx\omega_2$, $x_1 = A\cos\omega_1 t$ и $x_2 = A\cos\omega_2 t$ результатом сложения являются биения, уравнение которых имеет вид

$$x = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right).$$

2. Частные случаи сложения взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми частотами:

а) при $\varphi_2 - \varphi_1 = 2n\pi$, $x=A_1\cos\omega t$ и $y=A_2\cos(\omega t+2n\pi)$ уравнение траектории движения точки имеет вид

$$y = \frac{A_2}{A_1}x \text{ (уравнение прямой);}$$

б) при $\varphi_2 - \varphi_1 = (2n+1)\pi$, $x=A_1\cos\omega t$ и $y=A_2\cos[\omega t+(2n+1)\pi]$ уравнение траектории движения точки имеет вид

$$y = -\frac{A_2}{A_1}x \text{ (уравнение прямой);}$$

в) при $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, $x=A_1\cos\omega t$ и $y=A_2\cos(\omega t+\pi/2)$ уравнение траектории движения точки имеет вид

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1 \text{ (уравнение эллипса).}$$

3. Уравнение плоской упругой волны, распространяющейся вдоль оси x:

$$\xi = a\cos(\omega t - kx + \alpha),$$

где ξ – отклонение колеблющейся точки среды от положения равновесия, определяемого координатой x; a – амплитуда колебаний; ω – циклическая частота; $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; α – начальная фаза колебаний источника; $\lambda=\upsilon T$ – длина волны; υ – скорость распространения волны; T – период колебаний.

4. Уравнение плоской упругой волны, распространяющейся в произвольном направлении:

$$\xi = a\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} + \alpha),$$

где $\vec{k}$ – волновой вектор, $\vec{r}$ – радиус-вектор колеблющейся точки среды, проведённый из источника.

5. Волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2},$$

где υ – фазовая скорость волны.

6. Фазовая скорость продольных волн ($\upsilon_{||}$) и поперечных волн ($\upsilon_\perp$) в упругой среде:

$$\upsilon_{||} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \quad \upsilon_\perp = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

где E – модуль Юнга; G – модуль сдвига; ρ – плотность среды.

7. Уравнение стоячей волны, возникающей при сложении бегущей и отражённой волн:

$$\xi = 2a\cos kx\cos\omega t.$$

8. Координаты пучностей и узлов стоячей волны:

$$x_{пуч} = \pm n\frac{\lambda}{2}; \qquad x_{узл} = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2},$$

где $n = 1,2,3...$ – порядковый номер узла или пучности.

9. Уравнения электромагнитной волны:

$$\vec{E} = \vec{E}_0\cos(\omega t - kx); \quad \vec{H} = \vec{H}_0\cos(\omega t - kx),$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ – мгновенные значения напряжённостей электрической и магнитной составляющих электромагнитной волны; $\vec{E}_0$ и $\vec{H}_0$ – амплитудные значения напряжённостей электрической и магнитной составляющих электромагнитной волны.

10. Фазовая скорость электромагнитной волны:

$$\upsilon = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}},$$

где μ и ε – магнитная и диэлектрическая проницаемости среды; $c = 1/\mu_0\varepsilon_0$ – скорость света в вакууме, μ_0 и ε_0 – магнитная и электрическая постоянные.

11. Связь напряжённостей электрического и магнитного полей в электромагнитной волне:

$$E\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0} = H\sqrt{\mu\mu_0}.$$

12. Объёмная плотность энергии в электромагнитной волне:

$$w = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} + \frac{\vec{B}\vec{H}}{2} = \frac{1}{\upsilon}EH,$$

где $\vec{D}$ – вектор индукции электрического поля.

13. Плотность потока энергии электромагнитной волны – вектор Умова – Пойнтинга:

$$\vec{S} = \left[\vec{E}\vec{H}\right] = w\vec{\upsilon}.$$

14. Показатель преломления среды для электромагнитной волны относительно вакуума:

$$n = \sqrt{\mu\varepsilon}$$

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м.

Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

Скорость света в вакууме c=$3\cdot10^8$ м/с.

