

53(076)

C232

№ 5679



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
"ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

Инженерно-технологическая академия

Институт нанотехнологий, электроники и приборостроения

А.Г. Захаров, Н.А. Какурина, Ю.Б. Какурин, А.С. Черепанцев

**СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ ФИЗИКА. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ
ТВЕРДОТЕЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ**

Учебно-методическое пособие

Кафедра физики

Ростов-на-Дону – Таганрог
Издательство Южного федерального университета
2017

УДК 53(076.1)
ББК 22.3я73
С232

*Печатается по решению научно-методического совета
Южного федерального университета*

Рецензент

кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики института нанотехнологий, электроники и приборостроения ЮФУ *А. Б. Колпачёв*

- Захаров, А. Г.
С232 Сборник задач по дисциплине «Физика. Элементы физики твердотельной электроники»: учебно-методическое пособие / А.Г. Захаров, Н. А. Какурина, Ю.Б. Какурин, А.С. Черепанцев; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону – Таганрог: Издательство Южного федерального университета, 2017. – 100 с., 25 ил., 2 табл. – Библиогр.: 8 назв.

В сборнике приводятся вопросы теории, методические рекомендации, примеры решения и условия задач для работы в аудитории, а также самостоятельной работы по дисциплине «Физика», по разделу «Элементы физики твердотельной электроники». Сборник предназначен для студентов 2-го курса очной формы, обучающихся по направлению подготовки 11.05.00 «Радиоэлектронные системы и комплексы».

УДК 53(076)
ББК 22.3я73

© Южный федеральный университет, 2017
© А.Г. Захаров, Н.А. Какурина,
Ю.Б. Какурин, А.С. Черепанцев, 2017

ПРЕДИСЛОВИЕ

Вашему вниманию предлагается сборник вопросов, упражнений и задач по дисциплине «Физика. Элементы физики твердотельной электроники».

Сборник предназначен для студентов второго курса четвертого семестра дневной формы обучения по специальностям 11.05.01 – радиоэлектронные системы и комплексы, 11.05.02 – Специальные радиотехнические системы, 11.05.04 – Инфокоммуникационные технологии и системы специальной связи.

Подбор задач охватывает основные темы изучаемой дисциплины: статистика носителей заряда в полупроводниках; кинетические явления в полупроводниках; контактные явления в полупроводниках; поверхностные явления.

Сборник задач структурно разбит по числу занятий, проводимых в учебных группах в соответствии с календарным планом. Материал каждого раздела включает в себя: вопросы теории, основные формулы для решения задач, примеры решения задач, условия задач с ответами.

Вопросы теории приводятся для ориентации студента в тех проблемах, знание которых необходимо для решения задач по конкретной теме.

Основные формулы представлены в виде соотношений, наиболее часто применяемых при решении задач. Приводимые примеры решения задач облегчат освоение методики их решения.

При выполнении расчетов следует обратить внимание и учесть тот факт, что в приводимых условиях примеров и задач величины электрофизических характеристик полупроводников и полупроводниковых структур зачастую имеют размерности, которые широко используются в микроэлектронике и не соответствуют системе СИ (см^{-3} , $\text{А}/\text{см}^2$, $\text{см}^2/\text{с}$ и др.). Кроме того, в некоторых условиях задач такие характеристики полупроводников, как подвижность и концентрация носителей заряда, могут отличаться по величине от приводимых в таблице прил. 3, что допустимо, поскольку указанные характеристики зависят от ряда факторов, например концентрации примесных атомов, температуры и т.п.

1. ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ

1. Законы дисперсии тепловых колебаний кристаллической решетки.
2. Квантовомеханические задачи.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Общее уравнение Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \Psi,$$

где $\Psi(x, y, z, t)$ – волновая функция частицы; m – масса микрочастицы;

Δ – оператор Лапласа $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$; $U(x, y, z, t)$ – потенциальная

энергия поля, в котором движется микрочастица.

2. Стационарное уравнение Шредингера:

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0,$$

где $\psi(x, y, z)$ – амплитуда волновой функции $\Psi(x, y, z, t)$; E – полная энергия микрочастицы; U – ее потенциальная энергия.

Стандартные условия, которым должны удовлетворять физически допустимые решения уравнения Шредингера: *конечность, непрерывность и однозначность* ψ -функции, *непрерывность ее производной* по координатам.

3. Условие нормировки для функции ψ :

$$\int_V |\psi|^2 dx = 1.$$

4. Вероятность прохождения микрочастицы через потенциальный барьер – коэффициент «прозрачности»:

$$D = \exp\left(-\frac{2}{\eta} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(U-E)} dx\right),$$

где x_1 и x_2 – координаты точек, между которыми потенциальная энергия микрочастицы U больше полной энергии E . Кроме того, коэффициент «прозрачности» может быть рассчитан по формуле

$$D = 1 - \left| \frac{A_2}{A_1} \right|^2,$$

где A_1 – амплитуда падающей на барьер волны, A_2 – амплитуда отраженной от барьера волны.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Пусть дана одномерная модель кристалла. Она представляет собой цепочку идентичных атомов массой M , удаленных друг от друга на расстоянии a . Энергия взаимодействия атомов определяется квадратичной зависимостью $U = \frac{\beta(x-a)^2}{2}$. Определить зависимость частоты тепловых колебаний ансамбля атомов от длины волны $\omega(\lambda)$ (от волнового вектора $\omega(2\pi/\lambda)$) (*закон дисперсии фононов в одномерной цепочке идентичных атомов*).

Решение

Квадратичная зависимость энергии взаимодействия атомов определяет силу, действующую на атом, при выведении его из положения равновесия:

$$f(x) = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\beta(x-a).$$

Такая сила взаимодействия аналогична силе упругого взаимодействия частиц конечной массы соединенных упругим элементом (закон Гука). На рис.1.1 представлена модель одномерного кристалла, с упругими элементами связи между соседними атомами.

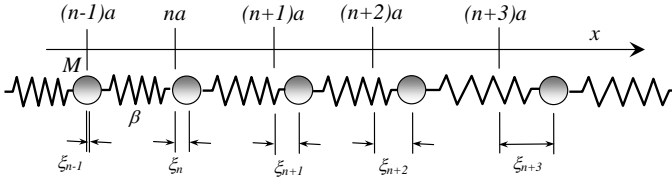


Рис.1.1. Модель одномерного кристалла, с упругими элементами связи между соседними атомами

По оси x отложены положения равновесия последовательности атомов с учетом расстояния между атомами в состоянии покоя a и номера соответствующего атома в цепочке N атомов: $1 \leq n \leq N$. Соответствующие отклонения атомов от положения равновесия показаны в нижней части рисунка: $\xi_n = x_n - na$.

Решение задачи сводится к решению дифференциального уравнения движения n -го атома с учетом его взаимодействия с ближайшими соседями:

$$M \ddot{\xi}_n = \beta(\xi_{n+1} - \xi_n) - \beta(\xi_n - \xi_{n-1}). \quad (1.1)$$

Дополнительными условием в постановке математической задачи является условие постоянства длины кристалла $L = Na$.

Будем искать решение (1.1) в общем виде бегущей волны. Для n -го атома:

$$\xi_n(t, x) = Ae^{i(\omega t + kx)} = Ae^{i(\omega t + kna)}. \quad (1.2)$$

Так как длина кристалла не меняется (возбуждение стоячих волн), то:

$$Ae^{i(\omega t + k \cdot 0)} = Ae^{i(\omega t + k \cdot Na)} = Ae^{i(\omega t + k \cdot L)}. \quad (1.3)$$

С учетом периодичности функции $e^{i\varphi}$, равной 2π , равенство (1.3) выполняется при выполнении условия $kL = 2\pi s$.

Тогда

$$k(s) = \frac{2\pi}{L} s, \quad (s = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N/2). \quad (1.4)$$

Соотношение (1.4) указывает, что волновой вектор k принимает дискретный набор значений.

Подставим значение k_s в исходное уравнение (1.1). Для этого учтем:

$$\begin{aligned} \xi_n(t) &= Ae^{i(\omega t + k_n a)}, \\ \xi_{n+1}(t) &= Ae^{i(\omega t + k(n+1)a)} = Ae^{i(\omega t + k_n a)} e^{i k a} = \xi_n(t) e^{i k a}, \\ \xi_{n-1}(t) &= Ae^{i(\omega t + k(n-1)a)} = Ae^{i(\omega t + k_n a)} e^{-i k a} = \xi_n(t) e^{-i k a}, \\ \ddot{\xi}_n(t) &= (i\omega)^2 Ae^{i(\omega t + k_n a)} = -\omega^2 \xi_n(t). \end{aligned}$$

После подстановки получим

$$-\omega^2 M \xi_n = \beta \xi_n (e^{i k_s a} + e^{-i k_s a} - 2).$$

С учетом соотношения Эйлера $\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$:

$$\frac{\omega^2 M}{2\beta} = (1 - \cos(k_s a)).$$

Или
$$\frac{\omega^2 M}{4\beta} = \sin^2\left(\frac{k_s a}{2}\right).$$

Для искомой зависимости $\omega = \pm 2\sqrt{\frac{\beta}{M}} \sin\left(\frac{k_s a}{2}\right).$

Так как значение частоты колебаний атома не зависит от его порядкового номера, то все атомы колеблются с одной и той же частотой и амплитудой. Это соответствует распространению бегущих волн.

Поскольку частота не может быть отрицательной, то знак \pm может быть перенесен к волновому вектору и соответствует двум волнам, распространяющимся в противоположных направлениях:

$$\omega = 2\sqrt{\frac{\beta}{M}} \sin\left(\frac{k_s a}{2}\right), \quad (1.5)$$

где $k_s = \frac{2\pi}{L} s$, $s = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N/2$.

Полученная зависимость $\omega(k)$ определяет закон дисперсии фононов для одномерной цепочки атомов – рис.1.2.

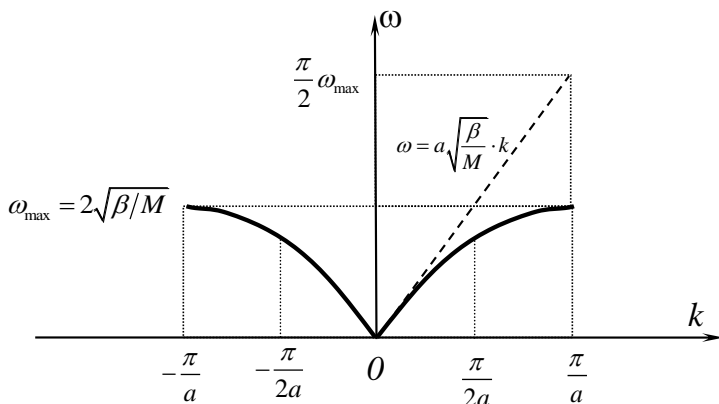


Рис. 1.2. Закон дисперсии $\omega(k)$ фононов для одномерной цепочки атомов (сплошная кривая) и линейный закон дисперсии звуковых волн в непрерывной среде (штриховая прямая)

Кривая представляет собой дискретные значения $\omega(k_s)$. Минимальная величина волнового вектора $k = \frac{2\pi}{Na}$ соответствует минимальному значению $\omega_{\min} = 2\sqrt{\frac{\beta}{M}} \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) \approx 2\sqrt{\frac{\beta}{M}} \frac{\pi}{N}$. Максимальная величина волнового вектора достигается при $s = \frac{N}{2}$ и равна $k = \frac{\pi}{a}$. Соответствующая частота нормальных колебаний решетки: $\omega = 2\sqrt{\frac{\beta}{M}}$. В этом случае длина волны $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2a$ соответствует противофазным колебаниям соседних атомов.

Пример 2. Конечная одномерная решетка атомов состоит из двух типов атомов. Атомы с массой M_1 чередуются с атомами массой M_2

($M_1 > M_2$). Определить зависимость частоты тепловых колебаний ансамбля атомов от величины волнового вектора (закон дисперсии), считая, что взаимодействие между соседними атомами является упругим.

Решение

Пусть четные атомы имеют массу M_1 , а нечетные – массу M_2 . По аналогии с предыдущей задачей, уравнения движения двух соседних атомов с разными массами:

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{\xi}_{2n} &= \beta (\xi_{2n+1} + \xi_{2n-1} - 2\xi_{2n}), \\ M_2 \ddot{\xi}_{2n+1} &= \beta (\xi_{2n+2} + \xi_{2n} - 2\xi_{2n+1}). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Решение уравнений будем искать в таком же виде, как и решение предыдущей задачи. Оно представляет собой колебания атомов в среде, в которой распространяется волна $e^{i(\omega t + kx)}$:

$$\begin{aligned} \xi_{2n} &= A e^{i(\omega t + 2nak)}, \\ \xi_{2n+1} &= B e^{i(\omega t + (2n+1)ak)}, \end{aligned}$$

где координаты четных атомов равны $x = 2na$,
координаты нечетных – $x = (2n+1)a$,

A и B – амплитуды соответствующих колебаний.