ВОПРОСЫ И УПРАЖНЕНИЯ

1. В чём сущность метода векторных диаграмм сложения колебаний?
2. Что такое когерентные колебания?
3. Что такое фигуры Лиссажу , как и какие параметры складываемых колебаний можно по ним определить?
4. Что такое биения?
5. Каков физический смысл волнового числа?
6. Каков смысл знака в уравнении волны перед kx?
7. Каков физический смысл фазовой скорости?
8. При каких условиях образуются стоячие волны, что такое узлы и пучности стоячих волн?
9. Что такое поперечные и продольные волны? Приведите примеры.
10. Могут ли быть упругие волны поперечными, а электромагнитные волны – продольными?
11. Имеется ли разница в происхождении световых волн и радиоволн?
12. Чему равен угол между векторами напряжённости электрического и магнитного полей в поперечной электромагнитной волне?
13. Какие из перечисленных величин изменяются при переходе электромагнитной волны в другую среду: частота, период, длина волны, волновое число?
14. Каков физический смысл плотности потока энергии?
15. Могут ли распространяться отдельно электрическая и магнитная составляющие электромагнитной волны?
16. Продолжится ли процесс распространения электромагнитной волны, если выключить её источник?

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Складываются два колебания одинакового направления, выражаемые уравнениями $x_1 = A_1 \cos\omega(t + \tau_1)$; $x_2 = A_2 \cos\omega(t + \tau_2)$, где $A_1 = 1$ см, $A_2 = 2$ см, $\tau_1 = 1/6$ с, $\tau_2 = 1/2$ с, $\omega = \pi$ с$^{-1}$. Определить начальные фазы φ_1 и φ_2 составляющих колебаний, найти амплитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания. Написать уравнение результирующего колебания.

Решение. Уравнение гармонического колебания имеет вид

$$x = A\cos(\omega t + \varphi). \tag{7.1}$$

Преобразуем уравнения, заданные в условии задачи, к такому же виду

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \omega\tau_1), \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \omega\tau_2). \tag{7.2}$$

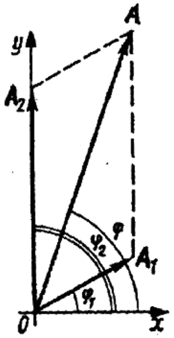

Рис. 7.1

Сравнивая выражения (7.2) и (7.1) и используя численные данные задачи, находим начальные фазы первого и второго колебаний:

$$\varphi_1 = \omega\tau_1 = \pi/6 \text{ рад и } \varphi_2 = \omega\tau_2 = \pi/2 \text{ рад.}$$

Для определения амплитуды A результирующего колебания удобно воспользоваться векторной диаграммой, представленной на рис. 7.1. Согласно теореме косинусов, получим

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Подставляя сюда численные значения условия задачи и найденные значения φ_1 и φ_2, получим

$$A = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2\cdot 1\cdot 2\cos(\pi/2 - \pi/6)} \text{ см} = 2{,}65 \text{ см}.$$

Начальную фазу φ результирующего колебания определим непосредственно из рис. 7.1:

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}.$$

Подставим численные значения в последнее выражение и произведем вычисления:

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{1\cdot\sin(\pi/6) + 2\cdot\sin(\pi/2)}{1\cdot\cos(\pi/6) + 2\cdot\cos(\pi/2)} = 70{,}9^\circ = 0{,}349\pi \text{ рад.}$$

Так как угловые частоты складываемых колебаний одинаковы, то результирующее колебание будет иметь ту же частоту $\omega = \pi$ с$^{-1}$. Это позволяет написать уравнение результирующего колебания в виде

$$x = 2{,}65\cos(\pi t + 0{,}349\pi) \text{ см.}$$

Пример 2. Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных гармонических колебаниях, уравнения которых имеют вид

$$x = A_1\cos\omega t, \tag{7.3}$$

$$y = A_2\cos\frac{\omega}{2}t, \tag{7.4}$$

где $A_1 = 1$ см, $A_2 = 2$ см, $\omega = \pi$ с$^{-1}$. Найти уравнение траектории точки. Построить траекторию с соблюдением масштаба и указать направление движения точки.

Решение. Чтобы найти уравнение траектории точки, исключим время t из заданных уравнений (7.3) и (7.4). Для этого воспользуемся формулой $\cos(\alpha/2) = \sqrt{(1/2)(1+\cos\alpha)}$. В данном случае $\alpha = \omega t$, поэтому

$$y = A_2\cos\frac{\omega}{2}t = A_2\sqrt{(1/2)(1+\cos\omega t)}.$$

Так как, согласно формуле (7.3), $\cos\omega t = x/A_1$, то уравнение траектории имеет вид

$$y = A_2\sqrt{(1/2)(1 + x/A_1)}. \tag{7.5}$$

Полученное выражение представляет собой уравнение параболы, ось которой совпадает с осью Ox. Из уравнений (7.3) и (7.4) следует, что смещение точки по осям координат ограничено и заключено в пределах от -1 до $+1$ см по оси Ox и от -2 до $+2$ см по оси Oy.

Для построения траектории найдем по уравнению (7.5) значения y, соответствующие ряду значений x, удовлетворяющих условию $|x| \le 1$ см, и составим таблицу:

x, см	-1	$-0{,}75$	$-0{,}5$	0	$+0.5$	$+1$
y, см	0	$\pm 0{,}707$	± 1	$\pm 1{,}41$	$\pm 1{,}73$	± 2

Начертив координатные оси и выбрав масштаб, нанесем на плоскость xOy найденные точки. Соединив их плавной кривой, получим траекторию точки, совершающей колебания в соответствии с уравнениями движения (7.3) и (7.4) (рис. 7.2).

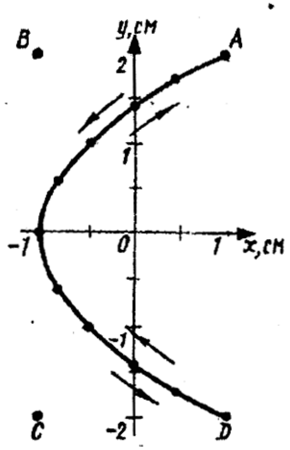

Рис. 7.2

Для того чтобы указать направление движения точки, проследим за тем, как изменяется ее положение с течением времени. В начальный момент t=0 координаты точки равны $x(0)$ = 1 см и $y(0)$ = 2 см. В последующий момент времени, например при t_1=1 с, координаты точек изменятся и станут равными $x(1) = -1$ см, $y(t)$=0. Зная положения точек в начальный и последующий (близкий) моменты времени, можно указать направление движения точки по траектории. На рис. 7.2 это направление движения указано стрелкой (от точки A к началу координат). После того как в момент $t_2 = 2$ с колеблющаяся точка достигнет точки D, она будет двигаться в обратном направлении.

Пример 3. Колебательный контур состоит из катушки с индуктивностью L=1,2 мГн и конденсатора переменной электроёмкости от C_1=12 пФ до C_2=80 пФ. Определить диапазон длин электромагнитных волн, которые могут вызывать резонанс в этом контуре. Активное сопротивление контура принять равным нулю.

Решение. Длина λ электромагнитной волны, которая может вызвать резонанс в колебательном контуре, связана с периодом T колебаний контура соотношением

$$\lambda = cT,$$

где c – скорость света в вакууме.

Период колебаний, в свою очередь, связан с индуктивностью L катушки и электроёмкостью C конденсатора колебательного контура соотношением

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Следовательно,

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}.$$

Согласно условию задачи, индуктивность контура неизменна, а электроёмкость контура может изменяться в пределах от C_1 до C_2. Этим значениям электроёмкости соответствуют длины волн λ_1 и λ_2, определяющие диапазон длин волн, которые могут вызвать резонанс.

Произведя вычисления по последней формуле, получим:

$$\lambda_1 = 2\cdot 3{,}14\cdot 3\cdot 10^8\sqrt{1{,}2\cdot 10^{-3}\cdot 12\cdot 10^{-12}}\ \text{м} = 226\ \text{м};$$

$$\lambda_2 = 2\cdot 3{,}14\cdot 3\cdot 10^8\sqrt{1{,}2\cdot 10^{-3}\cdot 80\cdot 10^{-12}}\ \text{м} = 584\ \text{м}.$$

ЗАДАЧИ ГРУППЫ А

1.(В.12.30) Написать уравнение движения, получающегося в результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебаний с одинаковым периодом T=8 с и одинаковой амплитудой A=0,02 м. Разность фаз между этими колебаниями $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/4$. Начальная фаза одного из этих колебаний равна нулю.