Тогда для слагаемых в системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \xi_{2n}(t) &= A e^{i(\omega t + 2nak)}, \\ \xi_{2n+1}(t) &= B e^{i(\omega t + (2n+1)ak)} = B e^{i(\omega t + 2nak)} e^{iak}, \\ \xi_{2n-1}(t) &= B e^{i(\omega t + (2n-1)ak)} = B e^{i(\omega t + 2nak)} e^{-ika}, \\ \xi_{2n+2}(t) &= A e^{i(\omega t + (2n+2)ak)} = A e^{i(\omega t + (2n+1)ak)} e^{iak}, \\ \ddot{\xi}_{2n}(t) &= (i\omega)^2 A e^{i(\omega t + 2nak)} = -\omega^2 \xi_{2n}(t), \\ \ddot{\xi}_{2n+1}(t) &= (i\omega)^2 B e^{i(\omega t + (2n+1)ak)} = -\omega^2 \xi_{2n+1}(t). \end{aligned}$$

Подставляя соотношения в уравнения движения, получим систему уравнений относительно A, B :

$$\begin{aligned}
 -\omega^2 M_1 A &= \beta B (e^{ika} + e^{-ika}) - 2\beta A, \\
 -\omega^2 M_2 B &= \beta A (e^{ika} + e^{-ika}) - 2\beta B.
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

Учтем соотношение Эйлера: $\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$. Однородная система линейных алгебраических уравнений (1.7) имеет нетривиальное решение, если детерминант коэффициентов этой системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix}
 2\beta - \omega^2 M_1 & 2\beta \cos ka \\
 -2\beta \cos ka & 2\beta - \omega^2 M_2
 \end{vmatrix} = 0.
 \tag{1.8}$$

Это условие приводит к наличию двух мод колебаний неоднородной цепочки атомов с различными собственными частотами:

$$\omega_{\pm}^2 = \beta \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \pm \beta \sqrt{\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right)^2 - \frac{4 \sin^2 ka}{M_1 M_2}}.
 \tag{1.9}$$

1. Рассмотрим длинноволновую часть спектра: $\lambda \gg a$ или $\frac{a}{\lambda} \ll 1$.

Это условие для нашей задачи удобно переписать:

$$\frac{2\pi a}{\lambda} = ka \ll 1.$$

С учетом $\frac{2 \sin(ka)}{\sqrt{M_1 M_2}} \ll \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right)$:

$$\omega_{+} \approx \sqrt{2\beta \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right)}.
 \tag{1.10}$$

При расчете приближения ω_{-} учтем:

$$\sin(ka) \approx ka,$$

$$\sqrt{1 - \frac{4k^2 a^2 M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4k^2 a^2 M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2}.$$

Тогда

$$\omega_-^2 = \beta \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) - \beta \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \sqrt{1 - \frac{4 \sin^2 ka}{M_1 M_2 \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right)^2}},$$

$$\begin{aligned} \omega_-^2 &\approx \beta \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) - \beta \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4k^2 a^2 M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2} \right) = \\ &= \beta \frac{2k^2 a^2}{M_1 + M_2}, \end{aligned}$$

$$\omega_- = \left(a \sqrt{\frac{2\beta}{M_1 + M_2}} \right) k. \quad (1.11)$$

Зависимость (1.11) ω_- описывает закон дисперсии длинноволновых продольных акустических фононов и при $M_1 = M_2$ переходит в выражение для скорости длинноволновых колебаний в монокристаллической цепочке.

В том же приближении $ka \ll 1$, подставляя ω_- и ω_+ в одно из характеристических уравнений, находим отношение амплитуд колебаний при частотах

ω_- :

$$-a^2 k^2 \frac{2\beta M_1}{M_1 + M_2} A = 2\beta \cos(ka) B - 2\beta A,$$

или

$$2\beta \left(1 - a^2 k^2 \frac{M_1}{M_1 + M_2} \right) A = 2\beta \cos(ka) B.$$

Раскладываем косинус:

$$\left(1 - a^2 k^2 \frac{M_1}{M_1 + M_2}\right) A = \left(1 - \frac{1}{2} a^2 k^2\right) B.$$

Отношение амплитуд A/B при $M_1 \approx M_2$ равно

$$A/B \approx 1. \quad (1.12)$$

Соотношение (1.12) означает, что колебания соседних атомов происходят с одинаковой амплитудой и при больших λ практически синфазно. Данная мода называется акустической модой.

Для ω_+ :

$$-2\beta \frac{M_1 + M_2}{M_2} A = 2\beta \cos(ka) B - 2\beta A,$$

или

$$2\beta \left(1 - \frac{M_1 + M_2}{M_2}\right) A = 2\beta \cos(ka) B.$$

В приближении $\cos(ka) \approx 1$:

$$-\frac{M_1}{M_2} A = B. \quad (1.13)$$

Из соотношения амплитуд (1.13) при ω_+ следует, что во второй моде колебаний соседние атомы колеблются в противофазе и с разными амплитудами. Эта мода колебаний называется оптической модой.

Общий вид дисперсионных кривых $\omega_-(k)$ и $\omega_+(k)$ для акустической и оптической ветвей фононного спектра представлен на рис.1.3. Все энергетически различные состояния фононов находятся в интервале значений волнового вектора $-\pi/2a \leq k \leq \pi/2a$. Характерно, что в длинноволновой области частота оптических фононов практически не зависит от значений волнового вектора.

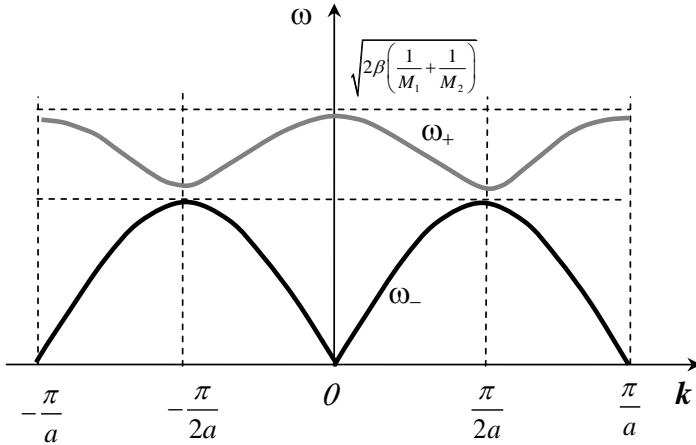


Рис. 1.3. Общий вид дисперсионных кривых $\omega_-(k)$ и $\omega_+(k)$ для акустической и оптической ветвей фоновонного спектра

Пример 3. Рассмотрите прямоугольную потенциальную яму с бесконечно высокими стенками и шириной l (рис. 1.4). Определите вид волновой функции и энергию микрочастицы, находящейся в потенциальной яме.

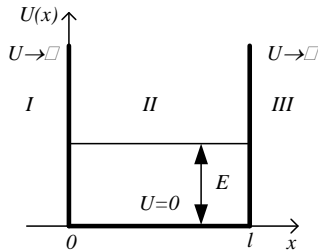


Рис. 1.4. Прямоугольная потенциальная яма с бесконечно высокими стенками шириной l

Решение

Запишем уравнение Шредингера для указанных на рис. 1.4 областей:
– для областей I, III

$$\frac{d^2\psi_{I,III}}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2}(E-U)\psi_{I,III} = 0 \quad (1.14)$$

– для области II

$$\frac{d^2\psi_{II}}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2}E\psi_{II} = 0. \quad (1.15)$$

Введем обозначения в уравнениях (1.14) и (1.15) соответственно:

$$k_1 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(E-U)};$$

$$k = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE}.$$

С учетом введенных обозначений общие решения уравнений (1.14) и (1.15) будут иметь вид

$$\psi_{I,III} = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} = Ae^{-ik_2x} + Be^{ik_2x}; \quad (1.16)$$

$$\psi_{II} = Ce^{ikx} + De^{-ikx}. \quad (1.17)$$

В (1.16) $k_1 = ik_2$. Найдем значения коэффициентов A , B , C и D . Из условия задачи $U \rightarrow \infty$ следует, что $k_2 \rightarrow \infty$. Для того чтобы ψ_I оставалась при этом конечной, необходимо чтобы $B = 0$. С другой стороны, чтобы ψ_I была конечной и при $x \rightarrow -\infty$, необходимо чтобы и $A = 0$. Таким образом, в областях I и III $\psi_I(x) = \psi_{III}(x) = 0$.

Для определения C и D , воспользовавшись условием непрерывности волновой функции

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) = 0,$$

получаем $C+D = 0$ или $C = -D$. Подставив полученное соотношение в (1.17), найдем

$$\psi_{II} = C(e^{ikx} - e^{-ikx}) = C_1 \sin kx, \quad (1.18)$$

где $C_1 = 2iC$.

Из условия непрерывности для правой стенки потенциальной ямы

$$\psi_{II}(l) = \psi_{III}(l) = 0,$$

получим

$$C_1 \sin kl = 0.$$

При $C_1 \neq 0$ это возможно, когда

$$kl = n\pi, n = 1, 2, \dots$$

Тогда k_n может иметь следующие значения:

$$k_n = n \frac{\pi}{l}, n = 1, 2, \dots$$

Подставляя k_n в (1.18), получим следующее выражение для волновой функции ψ_{II} , которую обозначим через ψ_n :

$$\psi_n = C_n \sin\left(n \frac{\pi x}{l}\right).$$

Постоянная C_n находится из условия нормировки этой функции

$$C_n = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Таким образом, волновая функция микрочастицы в потенциальной яме имеет вид

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(n \frac{\pi x}{l}\right),$$

а энергия состояния, описываемого данной волновой функцией, определяется выражением

$$E_n = \frac{h^2}{8ml^2} n^2.$$

Пример 4. Одномерный потенциальный барьер имеет форму, представленную на рис. 1.5. Определите коэффициент прозрачности этого барьера для микрочастиц массой m и с энергией E ($U_1 < E < U_0$), движущихся к нему слева.

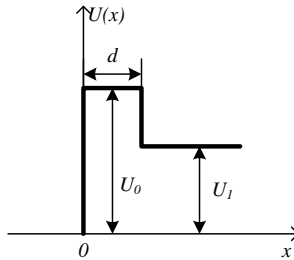


Рис. 1.5. Одномерный потенциальный барьер

Решение

Одномерное амплитудное уравнение Шредингера записывается в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = (E - U)\psi. \quad (1.19)$$

Если частица расположена слева от барьера, то $U = 0$ и уравнение (1.19) принимает вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi.$$

Общее решение данного уравнения определяется выражением

$$\psi_L = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}, \quad (1.20)$$

где

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\eta}.$$

Для микрочастиц, находящихся в центральной части, имеем $U = U_0$, причем $U_0 > E$. Соответствующее решение уравнения Шредингера (1.19) для этой области записывается как

$$\psi_M = Ce^{k_2x} + De^{-k_2x}, \quad (1.21)$$

где

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\eta}.$$

Наконец, для микрочастиц, находящихся справа от выступа потенциального барьера, $U = U_1 < E$. Здесь, поскольку мы рассматриваем волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x , решение уравнения (1.19) будет следующим:

$$\psi_R = Fe^{ik_3x}, \quad (1.22)$$

где

$$k_3 = \frac{\sqrt{2m(E - U_1)}}{\eta}.$$

Запишем теперь условия, которым должны удовлетворять функции ψ_L , ψ_M и ψ_R :

$$Ae^{-ik_1d/2} + Be^{ik_1d/2} = Ce^{-k_2d/2} + De^{k_2d/2}; \quad (1.23)$$

$$ik_1Ae^{-ik_1d/2} - ik_1Be^{ik_1d/2} = k_2Ce^{-k_2d/2} - k_2De^{k_2d/2}; \quad (1.24)$$

$$Fe^{ik_3d/2} = Ce^{k_2d/2} + De^{-k_2d/2}; \quad (1.25)$$

$$ik_3Fe^{ik_3d/2} = k_2Ce^{k_2d/2} - k_2De^{-k_2d/2}. \quad (1.26)$$

Из условий (1.23) и (1.24) получаем

$$2ik_1 A e^{-ik_1 d/2} = (ik_1 + k_2) C e^{-k_2 d/2} + (ik_1 - k_2) D e^{k_2 d/2}, \quad (1.27)$$

а из условий (1.25) и (1.26) определяем:

$$(k_2 + ik_3) F e^{ik_3 d/2} = 2k_2 C e^{k_2 d/2}; \quad (1.28)$$

$$(k_2 - ik_3) F e^{ik_3 d/2} = 2k_2 D e^{-k_2 d/2}. \quad (1.29)$$

Путем исключения из уравнений (1.27), (1.28) и (1.29) коэффициентов C и D находим:

$$\frac{2ik_1 A e^{-ik_1 d/2}}{F e^{ik_3 d/2}} = \frac{(ik_1 + k_2) e^{-k_2 d} (k_2 + k_3)}{2k_2} + \frac{(ik_1 - k_2) e^{k_2 d} (k_2 - k_3)}{2k_2},$$

откуда получаем следующее выражение для коэффициента прозрачности барьера:

$$\begin{aligned} \frac{k_3 |F|^2}{k_1 |A|^2} &= \frac{16k_1 k_2^2 k_3}{(k_2^2 - k_1 k_3)^2 (e^{-k_2 d} - e^{k_2 d})^2 + (k_1 k_2 + k_2 k_3)^2 (e^{-k_2 d} + e^{k_2 d})^2} = \\ &= \frac{\sqrt[4]{E(U_0 - E)} \sqrt{E - U_1}}{[(U_0 - E) - \sqrt{E(E - U_1)}]^2 \text{sh}^2 k_2 d + (U_0 - E)(\sqrt{E} - \sqrt{E - U_1})^2 \text{ch}^2 k_2 d}. \end{aligned}$$

Пример 5. Потенциальная энергия имеет вид $U(x) = \tilde{U}(x) + \alpha \delta(x - x_0)$, где $\tilde{U}(x)$ – ограниченная функция. Каковы свойства волновой функции микрочастицы $\psi(x)$ и ее производной в окрестности точки x_0 ?