Ответ: $x = 3{,}7\sin\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{8}\right)$ см.

2.(В.12.31) Найти амплитуду A и начальную фазу φ гармонического колебания, полученного от сложения одинаково направленных колебаний, заданных уравнениями $x_1 = 0{,}02\sin(5\pi t + \pi/2)$ и $x_2 = 0{,}03\sin(5\pi t + \pi/4)$ м.

Ответ: A=4,6 см; φ=62°46′.

3.(В.12.39) Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = 2\sin\omega t$ м и $y = 2\cos\omega t$ м. Найти траекторию результирующего движения точки.

Ответ: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ – уравнение окружности радиусом R=2 м.

4.(В.12.40) Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях $x = \cos\pi t$ и $y = \cos\dfrac{\pi}{2}t$. Найти траекторию результирующего движения точки.

Ответ: $2y^2 - x = 1$ – уравнение параболы.

5.(В.12.60) Уравнение незатухающих колебаний имеет вид $x = \sin 2{,}5\pi t$ см. Найти смещение x от положения равновесия, скорость υ и ускорение a точки, находящейся на расстоянии l=20 м от источника колебаний, для момента времени t=1 с после начала колебаний. Скорость распространения колебаний c=100 м/с.

Ответ: x=0; υ=7,85 см/с; a=0.

6.(В.12.62) Найти разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек, лежащих на луче на расстоянии l=2 м друг от друга, если длина волны λ=1 м.

Ответ: $\Delta\varphi$=4π.

7.(В.12.65) Найти положение узлов и пучностей и начертить график стоячей волны, если: а) отражение происходит от менее плотной среды; б) отражение происходит от более плотной среды. Длина бегущей волны λ=12 см.

Ответ: а) $x_{узл}$=3, 9, 15, ... см; $x_{пуч}$=0, 6, 12, 18, ... см; б) $x_{узл}$=0, 6, 12, 18, ... см; $x_{пуч}$=3, 9, 15, ... см.

8.(В.12.66) Найти длину волны λ колебаний, если расстояние между первой и четвертой пучностями стоячей волны l=15 см.

Ответ: λ=0,1 м.

9.(В.14.4) Катушка индуктивностью L=30 мкГн присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин S=0,01 м^2 и расстоянием между ними d=0,1мм. Найти диэлектрическую проницаемость ε среды, заполняющей пространство между пластинами, если контур настроен на длину волны λ=750 м.

Ответ: $\varepsilon = 6$.

10.(В.14.7) Уравнение изменения со временем разности потенциалов на обкладках конденсатора в колебательном контуре имеет вид U=50cos10$^4\pi t$ В. Емкость конденсатора C=0,1 мкФ. Найти период T колебаний, индуктивность L контура, закон изменения со временем тока $I(t)$ в цепи и длину волны λ, соответствующую этому контуру.

Ответ: T=0,2 мс; L=10,15 мГн; $I(t) = -157\sin 10^4\pi t$ мА; λ=60 км.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ Б

1.(Ч.6.20) Складываются два гармонических колебания одинаковой частоты и одинакового направления:

$$x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \text{ и } x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2).$$

Начертить векторную диаграмму для момента времени t=0. Определить аналитически амплитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания. Отложить A и φ на векторной диаграмме. Найти уравнение результирующего колебания (в тригонометрической форме). Задачу решить для двух случаев: 1) A_1=1 см, $\varphi_1=\pi/3$; A_2=2 см, $\varphi_2=5\pi/6$; 2) A_1=1 см, $\varphi_1=2\pi/3$; A_2=1 см, $\varphi_2=7\pi/6$.

Ответ: 1) A=2,24 см, φ=0,686π рад; 2) A=1,41 см, φ=0,917π рад; $x=A\cos(\omega t+\varphi)$.

2.(Ч.6.27) Движение точки задано уравнениями $x=A_1\sin\omega t$ и $y=A_2\sin\omega(t+\tau)$, где A_1=10 см, A_2=5 см, ω=2 с$^{-1}$, $\tau=\pi/4$ с. Найти уравнение траектории и скорость точки в момент времени t=0,5 с.