Решение

Запишем уравнение Шредингера для данного случая:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + [U(x) + \alpha \delta(x - x_0)] \psi = E \psi. \quad (1.30)$$

Из уравнения (1.30) вытекает непрерывность функции $\psi(x)$ в точке x_0 и разрывный характер производной функции в этой точке. Величина скачка производной функции должна быть такой, чтобы

δ -функциональное слагаемое в функции $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ (производная разрывной функции) компенсировало слагаемое $\alpha\delta(x-x_0)\psi(x_0)$ в левой части уравнения (1.30). Проинтегрировав (1.30) по области $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$, находим

$$\Delta \frac{d\psi}{dx}(x_0) \equiv \frac{d\psi}{dx}(x_0+0) - \frac{d\psi}{dx}(x_0-0) = (2m\alpha/\hbar^2)\psi(x_0);$$

$$\psi(x_0+0) = \psi(x_0-0). \quad (1.31)$$

Пример 6. Определить коэффициенты прохождения и отражения микрочастиц в случае δ -функционального потенциала $U(x) = a\delta(x)$ (рис.1.6). Рассмотреть предельные случаи $E \rightarrow \infty$ и $E \rightarrow 0$.

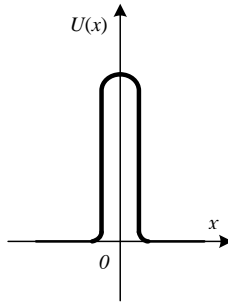


Рис. 1.6. δ -функциональный потенциал

Решение

Считаем для определенности, что микрочастицы движутся в положительном направлении оси x . Решения уравнения Шредингера, описывающего отражение таких частиц, при $x < 0$ и $x > 0$ имеют вид

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + A_1(k)e^{-ikx}, & x < 0; \\ A_2(k)e^{ikx}, & x > 0, \end{cases} \quad (1.32)$$

где $k = \sqrt{2mE/\hbar^2} > 0$.

Условия сшивания функции (1.32) в точке $x = 0$ (см. пример 5, выражение (1.31)) позволяют записать:

$$I + A_1 = A_2, \quad ik(A_2 - I + A_1) = 2m\alpha A_2 / \hbar^2.$$

Коэффициенты отражения $R(E) = A_1^2$ и прохождения $D(E) = A_2^2$ обладают свойством $R + D = 1$, поэтому

$$R(E) \approx m\alpha^2 / 2E\hbar^2 \rightarrow 0 \text{ при } E \rightarrow \infty;$$

$$D(E) \approx 2E\hbar^2 / m\alpha^2 \rightarrow 0 \text{ при } E \rightarrow 0.$$

Пример 7. Определите энергетический спектр электрона, движущегося в одномерном периодическом поле прямоугольных потенциальных ям. Ширина ямы равна a , ширина потенциального барьера, разделяющего ямы b , длина цепочки ям равна L , период цепочки равен $c = a + b$, высота потенциального барьера равна U_0 .

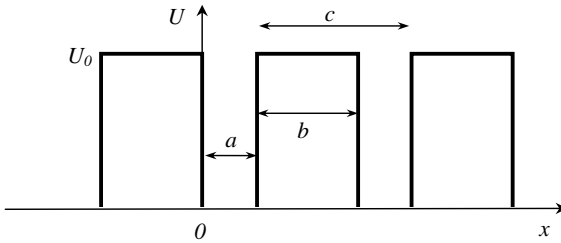


Рис. 1.7. Вид периодического потенциального барьера

Решение

В задаче необходимо решить стационарное уравнение Шредингера для выбранного вида $U(x)$:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - U(x)]\psi(x) = 0. \quad (1.33)$$

Пусть начало координат совпадает с левым краем потенциальной ямы (рис.1.7). Тогда

$$U(x) = \begin{cases} U_0, & a \leq x \leq a + b \\ 0, & 0 \leq x < a. \end{cases}$$

Будем искать волновую функцию в виде

$$\psi(x) = u(x)e^{ikx}, \quad (1.34)$$

где функция $u(x)$ – периодическая функция с периодом c :

$$u(x) = u(x + nc), \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Подставив волновую функцию в исходное уравнение, получаем два уравнения для областей с различным значением потенциальной энергии.

Для электронов внутри потенциальной ямы $0 \leq x < a$:

$$\frac{d^2 u_1(x)}{dx^2} + 2ik \frac{du_1(x)}{dx} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - E_k] u_1(x) = 0. \quad (1.35)$$

Для электронов в области потенциального барьера $a \leq x \leq a + b$:

$$\frac{d^2 u_2(x)}{dx^2} + 2ik \frac{du_2(x)}{dx} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - E_k - U_0] u_2(x) = 0. \quad (1.36)$$

В обоих уравнениях E_k имеет смысл кинетической энергии электрона:

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}.$$

Рассмотрим решение первого уравнения (1.35). Для решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 2ik\lambda + \left[\frac{2m}{\hbar^2} E - k^2 \right] = 0.$$

Решения данного квадратного уравнения:

$$\lambda_{1,2} = -ik \pm \sqrt{-k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} E + k^2} = -ik \pm i \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}.$$

Тогда общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$u_1 = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} = Ae^{i(\alpha-k)x} + Be^{-i(\alpha+k)x}, \quad (1.37)$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E}$.

Аналогично решение второго уравнения представляется в виде

$$u_2 = Ce^{i(\beta-k)x} + De^{-i(\beta+k)x}, \quad (1.38)$$

где $\beta = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - U_0)}$.

Для нахождения констант A, B, C, D необходимо сформулировать дополнительные условия. Такими условиями являются граничные условия для функций u_1, u_2 . В нашем случае – это условия непрерывности функций и ее производных в области скачка потенциальной энергии, а также свойство периодичности с периодом $c = a + b$:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1|_{x=0} = u_2|_{x=0}, \\ \frac{du_1}{dx}|_{x=0} = \frac{du_2}{dx}|_{x=0}, \\ u_1|_{x=a} = u_2|_{x=-b}, \\ \frac{du_1}{dx}|_{x=a} = \frac{du_2}{dx}|_{x=-b}. \end{array} \right.$$

Подставив функции u_1, u_2 (1.37 – 1.38) в граничные условия, получим систему алгебраических уравнений относительно неизвестных констант A, B, C, D :

$$\begin{aligned} A + B &= C + D, \\ Ai(\alpha - k) - Bi(\alpha + k) &= Ci(\beta - k) - Di(\beta + k), \\ Ae^{i(\alpha-k)a} + Be^{-i(\alpha+k)a} &= Ce^{i(\beta-k)(-b)} + De^{-i(\beta+k)(-b)}, \\ Ai(\alpha - k)e^{i(\alpha-k)a} - Bi(\alpha + k)e^{-i(\alpha+k)a} &= \\ &= Ci(\beta - k)e^{i(\beta-k)(-b)} - Di(\beta + k)e^{-i(\beta+k)(-b)}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Условием существования нетривиального решения полученной системы однородных уравнений (1.39) является равенство нулю ее определителя:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ i(\alpha-k) & -i(\alpha+k) & -i(\beta-k) & i(\beta+k) \\ e^{i(\alpha-k)a} & e^{-i(\alpha+k)a} & -e^{-i(\beta-k)b} & -e^{i(\beta+k)b} \\ i(\alpha-k)e^{i(\alpha-k)a} & -i(\alpha+k)e^{-i(\alpha+k)a} & -i(\beta-k)e^{-i(\beta-k)b} & i(\beta+k)e^{i(\beta+k)b} \end{vmatrix} = 0.$$

С учетом свойств определителя матрицы, уравнение можно переписать в более простом виде:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ \alpha & -\alpha & -\beta & \beta \\ e^{i(\alpha-k)a} & e^{-i(\alpha+k)a} & -e^{-i(\beta-k)b} & -e^{i(\beta+k)b} \\ (\alpha-k)e^{i(\alpha-k)a} & -(\alpha+k)e^{-i(\alpha+k)a} & -(\beta-k)e^{-i(\beta-k)b} & (\beta+k)e^{i(\beta+k)b} \end{vmatrix} = 0.$$

Разложив определитель по элементам четвертой строки:

$$\begin{aligned} & (\alpha-k)e^{i(\alpha-k)a} \left[e^{-i(\alpha+k)a} \cdot 2\beta + e^{-i(\beta-k)b} \cdot (\alpha-\beta) - e^{i(\beta+k)b} \cdot (\alpha+\beta) \right] + \\ & + (\alpha+k)e^{-i(\alpha+k)a} \left[e^{i(\alpha-k)a} \cdot 2\beta + e^{-i(\beta-k)b} \cdot (-\alpha-\beta) - e^{i(\beta+k)b} \cdot (-\alpha+\beta) \right] - \\ & - (\beta-k)e^{-i(\beta-k)b} \left[e^{i(\alpha-k)a} (\alpha-\beta) - e^{-i(\alpha+k)a} (-\alpha-\beta) - e^{i(\beta+k)b} \cdot 2\alpha \right] - \\ & - (\beta+k)e^{i(\beta+k)b} \left[e^{i(\alpha-k)a} (\alpha+\beta) - e^{-i(\alpha+k)a} (-\alpha+\beta) - e^{-i(\beta-k)b} \cdot 2\alpha \right] = 0. \end{aligned}$$

После группирования слагаемых:

$$\begin{aligned} & 4\alpha\beta \left(e^{-i2ka} + e^{-i2kb} \right) + \\ & + e^{-ik(a-b)} \left[(\alpha-\beta)^2 \left(e^{i(\alpha-\beta b)} + e^{-i(\alpha-\beta b)} \right) - (\alpha+\beta)^2 \left(e^{i(\alpha+\beta b)} + e^{-i(\alpha+\beta b)} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Используя соотношение Эйлера, окончательно получаем:

$$\cos(k(a+b)) = \cos(\alpha a)\cos(\beta b) - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha\beta} \sin(\alpha a)\sin(\beta b).$$

Полученное соотношение позволяет определить связь $E(k)$. Рассмотрим определение зависимости при упрощающем предположении о дельтообразном виде потенциальных барьеров: $b \cdot U_0 = \text{const}$ при $b \rightarrow 0$. Тогда, с учетом выражений для α, β :

$$\beta b \rightarrow 0, \beta^2 b \rightarrow \text{const}, \alpha^2 b \rightarrow 0, \sin(\beta b) \rightarrow \beta b, \cos(\beta b) \rightarrow 1.$$

Уравнение может быть представлено в виде:

$$\cos(ka) = \cos(\alpha a) - \frac{\beta^2}{2\alpha} \sin(\alpha a).$$

Обозначив $P = -\frac{\beta^2 ab}{2}$ параметр прозрачности барьера, уравнение представится в виде

$$\cos(ka) = \cos(\alpha a) + P \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a}. \quad (1.40)$$

Трансцендентное уравнение (1.40) выражает зависимость энергии электрона, которая входит в коэффициент α , от волнового числа k для барьеров различной прозрачности P . Его решение удобно описать графически.

Так как $-1 \leq \cos(ka) \leq 1$, то это ограничение справедливо и для левой части уравнения:

$$\left| \cos(\alpha a) + P \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a} \right| \leq 1.$$

Неравенство определяет разрешенные области энергий электрона – рис.1.8.