Ответ: $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}=1$, υ=13,7 м/с.

3.(Ч.6.28) Материальная точка участвует одновременно в двух взаимно перпендикулярных колебаниях, выраженных уравнениями $x = A_1\cos\omega t$ и $y = -A_2\cos 2\omega t$, где A_1=2 см, A_2=1 см.

Найти уравнение траектории и построить ее.

Ответ: $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 1$.

4.(Ч.7.7) Волна с периодом T=1,2 с и амплитудой колебаний A=2 см распространяется со скоростью υ=15 м/с. Чему равно смещение $\xi(x,t)$ точки, находящейся на расстоянии x=45 м от источника волн, в тот момент, когда от начала колебаний источника прошло время t=4 с?

Ответ: $\xi = -1{,}73$ см.

5.(Ч.7.11) Определить скорость υ распространения волны в упругой среде, если разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек среды, отстоящих друг от друга на Δx=10 см, равна $\pi/3$. Частота колебаний ν равна 25 Гц.

Ответ: υ=15 м/с.

6.(Ч.7.22) Определить длину λ бегущей волны, если в стоячей волне расстояние l между: 1) первой и седьмой пучностями равно 15 см; 2) первым и четвертым узлами равно 15 см.

Ответ: 1) λ=5 см; 2) λ=10 см.

7.(И.4.189) Электромагнитная волна с частотой 3 МГц переходит из вакуума в немагитную среду с диэлектрической проницаемостью ε= 4. Найти приращение длины волны.

Ответ: $\Delta\lambda = -50$ м.

8.(Ч.26.24) Для демонстрации опытов Герца с преломлением электромагнитных волн иногда берут большую призму, изготовленную из парафина. Определить показатель преломления парафина, если его диэлектрическая проницаемость ε=2 и магнитная проницаемость μ=1.

Ответ: n=1,4.

9.(Ч.26.17) Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L=20 мкГн и конденсатора электроемкостью C=80 нФ. Величина емкости может отклоняться от указанного значения на 2 %. Вычислить, в каких пределах может изменяться длина волны λ, на которую резонирует контур.

Ответ: $\lambda=(2{,}38\pm0{,}02)10^3$ м.

10.(Ч.26.22) Индуктивность L колебательного контура равна 0,5 мГн. Какова должна быть электроемкость C контура, чтобы он резонировал на длину волны λ=300 м?

Ответ: C=51 пФ.

ЗАДАЧИ ГРУППЫ С

1.(И.4.11) Точка участвует одновременно в двух колебаниях одного направления, которые происходят по законам $x_1 = A\cos\omega t$ и $x_2 = A\cos 2\omega t$. Найти максимальную скорость точки.

Ответ: $\upsilon_{макс}=2{,}73A\omega$.

2.(И.4.12) При сложении двух гармонических колебаний одного направления результирующее колебание точки имеет вид $x = A\cos(2{,}1t)\cos(50{,}0t)$, где t – в секундах. Найти круговые частоты ω_1, ω_2 складываемых колебаний и период биений T результирующего колебания.

Ответ: ω_1=47,9 рад/с; ω_2=52,1 рад/с; T=1,5 с.

3.(И.4.14) Точка движется в плоскости xy по закону $x = A\sin\omega t$, $y = B\cos\omega t$, где A, B и ω – положительные постоянные. Найти:

а) уравнение траектории точки $y(x)$ и направление ее движения по этой траектории;

б) ускорение точки $\vec{a}$ в зависимости от ее радиус-вектора $\vec{r}$ относительно начала координат.

Ответ: а) $\dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{y^2}{B^2} = 1$, по часовой стрелке; б) $\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$.

4.(И.4.150) За сколько времени звуковые колебания пройдут расстояние l между точками A и B, если температура воздуха между ними меняется линейно от T_1 до T_2? Скорость звука в воздухе $\upsilon = \alpha\sqrt{T}$, где α – постоянная.

Ответ: $t = \dfrac{2l}{\alpha\left(\sqrt{T_1} + \sqrt{T_2}\right)}$.