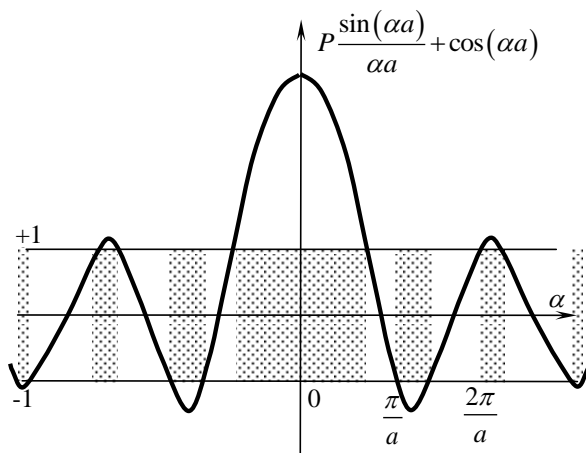


Рис. 1.8. Графическое решения уравнения зависимости энергии электрона, от волнового числа k для барьеров различной прозрачности P

Интервалы запрещенных значений заштрихованы. Наличие запрещенных областей значений параметра α определяет и запрет существования определенных значений энергий электрона E , входящего в соотношение для α . Графически это можно представить как разрыв функции энергии электрона E в дисперсионном соотношении $E(k)$ при

$$k = \pm \frac{\pi}{a}, \pm \frac{2\pi}{a}, \pm \frac{3\pi}{a}, \dots \text{ (рис.1.9).}$$

Таким образом, в результате решения задачи нахождения энергетических состояний электрона при наличии периодического потенциала получены дискретные уровни энергии. При этом происходит чередование разрешенных и запрещенных зон.

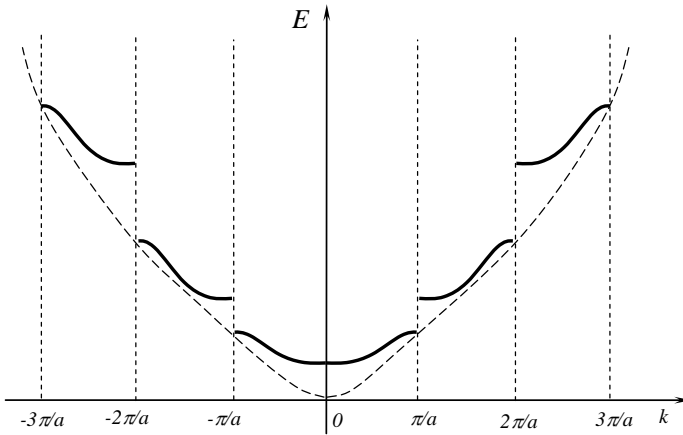


Рис. 1.9. Зависимость энергии электрона E от волнового числа k

ЗАДАЧИ

1. Одномерное движение микрочастицы массой m в поле с потенциалом описывается стационарным уравнением Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x).$$

Предполагая $U(x) = U(-x)$, а решение $\psi(x)$ невырожденным, докажите, что функция $\psi(x)$ имеет определенную четность:

$$\psi(x) = +\psi(-x) \text{ — четная функция,}$$

или

$$\psi(x) = -\psi(-x) \text{ — нечетная функция.}$$

Выполните следующие задания:

а) рассмотрите движение частицы в потенциальном поле, показанном на рис. 1.10. Постройте приближенную картину решений стационарных уравнений Шредингера, соответствующих двум самым низким собственным значениям энергии частицы в данном потенциальном поле.

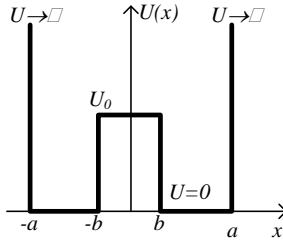


Рис. 1.10. Вид потенциального поля к задаче 1

Обозначьте полученные решения через ψ_1 и ψ_2 , а соответствующие им энергии – через E_1 и E_2 ;

б) частное решение полного уравнения Шредингера для приведенного выше потенциального поля можно представить в виде суперпозиции функций

$$\psi_1 e^{-i(E_1/\hbar)t} \text{ и } \psi_2 e^{-i(E_2/\hbar)t}.$$

Получите волновой пакет ψ , который в момент времени $t = 0$ сосредоточен (почти) полностью в левой потенциальной яме. Опишите подробно дальнейшее движение пакета во времени.

Ответ: а) $\psi(x) = \sin k_1(x + a)$ при $-a < x < -b$;

$$\psi(x) = \pm \sin k_1(a - x) \text{ при } b < x < a;$$

$$\psi(x) = \exp(-k_2(b + x)) \text{ при } -b < x < 0;$$

$$\psi(x) = +(-)\exp(-k_2(b - x)) \text{ при } 0 < x < b;$$

$$k_1 = \frac{n\pi}{2a}, \quad k_2 = \frac{1}{\eta} \sqrt{2mV_0 - k_1^2 \hbar^2};$$

$$\text{б) } T = \frac{2\pi\eta}{E_2 - E_1}.$$

2. Определите (без подробных вычислений) энергетические уровни микрочастицы массой m , движущейся в одномерном потенциальном поле:

$$U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0, \\ +\frac{m\omega^2 x^2}{2}, & x > 0. \end{cases}$$

Ответ: $E_{2m+1} = (2m+3/2)\hbar\omega$, где $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

3. Каковы фазовая и групповая скорости волны де Бройля у свободного электрона, движущегося со скоростью u , определяемой по классической теории?

Ответ: $v_{\phi} = \frac{c^2}{u}$; $v_{gp} = u$.

4. Микрочастица массой m находится в основном состоянии в одномерной потенциальной яме с очень высокими стенками, разделенными промежутками длиной a . Стенки ямы мгновенно и симметрично раздвигаются до расстояния $2a$.

а) какова вероятность того, что микрочастица в этой расширенной системе находится в основном состоянии?

б) сохранится ли энергия микрочастицы в результате раздвижения стенок?

Ответ: а) $P = \frac{64}{9\pi^2}$.

5. Состояние микрочастицы массой m характеризуется (нормированной) волновой функцией

$$\psi(r) = \frac{e^{(-ikr)} + be^{(ikr)}}{r},$$

где r – расстояние от начала координат. Определите энергию микрочастицы.

Ответ: $E = \frac{\eta^2 k^2}{2m}$.

6. Электрон движется параллельно оси x слева направо в потенциальном поле $U = 0$ в области $x < 0$ и $U_0 = 20$ эВ в области $x > 0$ (см. рис. 1.11).

Кинетическая энергия электрона при $x = -\infty$ равна 10 эВ. Рассматривать движение электрона как одномерную плоскую волну. Выполните следующие задания:

а) напишите уравнение Шредингера для областей $x < 0$ и $x > 0$;

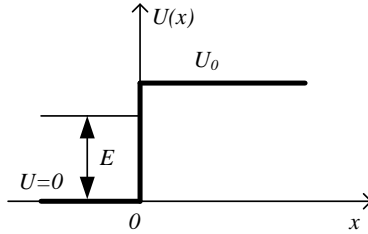


Рис. 1.11. Вид потенциального поля к задаче 6

- б) постройте на графике решение этого уравнения для обеих областей;
 в) определите длину волны электрона (в сантиметрах) при $x < 0$;
 г) найдите граничные условия при $x = 0$;
 д) определите вероятность нахождения электрона вблизи некоторого положительного значения координаты x .

Ответ: в) $\lambda = \frac{hc}{\sqrt{(2mc^2)E}} = 4 \cdot 10^{-8}$ см; д) $D \sim \exp(-2x/\lambda)$.

7. Показать, что коэффициент прозрачности потенциального барьера, изображенного на рис. 1.11, для микрочастицы с энергией $E < U_0$ равен

нулю. Воспользоваться $D = 1 - R = 1 - \left| \frac{A_2}{A_1} \right|^2$.

8. Микрочастицы с энергией E движутся в одномерном потенциальном поле, изображенном на рис. 1.12.

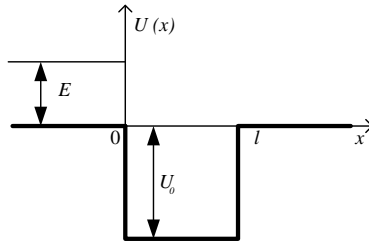


Рис. 1.12. Вид потенциального поля к задаче 8

Определить:

а) вероятность отражения частиц от данной прямоугольной ямы;

б) вычислить эту вероятность для электронов, если $E = 9$ эВ, $U_0 = 16$ эВ, $l = 10^{-8}$ см.

$$\text{Ответ: а) } R = \frac{1 - \cos 2k_2 l}{\frac{1 + A^4}{2A^2} - \cos k_2 l},$$

$$A = \frac{k_1 + k_2}{k_2 - k_1}, k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\eta}, k_2 = \frac{\sqrt{2m(E + U_0)}}{\eta}; \text{ б) } R = 0,08.$$

9. При каких значениях энергии E электроны будут беспрепятственно проходить над прямоугольным потенциальным барьером (рис. 1.13), для которого $U_0 = 10$ эВ и $l = 5 \cdot 10^{-8}$ см?

$$\text{Ответ: } E = \frac{n^2}{2m} \left(\frac{\pi \eta}{l} \right)^2 + U_0 = 10; 11,51; 16,04; \dots \text{ эВ, где } n = 0, 1, 2, \dots$$

10. Найти выражение для вероятности прохождения микрочастицы с энергией E через прямоугольный потенциальный барьер, профиль которого изображен на рис. 1.13. Рассмотреть случай $E < U_0$.

$$\text{Ответ: } D = \left(\left(\frac{k_1^2 + k_2^2}{2k_1 k_2} \right)^2 \operatorname{sh}^2(k_2 l) + 1 \right)^{-1}, \text{ при } k_2 l \approx 1 \quad \operatorname{sh}^2(k_2 l) \approx \exp(2k_2 l)$$

$$\text{и } D = A \exp\left(-\frac{2}{\eta} \sqrt{2m(U_0 - E)l}\right); k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\eta}, k_2 = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\eta}.$$

11. Электроны проходят сквозь потенциальный барьер, изображенный на рис. 1.14. Определить коэффициент прозрачности данного барьера для электронов при двух значениях напряженности электрического поля справа от точки $x = 0$; $\mathcal{E}_1 = 10^7$ В/см и $\mathcal{E}_2 = 2 \cdot 10^7$ В/см, если $U_0 - E = 1$ эВ.

$$\text{Ответ: } D = \exp \left[-\frac{4\sqrt{2m}}{3\hbar q \mathcal{E}} (U_0 - E)^{3/2} \right] =$$

$$= \begin{cases} 0,001 (\mathcal{E} = \mathcal{E}_1), \\ 0,032 (\mathcal{E} = \mathcal{E}_2). \end{cases}$$

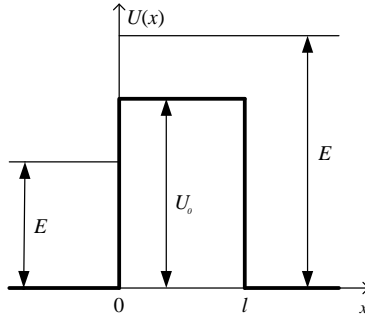


Рис. 1.13. Вид потенциального барьера к задачам 9-10

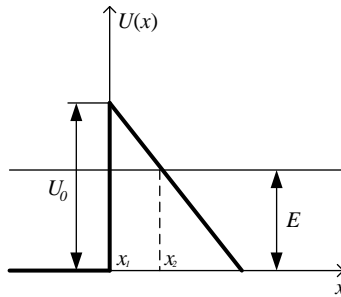


Рис. 1.14. Вид потенциального барьера к задаче 11

12. Рассмотрите прямоугольную потенциальную яму с бесконечно высокими стенками и шириной $2a$ (рис. 1.15). Волновая функция микрочастицы, находящейся в потенциальной яме, записывается в виде

$$\psi = C \left(\cos \frac{\pi x}{2a} + \sin \frac{3\pi x}{a} + \frac{1}{4} \cos \frac{3\pi x}{2a} \right) \text{ (внутри потенциальной ямы),}$$

$\psi = 0$ (вне потенциальной ямы):

а) вычислите коэффициент C ;

б) какие значения полной энергии частицы можно получить и какова вероятность появления каждого из этих значений?

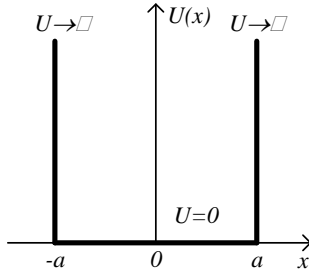


Рис. 1.15. Вид потенциального поля к задаче 12

Ответ: б) $P_1 = \frac{16}{33}$, $P_2 = \frac{16}{33}$, $P_3 = \frac{1}{33}$.

13. Микрочастица движется в одномерном потенциальном поле

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ U_0, & x > 0. \end{cases}$$

Предположим, что она обладает энергией $E > U_0$ и движется слева направо:

- определите ненормированную волновую функцию микрочастицы;
- произведите нормировку волновой функции таким образом, чтобы она соответствовала единичному потоку движущихся частиц (одна частица в одну секунду);
- решите задачу пункта а) для случая $E < U_0$ и сделайте вывод из полученного результата.

Ответ: а) $\psi_1 = A(\exp(ik_1x) + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \exp(-ik_1x)),$

$$\psi_2 = A \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \exp(ik_2x), \quad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\eta}, \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - U_0)}}{\eta};$$

б) $A = \left(\frac{m}{2E}\right)^{1/4};$

в) $\psi_1 = A(\exp(ik_1x) + \frac{k_1 - ik_3}{k_1 + ik_3} \exp(-ik_1x)),$

$$\psi_2 = 2A \frac{k_1}{k_1 + ik_3} \exp(-k_3 x), \quad k_3 = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\eta}.$$

14. Найти уровни энергии и нормированные волновые функции состояний дискретного спектра микрочастицы в поле $U(x) = -a\delta(x)$, $a > 0$ (рис.1.16). Найти средние значения кинетической T и потенциальной U энергий в этих состояниях. Воспользоваться решением примера 4.

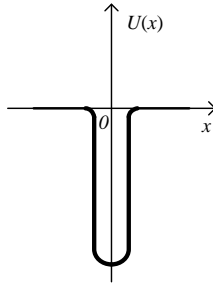


Рис. 1.16. Вид потенциального поля к задаче 14

Ответ: $\psi_0(x) = \sqrt{\chi_0} \exp[-\chi_0|x|]$;

$$E_0 = -\frac{\eta^2 \chi^2}{2m} = -\frac{m\alpha^2}{2\eta^2};$$

$$U = -\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \psi_0^2(x) dx = -m\alpha^2 / \eta^2 = 2E_0;$$

$$T = \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{\infty} |p\psi(x)|^2 dx = m\alpha^2 / 2\eta^2 = -E_0.$$

15. Найти значения энергий, при которых микрочастицы не отражаются от потенциального барьера, имеющего вид (рис. 1.17):

$$U(x) = a[\delta(x) + \delta(x - a)].$$

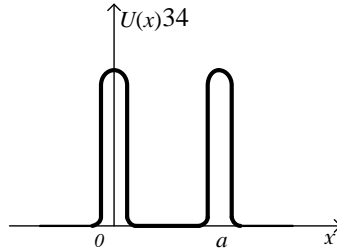


Рис. 1.17. Вид потенциального поля к задаче 15

Ответ: $E = k^2 \hbar^2 / 2m$, где k определяется из уравнения $\operatorname{tg} ka = -k \hbar^2 / cm$.

16. Найти коэффициенты прохождения и отражения микрочастиц в случае потенциала вида (рис. 1.18)

$$U(x) = \frac{U_0}{1 + \exp(-x/a)}, \quad U_0 > 0, \quad a > 0.$$

Рассмотреть предельные случаи $E \rightarrow \infty$ и $E \rightarrow U_0$.

Ответ: $D(E) \approx 1 - \frac{2\pi^2 m a^2 U_0^2}{E \hbar^2} \exp\left[-4\pi a \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}\right] \rightarrow 1$ при $E \rightarrow \infty$;

$D(E) \approx \frac{4\pi a \sqrt{2m}}{\hbar} \operatorname{cth}\left[\pi a \sqrt{\frac{2mU_0}{\hbar^2}}\right] \sqrt{E - U_0} : \sqrt{E - U_0} \rightarrow 0$ при $E \rightarrow U_0$.

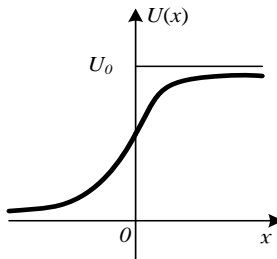


Рис. 1.18. Вид потенциального поля к задаче 16

2. СТАТИСТИКА НОСИТЕЛЕЙ ЗАРЯДА В ПОЛУПРОВОДНИКАХ

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ

1. Вырожденные и невырожденные коллективы. Функции распределения микрочастиц по энергиям.
2. Уровень Ферми и его положение в собственном и примесных полупроводниках.
3. Закон действующих масс.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Функция распределения микрочастиц по энергиям Максвелла – Больцмана:

$$f_{M-B} = \exp((E_f - E)/kT),$$

где E – энергия микрочастицы; E_f – энергия Ферми; k – постоянная Больцмана; T – температур.

2. Функция распределения микрочастиц по энергиям Ферми – Дирака:

$$f_{\Phi-D}(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E - E_f}{kT}\right)}.$$

3. Концентрация электронов в зоне проводимости:

$$\begin{aligned} n = n(E) &= \int_{E_c}^{E_{\max}} N(E) f(E) dE = N_c \exp\left(-\frac{E_c - E_f}{kT}\right) = \\ &= n_i \exp\left(\frac{E_f - E_i}{kT}\right), \end{aligned}$$

где $N(E) = N_c = 2 \left(\frac{2\pi m_n kT}{h^2} \right)^{3/2}$ – эффективная плотность энергетических

состояний в зоне проводимости; E_c – энергия, соответствующая дну зоны проводимости (полагают $E_c = 0$); E_i – энергия, соответствующая середине запрещенной зоны полупроводника E_g ($E_g = E_c - E_v$); m_n – эффективная

масса электрона; h – постоянная Планка; n_i – собственная концентрация носителей заряда в полупроводнике.

4. Концентрация дырок в валентной зоне:

$$p = p(E) = \int_{-\infty}^{E_v} N(E)[1 - f(E)]dE = N_v \exp\left(-\frac{E_f - E_v}{kT}\right) =$$

$$= n_i \exp\left(\frac{E_i - E_f}{kT}\right),$$

где $N(E)=N_v=2\left(\frac{2\pi m_p kT}{h^2}\right)^{3/2}$ – эффективная плотность энергетических состояний в валентной зоне; E_v – энергия, соответствующая потолку валентной зоны; m_p – эффективная масса дырки.

5. Закон действующих масс:

$$n_i^2 = np.$$

6. Зависимость положения уровня Ферми от температуры и концентрации носителей заряда в полупроводнике:

– *n-типа*

$$E_{fn} = E_i + kT \ln\left(\frac{n}{n_i}\right);$$

– *p-типа*

$$E_{fp} = E_i - kT \ln\left(\frac{p}{n_i}\right).$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Ширина запрещенной зоны E_g собственного кремния равна 1,12 эВ. Вычислить вероятность заполнения электроном уровня вблизи дна зоны проводимости при температурах 0 и 300 К. Как изменится эта вероятность при указанных температурах, если на

полупроводник будет действовать электромагнитное излучение с длинами волн $\lambda = 0,6$ и $2,0$ мкм? Считать, что при $T = 300$ К разность $(E - E_f)$ практически равна $E_g/2$.

Решение

Функция распределения Ферми – Дирака имеет вид

$$f(E) = [1 + e^{(E - E_f)/kT}]^{-1},$$

где $f(E)$ – вероятность того, что электрон имеет энергию E . При $T = 0$ К

$$E > E_f, e^{(E - E_f)/kT} \rightarrow \infty \text{ и } f(E) = 0.$$

Вероятность того, что при температуре $T = 300$ К электрон обладает энергией E относительно дна зоны проводимости, равна

$$f(E) = [1 + \exp(0,56 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} / (1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300))]^{-1} = [1 + \exp(21,6)]^{-1} = 4 \cdot 10^{-10}.$$

Когда на полупроводник действует излучение с длиной волны $\lambda = 0,6$ мкм, частота излучения равна

$$\nu = c/\lambda = 3 \cdot 10^8 / (0,6 \cdot 10^{-6}) = 5 \cdot 10^{14} \text{ Гц},$$

а его энергия составляет

$$E = h\nu = 6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 5 \cdot 10^{14} = 3,31 \cdot 10^{-19} = 2,1 \text{ эВ}.$$

Поскольку $2,1 \text{ эВ} > 1,12 \text{ эВ}$, то вероятность нахождения электронов в зоне проводимости увеличивается как при 0 К, так и при 300 К.

Если на полупроводник действует излучение с длиной волны $\lambda = 2$ мкм, то

$$\begin{aligned} \nu &= c/\lambda = 3 \cdot 10^8 / (2 \cdot 10^{-6}) = 1,5 \cdot 10^{14} \text{ Гц}; \\ E &= h\nu = 6,6 \cdot 10^{-34} \cdot 1,5 \cdot 10^{14} / 1,6 \cdot 10^{-19} = 0,62 \text{ эВ}. \end{aligned}$$

Так как $0,62 \text{ эВ} < 1,12 \text{ эВ}$, то никакого существенного изменения вероятности не происходит ни при $T = 0$ К, ни при $T = 300$ К.

Пример 2. Найдите равновесную концентрацию электронов и дырок, а также положение уровня Ферми (по отношению к собственному уровню

Ферми E_f) в кремнии при $T = 300$ К, если кремний содержит $8 \cdot 10^{16} \text{см}^{-3}$ атомов мышьяка (As) и $2 \cdot 10^{16} \text{см}^{-3}$ атомов бора (B).

Решение

Так как концентрация доноров As превосходит концентрацию акцепторов B, кристалл имеет проводимость n-тип. Результирующая концентрация легирующих примесей равна разности концентраций легирующих доноров ($8 \cdot 10^{16} \text{см}^{-3}$) и акцепторов ($2 \cdot 10^{16} \text{см}^{-3}$) и, следовательно, равна $6 \cdot 10^{16} \text{см}^{-3}$.

Концентрацию электронов при заданной температуре можно считать равной результирующей концентрации легирующих примесей, т.е. $n = 6 \cdot 10^{16} \text{см}^{-3}$. Концентрацию дырок вычислим с помощью закона действующих масс:

$$p = \frac{n_i^2}{n} = \frac{(1,5 \cdot 10^{10})^2}{6 \cdot 10^{16}} = 3,5 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}.$$

Положение уровня Ферми определим, воспользовавшись выражением, приведенном в п. 6, и покажем его на рис. 2.1:

$$E_{fn} - E_i = kT \ln \left(\frac{n}{n_i} \right) = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \ln \left(\frac{3,5 \cdot 10^{16}}{1,5 \cdot 10^{10}} \right) = 0,629 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 0,393 \text{ эВ}.$$

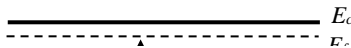


Рис. 2.1. Энергетическая диаграмма к примеру 2

ЗАДАЧИ

1. Какова

вероятность

найти электрон на нижнем уровне зоны проводимости в собственном германии, если температура образца равна: а) 30 К; б) 300 К.

Ответ: а) 10^{-60} ; б) 10^{-6} .

2. Какова вероятность найти электрон на нижнем уровне зоны проводимости при комнатной температуре ($T = 300$ К): а) в собственном германии; б) в собственном кремнии; в) в алмазе ($E_g = 5,6$ эВ)? Объясните физический смысл полученных результатов. На какие свойства полупроводника влияет ширина запрещенной зоны?

Ответ: а) 10^{-6} ; б) $10^{-9,3}$; в) 10^{-47} .

3. Движение пятого электрона на внешней орбите примесного атома V группы периодической системы Д.И. Менделеева в полупроводнике IV группы можно приближенно рассматривать как круговое по орбите вокруг единичного положительного заряда ядра $+q$ в веществе с диэлектрической проницаемостью собственного полупроводника.

Покажите, что электрону требуется энергия около 0,1 эВ, чтобы освободиться и стать электроном проводимости в кристалле с относительной диэлектрической проницаемостью, равной 12. Определите также радиус орбиты его основного состояния и тем самым подтвердите корректность предположения о том, что электрон движется в среде с диэлектрической проницаемостью собственного полупроводника. Постоянная решетки полупроводника равна $5,42 \cdot 10^{-4}$ мкм.

Ответ: $E_n = 6,35 \cdot 10^{-4}$ мкМ; $r_n = 0,094$ эВ.

4. Найти положение уровня Ферми в собственном полупроводнике относительно середины запрещенной зоны при комнатной температуре ($T = 300$ К), если эффективная масса электрона в 2 раза больше эффективной массы дырки.

Ответ: на $\frac{3}{4} kT \ln \left(\frac{m_n}{m_p} \right) = 13,5 \cdot 10^{-3}$ эВ ниже середины запрещенной зоны.