5.(И.4.152) Плоская волна с частотой ω распространяется так, что некоторая фаза колебаний перемещается вдоль осей x, y, z со скоростями соответственно υ_1, υ_2, υ_3. Найти волновой вектор $\vec{k}$, предполагая орты осей координат $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ заданными.

Ответ: $\vec{k} = \omega\left(\dfrac{\vec{e}_x}{\upsilon_1} + \dfrac{\vec{e}_y}{\upsilon_2} + \dfrac{\vec{e}_z}{\upsilon_3}\right)$.

6.(И.4.190) Плоская электромагнитная волна падает нормально на поверхность плоскопараллельного слоя толщиной l из немагнитного вещества, диэлектрическая проницаемость которого экспоненциально падает от значения ε_1 на передней поверхности до ε_2 – на задней. Найти время распространения данной фазы волны через этот слой.

Ответ: $t = 2\left(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}\right)l/c\,\ln(\varepsilon_1/\varepsilon_2)$.

7.(И.4.192) Плоская электромагнитная волна $\vec{E} = \vec{E}_m\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$ распространяется в вакууме. Считая векторы $\vec{E}$ и $\vec{k}$ известными, найти вектор $\vec{H}$ как функцию времени t в точке с радиус-вектором $\vec{r} = 0$.

Ответ: $\vec{H} = \dfrac{1}{k}\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}\left[\vec{k}\vec{E}_m\right]\cos(ckt)$, где c – скорость волны в вакууме.

8.(И.4.194) Плоская электромагнитная волна с электрической составляющей $\vec{E} = \vec{E}_m\cos(\omega t - kx)$, распространяющаяся в вакууме, наводит ЭДС индукции $\mathscr{E}_{инд}$ в квадратном контуре со стороной l. Расположение контура показано на рис. 7. 3. Найти $\mathscr{E}_{инд}(t)$, если E_m=50 мВ/м, частота ν=100 МГц и l=50 см.

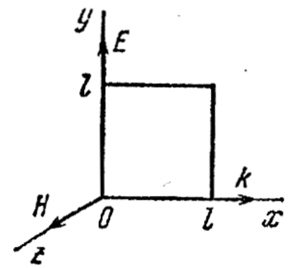

Рис. 7.3

Ответ:
$\mathscr{E}_{инд} = lE_m\left[\cos\omega t - \cos\left(\omega t - \omega l/c\right)\right] = 25\cos\left(\omega t + \pi/3\right)$ мВ. Здесь $\omega l/c = \pi/3$.

9.(И.4.196) Найти средний вектор Пойнтинга $\langle\vec{S}\rangle$ у плоской электромагнитной волны $\vec{E} = \vec{E}_m\cos(\omega t - \vec{k}\vec{r})$, если волна распространяется в вакууме.

Ответ: $\langle\vec{S}\rangle = \frac{\vec{k}\varepsilon_0 c^2 E_m^2}{2\omega}$.

10.(И.4.197) Плоская гармоническая линейно-поляризованная электромагнитная волна распространяется в вакууме. Амплитуда напряженности электрической составляющей волны E_m=50 мВ/м, частота ν=100 МГц. Найти:

а) действующее значение плотности тока смещения;

б) среднюю за период колебания плотность потока энергии.

Ответ: а) $j_{см} = \pi\sqrt{2}\varepsilon_0 \nu E_m = 0{,}20$ мА/м^2;

б) $\langle S\rangle = \frac{\varepsilon_0 c E_m^2}{2}$=3,3 мВт/м^2.

Библиографический список

1. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. 11-е изд. – М.: Наука, 1985. – 384 с.

2. Чертов А.Г., Воробьев А.А. Задачник по физике. 5-е изд. перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1988. – 527 с.

3. Иродов И.Е. Задачи по общей физике. 2-е изд. перераб. – М.: Наука, 1988. – 368 с.

4. Методическое пособие по решению задач по физике. Сост. В.М.Меркулова, А.В.Третьякова, А.С.Уколов и др.; Под ред. В.М.Меркуловой. – Таганрог: ТРТИ, 1992. – 193 с.

5. Савельев И.В. Курс общей физики. Т. 2. – М.: Наука, 1978. – 480 с.

6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие в 10 т. Т. 2. Теория поля. – 7-е изд., испр. – М.; Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 512 с.

СОДЕРЖАНИЕ