5. В собственном полупроводнике концентрация электронов проводимости при температуре $T = 300$ К равна $1,5 \cdot 10^{16}$ см $^{-3}$. Найти ширину запрещенной зоны и положение уровня Ферми для этого полупроводника, если плотность состояний в зоне проводимости выражается формулой $N_c = GT^{3/2}$, где постоянная $G = 4,83 \cdot 10^{21}$ м $^{-3} \cdot \text{К}^{-3/2}$.

Ответ: $E_g = 1$ эВ; уровень Ферми расположен на 0,5 эВ ниже дна зоны проводимости.

6. Уровень Ферми полупроводника находится на 0,3 эВ ниже дна зоны проводимости. Какова вероятность того, что при комнатной температуре энергетические уровни, расположенные на расстоянии $3kT$ выше дна зоны проводимости, заняты электронами? Какова вероятность того, что уровень у потолка валентной зоны содержит дырки, если ширина запрещенной зоны 1,1 эВ?

Ответ: $6,12 \cdot 10^{-6}$; $3,05 \cdot 10^{-7}$; $1,26 \cdot 10^{-14}$.

7. Определить положение уровня Ферми в германии n-типа при температуре $T = 300$ К, если на $2 \cdot 10^6$ атомов германия приходится один

атом примеси. Концентрация атомов в германии равна $4,4 \cdot 10^{28}$ атом/м³. Расстояние между дном зоны проводимости и донорным уровнем составляет 0,01 эВ.

Ответ: уровень Ферми находится на 0,18 эВ ниже дна зоны проводимости.

8. Найти положение уровня Ферми относительно середины запрещенной зоны при температуре $T = 300$ К для кристалла германия, содержащего $5 \cdot 10^{16}$ атомов мышьяка в 1 см³.

Ответ: уровень Ферми находится на 0,196 эВ выше середины запрещенной зоны.

9. Вычислить положение уровня Ферми относительно дна зоны проводимости при температуре $T = 400$ К для кристалла германия, содержащего $5 \cdot 10^{16}$ атомов сурьмы в 1 см³.

Ответ: уровень Ферми находится на 0,229 эВ ниже дна зоны проводимости.

10. Кристалл кремния содержит 10^{17} атомов бора в 1 см³. Найти положение уровня Ферми относительно середины запрещенной зоны при температуре $T = 300$ К.

Ответ: уровень Ферми находится на 0,416 эВ ниже середины запрещенной зоны.

11. Вычислить положение уровня Ферми относительно дна зоны проводимости при температуре $T = 300$ К для кристалла германия, содержащего 10^{17} атомов сурьмы и $5 \cdot 10^{16}$ атомов индия в 1 см³.

Ответ: уровень Ферми находится на 0,16 эВ ниже дна зоны проводимости.

12. Определить относительное положение уровня Ферми в кремниевом полупроводнике р-типа проводимости и концентрацию неосновных носителей заряда, если концентрация акцепторной примеси $N_a = 10^{16}$ см⁻³, а температура окружающей среды $T = 343$ К.

Ответ: уровень Ферми сместится к середине запрещенной зоны и будет отличаться от нее на 0,05 эВ; $n_p = 2,25 \cdot 10^4$ см⁻³.

13. В кристалле германия n-типа на каждые 10^8 атомов германия приходится один атом донорной примеси. Полагая, что эффективная масса электрона m_n равна 1/2 массы покоя электрона, найти положение уровня Ферми относительно дна зоны проводимости при комнатной температуре (300 К).

Ответ: уровень Ферми находится на 0,256 эВ ниже дна зоны проводимости.

14. В кристалле кремния р-типа на каждые 10^8 атомов кремния приходится один атом акцепторной примеси. Найти положение уровня Ферми при комнатной температуре ($T = 300$ К) относительно валентной зоны.

Ответ: уровень Ферми находится на 0,279 эВ выше потолка валентной зоны.

15. При какой концентрации акцепторной примеси уровень Ферми в кристалле германия р-типа проводимости при комнатной температуре ($T = 300$ К) будет совпадать с потолком валентной зоны, если $m_p = 0,4 m$ (m – масса электрона)?

Ответ: $6,33 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$.

3. КИНЕТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ (ЧАСТЬ 1)

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ

1. Подвижность электронов и дырок. Проводимость собственного и примесного полупроводников.
2. Диффузионный ток в полупроводнике.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Подвижность носителей заряда:

– электронов

$$\mu_n = \frac{v_d}{E} = \frac{q\tau_{cn}}{m_n},$$

– дырок

$$\mu_p = \frac{v_d}{E} = \frac{q\tau_{cp}}{m_p},$$

где q – заряд электрона; v_d – скорость дрейфа носителей заряда в электрическом поле с величиной напряженности E ; τ_{en} и τ_{ep} – средние времена рассеяния электронов и дырок соответственно; m_n и m_p – эффективные массы электронов и дырок соответственно.

2. Электропроводность полупроводника:

$$\sigma = \frac{I}{\rho} = q(n\mu_n + p\mu_p),$$

где ρ – удельное сопротивление полупроводник

3. Соотношения Эйнштейна:

$$D_n = \mu_n \frac{kT}{q};$$

$$D_p = \mu_p \frac{kT}{q},$$

где D_n и D_p – коэффициенты диффузии электронов и дырок соответственно.

4. Проекция плотности диффузионного тока

(на направление оси OX):

– электронов

$$j_{nD} = qD_n \frac{dn}{dx},$$

– дырок

$$j_{pD} = -qD_p \frac{dp}{dx}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Образец кремния n-типа имеет размеры: длина 10 мм, ширина 2 мм и толщина 1 мм. Подвижности электронов и дырок равны соответственно 0,12 и 0,05 м²/(В·с), концентрация собственных носителей заряда $n_i = 1,5 \cdot 10^{16}$ м⁻³. Определить: а) концентрацию донорной примеси в образце, если сопротивление образца $R = 150$ Ом; б) отношение дырочной составляющей проводимости образца к электронной.

Решение

а) Определим удельное сопротивление материала:

$$\rho = RS/l = 150 \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3} / (10 \cdot 10^{-3}) = 0,03 \text{ Ом} \cdot \text{м}.$$

Удельное сопротивление примесного кремния n-типа определяется выражением

$$\rho = [q(n\mu_n + p\mu_p)]^{-1}. \quad (3.1)$$

Подставив в (3.1) числовые данные из условия задачи, получим

$$0,03 = [1,6 \cdot 10^{-19}(0,12 \cdot n + p \cdot 0,05)]^{-1}, \quad (3.2)$$

или

$$0,12/n + 0,05p = 2,08 \cdot 10^{20}. \quad (3.3)$$

Поскольку $np = n_i^2$, то

$$p = \frac{n_i^2}{n} = (1,5 \cdot 10^{16})^2 / n. \quad (3.4)$$

Подставив (3.4) в (3.3), получим

$$0,12n_n + 0,05(1,5 \cdot 10^{16})^2/n_n = 2,08 \cdot 10^{20},$$

или

$$0,12n^2 + 0,05(1,5 \cdot 10^{16})^2 - 2,08 \cdot 10^{20}n = 0.$$

Отсюда для n-полупроводника

$$n = \frac{2,08 \cdot 10^{20} + \sqrt{(2,08 \cdot 10^{20})^2 - 4 \cdot 0,12 \cdot 0,05 \cdot (1,5 \cdot 10^{16})^2}}{2 \cdot 0,12} = 1,73 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}.$$

При условии, что все примесные атомы ионизированы, $N_d = n = 1,73 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$.

б) Дырочная и электронная удельные проводимости определяются выражениями

$$\sigma_p = q p \mu_p; \quad \sigma_n = q n \mu_n.$$

Тогда

$$\frac{\sigma_p}{\sigma_n} = \frac{p \mu_p}{n \mu_n} = \frac{(1,5 \cdot 10^{16})^2 \mu_p}{n^2 \mu_n}.$$

Следовательно,

$$\frac{\sigma_p}{\sigma_n} = \frac{2,25 \cdot 10^{32} \cdot 0,05}{(1,73 \cdot 10^{21})^2 \cdot 0,12} = 3,1 \cdot 10^{-11}.$$

Пример 2. Покажите, что полупроводник имеет минимальную удельную проводимость при данной температуре, когда концентрация электронов $n = n_i \sqrt{\mu_p / \mu_n}$, где n_i – собственная концентрация; μ_p и μ_n – соответственно подвижности дырок и электронов. Чему равна концентрация дырок p в этих условиях?

Найти собственную и минимальную удельные проводимости для германия, если $n_i = 2,5 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$ ($\mu_p = 0,19 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ и $\mu_n = 0,39 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$). При каких значениях n и p (кроме $n = p = n_i$) этот полупроводник имеет удельную проводимость, равную собственной?

Решение

Удельная проводимость полупроводника

$$\sigma = q(n\mu_n + p\mu_p).$$

Тогда, с учетом $np = n_i^2$, можно записать

$$\sigma/q = n\mu_n + n_i^2\mu_p/n.$$

Это выражение имеет минимум при

$$\frac{d(\sigma/q)}{dn} = 0,$$

т.е. когда $\mu_n - n_i^2\mu_p/n^2 = 0$ или $n = n_i\sqrt{\mu_p/\mu_n}$.

Значение выражения $\frac{d^2(\sigma/q)}{dn^2}$ положительно, т. е. это точка перегиба в минимуме $p = n^2/n = n_i\sqrt{\mu_n/\mu_p}$.

У собственного полупроводника

$$\sigma_i = qn_i(\mu_n + \mu_p) = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2,5 \cdot 10^{19} \cdot 0,58 = 2,32 \text{ См/м.}$$

Его минимальная удельная проводимость

$$\begin{aligned} \sigma &= n_i q \sqrt{\mu_n \mu_p} + n_i q \sqrt{\mu_p \mu_n} = 2n_i q \sqrt{\mu_n \mu_p} = 2 \cdot 2,5 \cdot 10^{19} \times \\ &\times 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot \sqrt{0,39 \cdot 0,19} = 2,18 \text{ См/м.} \end{aligned}$$

Удельная проводимость равна собственной проводимости, когда

$$qn\mu_n + qn_i^2\mu_p/n = qn_i(\mu_n + \mu_p),$$

или

$$n^2\mu_n - nn_i(\mu_n + \mu_p) + n_i^2\mu_p = 0,$$

т. е.

$$n = \frac{n_i(\mu_n + \mu_p) \pm \sqrt{(n_i(\mu_n + \mu_p))^2 - 4\mu_n n_i^2 \mu_p}}{2\mu_n}.$$

Подставив в это выражение числовые данные, получим

$$n = \frac{n_i}{0,78} (0,58 \pm \sqrt{0,58^2 - 4 \cdot 0,39 \cdot 0,19}) = \frac{n_i}{0,78} (0,58 \pm 0,2).$$

Но $n \neq n_i$, следовательно,

$$\begin{aligned} n &\approx n_i/2 = 1,25 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}; \\ p &= n_i^2/n = 5 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}. \end{aligned}$$

Пример 3. Сравнить концентрации свободных электронов в беспримесных образцах германия и кремния при температурах 40 и 80°С с их концентрациями при температуре 300 К. Пренебрегите изменением эффективных плотностей состояний в зоне проводимости N_c и валентной зоне N_v при изменении температуры. Ширина запрещенной зоны в германии $E_g = 0,72$ эВ, в кремнии $E_g = 1,12$ эВ. Определить значения удельного сопротивления при указанных температурах (температурные изменения подвижности не учитывать). Удельные сопротивления германия и кремния при комнатной температуре принять равными 0,45 и $2 \cdot 10^3$ Ом·м соответственно.

Решение

Концентрация собственных носителей заряда n_i определяется из выражения

$$n_i^2 = N_c N_v \exp(-E_g / kT).$$

Так как эффективные плотности состояний N_c и N_v слабо зависят от температуры, то $N_c N_v = \text{const}$.

Найдем отношения концентраций собственных носителей заряда при разных температурах для германия ($E_g = 0,72$ эВ).

При $T = 300$ К

$$kT = 0,86 \cdot 10^{-4} \cdot 300 = 0,0258 \text{ эВ}.$$

При $T_I = 40^\circ\text{C} = 313$ К

$$kT_I = 0,0269 \text{ эВ}.$$

Следовательно,

$$\frac{n_i(313\text{K})}{n_i(300\text{K})} = \left[\frac{\exp(-0,72/0,0269)}{\exp(-0,72/0,0258)} \right]^{1/2} = 1,77.$$

При $T_2 = 80^\circ\text{C} = 353\text{K}$

$$kT_2 = 0,0304 \text{ эВ.}$$

Тогда

$$\frac{n_i(353\text{K})}{n_i(300\text{K})} = \left[\frac{\exp(-0,72/0,0304)}{\exp(-0,72/0,0258)} \right]^{1/2} = 8,3.$$

Аналогично вычисляем отношения концентраций собственных носителей заряда для кремния ($E_g = 1,12 \text{ эВ}$):

$$\frac{n_i(313\text{K})}{n_i(300\text{K})} = \left[\frac{\exp(-1,12/0,0269)}{\exp(-1,12/0,0258)} \right]^{1/2} = 2,43,$$

$$\frac{n_i(353\text{K})}{n_i(300\text{K})} = \left[\frac{\exp(-1,12/0,0304)}{\exp(-1,12/0,0258)} \right]^{1/2} = 26,7.$$

Удельное сопротивление собственного германия определяется выражением

$$\rho = 1/[qn_i(\mu_n + \mu_p)].$$

Предполагаем, что μ_n и μ_p не зависят от температуры, получаем:

$$\rho(313\text{K})/\rho(300\text{K}) = n_i(300\text{K})/n_i(313\text{K}).$$

При температуре 40°C (313 K)

$$\rho(313\text{K}) = n_i(300\text{K})\rho(300\text{K})/n_i(313\text{K}) = 0,45/1,77 = 0,254 \text{ Ом}\cdot\text{м.}$$

Аналогично находим ρ при температуре 80°C (353 K):

$$\rho(353\text{K}) = 0,45/8,3 = 0,054 \text{ Ом}\cdot\text{м.}$$

Для кремния при тех же температурах имеем:

$$\rho(313\text{K}) = 823 \text{ Ом}\cdot\text{м} \text{ и } \rho(353\text{K}) = 74,9 \text{ Ом}\cdot\text{м.}$$

Пример 4. Образец германия имеет концентрацию доноров $N_d = 2 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$. Эффективная масса электрона равна $1,57 m_n$, а донор можно считать рассеивающим центром с $r = 5 \cdot 10^{-2}$ мкм. Чему равны средняя длина свободного пробега и среднее время между столкновениями при 300 К? Определить подвижность электронов.

Решение

Средняя длина свободного пробега $\lambda = 1/(N\pi r^2)$, где r – радиус сферического рассеивающего центра, а N – концентрация носителей заряда. В данном случае

$$\lambda = 1/(2 \cdot 10^{20} \pi \cdot 25 \cdot 10^{-16}) = 0,64 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Среднее время между столкновениями $\tau = \lambda / \langle v \rangle$, где $\langle v \rangle$ – средняя скорость электронов. Известно также, что

$$(1/2)m_n \langle v \rangle^2 = (3/2)kT;$$

$$\tau = \lambda (m_n / 3kT)^{1/2} = 0,64 \cdot 10^{-6} \left(\frac{1,57 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300} \right)^{1/2} = 0,69 \cdot 10^{-11} \text{ с.}$$

Подвижность

$$\mu = \frac{q\tau}{m_n} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,69 \cdot 10^{-11}}{1,57 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} = 0,77 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с}).$$

ЗАДАЧИ

1. Удельное сопротивление собственного германия при $T = 300 \text{ К}$ $\rho = 0,43 \text{ Ом} \cdot \text{м}$. Подвижности электронов и дырок в германии равны соответственно 0,39 и 0,19 $\text{м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$. Определите собственную концентрацию электронов и дырок.

Ответ: $n_i = 2,5 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$.

2. Определить концентрацию электронов и дырок при $T = 300 \text{ К}$: а) в собственном кристалле кремния; б) в кристалле кремния, содержащем $5 \cdot 10^{17}$ атомов сурьмы в 1 см^3 .

Ответ: а) $n_i = p_i = \frac{2(2\pi kT)^{3/2}}{h^3} (m_n m_p)^{3/4} \exp(-E_g / 2kT) \approx 10^{10} \text{ см}^{-3}$;

б) $n_n = 5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$, $p_n = 2 \cdot 10^2 \text{ см}^{-3}$.

3. Определить концентрацию электронов и дырок в образце германия при $T = 300 \text{ К}$, который имеет концентрацию донорных атомов $N_d = 2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ и концентрацию акцепторных атомов $N_a = 3 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$.

Ответ: $n_p = 6,25 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$, $p_p = 10^{14} \text{ см}^{-3}$.

4. Определить при $T = 300 \text{ К}$: а) удельное сопротивление образца собственного германия; б) удельное сопротивление такого образца с донорной примесью, когда один атом донорной примеси приходится на каждые 10^8 атомов германия?

Ответ: а) $43,2 \text{ Ом}\cdot\text{см}$; б) $3,64 \text{ Ом}\cdot\text{см}$.

5. Определить при $T = 300 \text{ К}$: а) удельное сопротивление собственного образца кремния; б) удельное сопротивление такого образца с донорной примесью, когда один атом донорной примеси приходится на каждые 10^8 атомов кремния?

Ответ: а) $3,29 \cdot 10^5 \text{ Ом}\cdot\text{см}$; б) $8,93 \text{ Ом}\cdot\text{см}$.

6. Образец германия содержит в качестве примеси фосфор с концентрацией $2 \cdot 10^{14} \text{ атом}/\text{см}^3$. Определить: а) каковы удельное сопротивление и тип полупроводника при комнатной температуре; б) какую нужно создать концентрацию атомов галлия в этом полупроводнике, чтобы тип полупроводника изменился на противоположный, а удельное сопротивление стало равным $0,6 \text{ Ом}\cdot\text{см}$; в) каков процент содержания примеси в этом образце?

Ответ: а) $8 \text{ Ом}\cdot\text{см}$; б) $5,7 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$; в) $13,4 \cdot 10^{-6} \%$.

7. Определить удельные сопротивления кремния n-типа проводимости при $T = 300 \text{ К}$, если концентрации доноров N_d равны 10^{14} и 10^{18} см^{-3} .

Ответ: $44,7 \text{ Ом}\cdot\text{см}$ и $44,7 \cdot 10^{-4} \text{ Ом}\cdot\text{см}$.

8. Образец германия легирован атомами алюминия с концентрацией $N_a = 2 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$. Определить удельную проводимость этого образца при $T = 300 \text{ К}$.

Ответ: $\sigma = 0,608 \text{ См}/\text{см}$.

9. Образец собственного кремния имеет при комнатной температуре удельное сопротивление $2000 \text{ Ом}\cdot\text{м}$ и концентрацию электронов в зоне проводимости $n_i = 1,4 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$. Определить удельное сопротивление

образца, легированного акцепторной примесью с концентрациями 10^{21} и 10^{23} м^{-3} . Предположите, что подвижность дырок остается одинаковой как для собственного, так и для примесного кремния и равной $\mu_p = 0,25 \mu_n$.

Ответ: 0,14 и $1,4 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} \cdot \text{м}$.

10. Собственный германий при $T = 300 \text{ К}$ содержит $4,4 \cdot 10^{28}$ атомов на метр кубический и $2,5 \cdot 10^{19}$ электронов на метр кубический. Чему равна концентрация дырок и электронов проводимости в примесном германии, содержащем 1 атом донорных примесей на 10^9 основных атомов и такую же концентрацию акцепторных примесей?

Ответ: $5,39 \cdot 10^{19} \text{ электронов/м}^3$; $0,99 \cdot 10^{19} \text{ дырок/м}^3$.

11. Удельная проводимость образца собственного кремния при $T = 300 \text{ К}$ равна $4,3 \cdot 10^{-4} \text{ См/м}$. Какова концентрация собственных носителей? Если через образец проходит ток, то какая часть этого тока обусловлена электронами?

Ответ: $1,47 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$; 0,74.

12. В собственном германии концентрация атомов равна $4,5 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$. При $T = 300 \text{ К}$ один из каждых $2 \cdot 10^9$ атомов ионизирован. Подвижности электронов и дырок при этой температуре равны соответственно 0,39 и 0,19 $\text{м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$. Определить: а) удельную проводимость собственного германия; б) удельную проводимость германия, легированного элементом V группы, если на каждые 10^8 атомов германия приходится один атом примеси.

Ответ. а) $\sigma_i = 2,09 \text{ См/м}$; б); $\sigma_n = 28 \text{ См/м}$.

13. Образец собственного кремния при $T = 300 \text{ К}$ имеет удельное сопротивление $2 \cdot 10^5 \text{ Ом} \cdot \text{см}$, концентрация электронов проводимости составляет $1,5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$. Чему равно при этой температуре удельное сопротивление кремния n-типа с концентрацией доноров $10^{16} \text{ атом/см}^3$? Предположите, что подвижность электронов в 3 раза больше подвижности дырок и это соотношение сохраняется как для собственного, так и для примесного полупроводников. Дайте качественное обоснование основным сделанным допущениям и объясните, каким образом они могут быть подтверждены.

Ответ: 0,4 Ом·см.

14. Определить концентрацию неосновных носителей заряда, их подвижность в образце германиевого полупроводника p-типа при $T = 300 \text{ К}$, если концентрация акцепторной примеси $N_a = 10^{16} \text{ см}^{-3}$, а

коэффициент диффузии электронов $D_n = 93 \text{ см}^2/\text{с}$.

Ответ: $6,25 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$.

15. Определить удельную проводимость образца кремния при $T = 300 \text{ К}$, если концентрация акцепторов в полупроводнике $N_a = 2,3 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ и концентрация доноров $N_d = 2,2 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$.

Ответ: $8 \cdot 10^{-5} \text{ См/см}$.

16. В собственном германиевом полупроводнике при $T = 300 \text{ К}$ подвижность электронов $\mu_n = 3900 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$, а подвижность дырок $\mu_p = 1900 \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$. Найти концентрацию пар электрон – дырка, если измеренная удельная проводимость образца равна $0,01 \text{ См/см}$.

Ответ: $1,08 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$.

17. Определить: а) какая концентрация атомов-акцепторов (на 1 см^3) требуется для получения в германии удельной проводимости 1 мСм/см при $T = 300 \text{ К}$; б) каково при этом соотношение атомов акцепторной примеси и атомов германия; в) какова будет удельная проводимость, если германий содержит в такой же пропорции атомы донорной примеси?

Ответ: а) $3,29 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$; б) $7,48 \cdot 10^{-11}$; в) $2,05 \cdot 10^{-3} \text{ См/см}$.

18. Определить концентрацию дырок и электронов в германии p-типа при $T = 300 \text{ К}$, если его удельная проводимость $\sigma_p = 100 \text{ См/см}$.

Ответ: $p_p = 3,29 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$; $n_p = 1,9 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$.

19. Полупроводник в условиях равновесия имеет концентрацию дырок $p = 10^{20} \text{ м}^{-3}$ и концентрацию электронов $n = 2 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$. Определить: а) полную концентрацию примесей; б) тип доминирующей примеси; в) собственную концентрацию носителей заряд

Ответ: а) $N = 8 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$; в) $n_i = 4,5 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$.

4. КИНЕТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ (ЧАСТЬ 2)

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ

1. Дрейфовый ток в полупроводнике.
2. Закон полного тока.

3. Неравновесные носители заряда. Генерация и рекомбинация носителей заряда.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Плотность дрейфового тока:

– электронов

$$j_{nE} = qn\mu_n E,$$

– дырок

$$j_{pE} = qp\mu_p E,$$

где E – величина напряженности электрического поля.

2. Закон полного тока для полупроводника:

– n - типа

$$j_n = j_{nE} + j_{nD} = q \left(n\mu_n E + D_n \frac{dn}{dx} \right),$$

– p - типа

$$j_p = j_{pE} + j_{pD} = q \left(p\mu_p E - D_p \frac{dp}{dx} \right).$$

3. Скорость рекомбинации носителей заряда:

– электронов

$$R_n = \frac{\Delta n}{\tau_n},$$

– дырок

$$R_p = \frac{\Delta p}{\tau_p},$$

где Δn и Δp – неравновесные (избыточные) концентрации электронов и дырок; τ_n и τ_p – время жизни неравновесных носителей заряда в полупроводнике.

4. Изменение концентрации неравновесных носителей заряда (электронов) в зависимости от времени:

$$\Delta n(t) = \Delta n_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right),$$

где Δn_0 – неравновесная концентрация электронов в полупроводнике в начальный момент времени.

5. Распределение концентрации избыточных электронов в полупроводнике:

$$\Delta n(x) = \Delta n_0 \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{D_n \tau_n}}\right).$$

6. Диффузионная длина для электронов и дырок соответственно:

$$L_n = \sqrt{D_n \tau_n} \quad \text{и} \quad L_p = \sqrt{D_p \tau_p}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. В кремниевом кристалле при $T = 300$ К электрическое поле в плоскости x_l (расположенной перпендикулярно оси x) не равно нулю. При $x = x_l$ концентрация электронов равна 10^{16} см⁻³. В направлении, перпендикулярном этой плоскости, распределение концентрации неравномерно (рис. 3.1). При этом электрический ток через плоскость x_l равен нулю. Объясните:

а) почему не течет ток;

б) если проекция вектора напряженности на ось x $E_x = -10^3$ В/см, то чему равен градиент концентрации электронов в направлении, перпендикулярном плоскости x_l ?

Решение

а) Электрическое поле, величина напряженности которого E , вызывает дрейфовый ток. Так как суммарный ток отсутствует, должна существовать его диффузионная составляющая, равная дрейфовому току по величине и противоположная ему по направлению (см. рис.4.1). Равенство этих двух составляющих соответствует нулевому суммарному электрическому току.

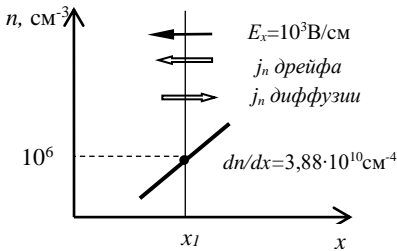


Рис. 4.1. Схематическое изображение векторов напряженности электрического поля, диффузионной и дрейфовой составляющих тока и градиента концентрации

б) Соотношение для полного тока в полупроводнике n -типа в данном случае имеет вид

$$j_n = q \left(n \mu_n E + D_n \frac{dn}{dx} \right) = 0.$$

С учетом соотношения Эйнштейна получим

$$\frac{dn}{dx} = - \left(\frac{\mu_n}{D_n} \right) n E = - \frac{q}{kT} n E = \frac{-10^6 \cdot (-10^3)}{0,0258} = 3,88 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-4}.$$

Пример 2. Удельное сопротивление образца германия n -типа проводимости длиной 1 см и площадью поперечного сечения 1 мм² равно 0,2 Ом·м, время жизни неосновных носителей заряда $\tau = 100$ мкс. На образец падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0,546$ мкм. На этой длине волны световой поток в 1 лм эквивалентен 0,0016 Вт. Считая, что весь падающий на образец свет полностью расходуется на генерацию электронно-дырочных пар, определить, какой световой поток

должен падать на поверхность образца, чтобы уменьшить его сопротивление вдвое. Квантовый выход принять равным единице.

Решение

Чтобы узнать, какое количество носителей заряда должно быть добавлено путем световой генерации для увеличения вдвое удельной проводимости образца, найдем вначале концентрацию носителей заряда в темноте. Используя выражение для определения удельной проводимости и соотношение $n_i^2 = np$, можно записать уравнение:

$$\sigma = 1/\rho = q(n\mu_n + p\mu_p) = q[n\mu_n - n_i^2/(n\mu_p)]. \quad (4.1)$$

Для германия при комнатной температуре $n_i^2 = 6,25 \cdot 10^{38} \text{ м}^{-3}$; $\mu_n = 0,39 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ и $\mu_p = 0,19 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$.

Подставив известные величины в (4.1), получим

$$\sigma = 1/\rho = 1/0,2 = 1,6 \cdot 10^{-19}(0,39 \cdot n + 6,25 \cdot 10^{38} \cdot 0,19/n),$$

или

$$1/0,2 = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,39n + 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 6,25 \cdot 10^{38} \cdot 0,19/n. \quad (4.2)$$

Преобразовав (4.2), получим

$$1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,39n^2 - 5n + 6,25 \cdot 10^{38} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,19 = 0.$$

Решив это уравнение относительно n , найдем концентрацию электронов в образце полупроводника n-типа:

$$n = \frac{5 + [5^2 - (4 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,39 \cdot 6,25 \cdot 10^{38} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,19)]^{1/2}}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,39} = 7,6 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}.$$

Концентрация дырок

$$p = n_i^2/n = 6,25 \cdot 10^{38}/(7,6 \cdot 10^{19}) = 8,2 \cdot 10^{18} \text{ м}^{-3}.$$

Под действием света в образце будет генерироваться равное число электронов и дырок, поэтому прирост электронов и дырок в (4.1) должен быть одинаковым, т. е. $\Delta n = \Delta p$.

Следовательно, удельная проводимость освещенного образца

$$\sigma = 2.5 = q(\Delta n + 7,6 \cdot 10^{19})\mu_n + q(\Delta p + 8,2 \cdot 10^{18})\mu_p, \quad (4.3)$$

или

$$10 = 1,6 \cdot 10^{-19} \Delta n \cdot 0,39 + 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 7,6 \cdot 10^{19} \cdot 0,39 + 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,19 \Delta n + \\ + 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,19 \cdot 8,2 \cdot 10^{18},$$

откуда $\Delta n = 5,4 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$.

Здесь Δn – величина генерируемых электронов при непрерывном световом возбуждении.

В объеме образца $1 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-6} = 10^{-8} \text{ м}^3$ должен быть создан избыток электронов, равный $5,4 \cdot 10^{11}$, и точно такой же избыток дырок. Эти избыточные носители заряда исчезают согласно условию задачи со скоростью $5,4 \cdot 10^{11} / \tau = 5,4 \cdot 10^{11} \cdot 10^4 = 5,4 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$.

Следовательно, чтобы поддерживать необходимое динамическое равновесие, на поверхность образца должно поступать $5,4 \cdot 10^{15}$ фотонов в секунду.

Поскольку по условию задачи при длине волны $\lambda = 0,546 \text{ мкм}$ световой поток в 1 лм эквивалентен 0,0016 Вт, то можно определить световой поток:

$$\Phi = \frac{5,4 \cdot 10^{15} h\nu}{0,0016} = \frac{5,4 \cdot 10^{15} hc}{0,0016\lambda} = \frac{5,4 \cdot 10^{15} \cdot 6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{0,0016 \cdot 0,546 \cdot 10^{-6}} = 1,2 \text{ лм.}$$

Пример 3. В полупроводниковом кристалле под действием света образуется равномерно распределенная избыточная концентрация носителей заряда Δn . Равновесная концентрация неосновных носителей заряда составляет $2,5 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$, а начальная скорость уменьшения концентрации равна $2,8 \cdot 10^{24} \text{ с}^{-1}$. Определить: а) время жизни неосновных носителей заряда; б) значение Δn через 2 мс после выключения источника света.

Решение

а) Зависимость концентрации избыточных носителей заряда от времени описывается выражением

$$\Delta n(t) = \Delta n_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (4.4)$$

где Δn_0 – избыточная концентрация носителей заряда в момент выключения источника света; τ – время жизни носителей. Проидифференцируем (4.4) по t :

$$\frac{d\Delta n(t)}{dt} = -\frac{\Delta n(0)}{\tau_n} \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right), \quad (4.5)$$

где τ_n – время жизни электронов в полупроводнике р-типа.

Начальная скорость уменьшения концентрации определяется из (4.5), если положить $t = 0$, т. е.

$$\left. \frac{d\Delta n(t)}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{\Delta n(0)}{\tau_n} = 2,8 \cdot 10^{24} \text{ c}^{-1}.$$

Поскольку равновесная концентрация неосновных носителей заряда, согласно условию задачи $\Delta n(0) = 2,5 \cdot 10^{20} \text{ м}^{-3}$, находим время жизни неосновных носителей заряда:

$$\tau_n = \left. \frac{\Delta n(0)}{d\Delta n/dt} \right|_{t=0} = 2,5 \cdot 10^{20} / (2,8 \cdot 10^{24}) \text{ c}^{-1} = 89 \text{ мкс.}$$

б) Избыточная концентрация носителей заряда через 2 мс после выключения источника света Δn ($t = 2 \cdot 10^{-3} \text{ с}$) вычисляется по формуле (4.4):

$$\Delta n = 2,5 \cdot 10^{20} \exp(-2 \cdot 10^{-3} / (89 \cdot 10^{-6})) = 2,5 \cdot 10^{20} \exp(-22,4) = 4,4 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-3}.$$

ЗАДАЧИ

1. Определить среднюю скорость дрейфа электронов и дырок в германии при $T = 300$ К, если к образцу приложено внешнее электрическое поле с напряженностью $E = 10, 100$ и 1000 В/см.

Ответ: средняя скорость электронов равна $390, 39 \cdot 10^2$ и $39 \cdot 10^3$ м/с; скорость дырок составляет $190, 19 \cdot 10^2$ и $19 \cdot 10^3$ м/с.

2. Определите и сравните скорость дрейфа электрона, движущегося в электрическом поле с напряженностью 10 кВ/м в собственном германии, с его скоростью при движении на расстоянии 10 мм в таком же поле в вакууме.

Ответ: $3,9 \cdot 10^3$ и $5,93 \cdot 10^6$ м/с.

3. Образец кремния размерами $10 \times 10 \times 10$ мм³ при $T = 300$ К содержит в качестве примесей галлий с концентрацией $N_a = 10^{19}$ атом/м³ и мышьяк с концентрацией $N_d = 1,5 \cdot 10^{19}$ атом/м³. Определить сопротивление бруска между двумя противоположными сторонами, если концентрация собственных носителей заряда $n_i = 1,5 \cdot 10^{16}$ м⁻³, подвижность электронов $\mu_n = 0,12$ м²/(В·с) и подвижность дырок $\mu_p = 0,05$ м²/(В·с).

Ответ: $1,04$ кОм.

4. Образец германия содержит в качестве примесей 10^{20} донорных атомов в 1 м³ и $7 \cdot 10^{19}$ акцепторных атомов в 1 м³. При комнатной температуре образца удельное сопротивление собственного германия равно $0,6$ Ом·м. Определить плотность полного дрейфового тока, если к образцу приложено электрическое поле напряженностью 200 В/м. Подвижность электронов $\mu_n = 0,38$ м²/(В·с), подвижность дырок $\mu_p = 0,18$ м²/(В·с).

Ответ: 524 А/м².

5. Определить значение дрейфового тока, протекающего через кремниевый стержень длиной 5 см и с поперечным сечением $0,5 \times 0,5$ см², к концам которого приложена разность потенциалов 6 В. Кремний n-типа проводимости. Концентрация электронов проводимости в нем равна 10^{22} м⁻³, концентрация собственных носителей равна $2,05 \cdot 10^{16}$ м⁻³. Температура $T = 300$ К. Коэффициенты диффузии электронов и дырок при этой температуре соответственно равны $0,31 \cdot 10^{-2}$ и $0,065 \cdot 10^{-2}$ м²/с.

Ответ: $0,576$.

6. Дрейфовый ток плотностью 10 мА/см² течет через кристалл кремния p-типа с удельным сопротивлением 5 Ом·см. Найти среднюю дрейфовую скорость дырок и электронов.

Ответ: 25 и 70 см/с.

7. Определить отношение электронного дрейфового тока к дырочному дрейфовому току при комнатной температуре ($T = 300$ К) для: а) собственного германия; б) собственного кремния; в) германия n-типа с удельным сопротивлением $\rho = 5$ Ом·см; г) кремния n-типа с удельным сопротивлением $\rho = 5$ Ом·см; д) германия p-типа с удельным сопротивлением $\rho = 5$ Ом·см.

Ответ: а) 2,05; б) 2,8; в) 337; г) $2,23 \cdot 10^9$; д) $2,96 \cdot 10^{-3}$.

8. Подвижности электронов μ_n и дырок μ_p в монокристалле кремния при комнатной температуре ($T = 300$ К) соответственно равны 1400 и 500 $\text{см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$. Определить коэффициенты диффузии электронов и дырок при этой температуре.

Ответ: 36,1 и 12,9 $\text{см}^2/\text{с}$.

9. В образце германия n-типа концентрация донорной примеси при комнатной температуре ($T = 300$ К) составляет $N_d = 10^{17} \text{см}^{-3}$. Определите значение p_n и диффузионную длину электронов L_n , если время их жизни $\tau_n = 50$ мкс.

Ответ: $p_n = 6,25 \cdot 10^{17} \text{см}^{-3}$; $L_n = 7,1 \cdot 10^{-2} \text{см}$.

10. Определите время жизни τ_n и подвижность электронов μ_n при $T = 300$ К, если диффузионная длина электронов в германии $L_n = 0,15$ см, а коэффициент диффузии $D_n = 93 \text{см}^2/\text{с}$.

Ответ: $\tau_n = 242$ мкс; $\mu_n = 3600 \text{см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$.

11. Определите время жизни τ_p и подвижность дырок в кремнии p-типа при комнатной температуре, если диффузионная длина для дырок $L_p = 0,07$ см, а концентрация акцепторной примеси $N_a = 1 \cdot 10^{16} \text{см}^{-3}$.

Ответ: 400 мкс; 462 $\text{см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$.

12. Определить диффузионную длину L_n и коэффициент диффузии электронов D_n в германии при комнатной температуре, если время жизни электронов $\tau_n = 500$ мкс, а подвижность электронов $\mu_n = 3600 \text{см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$.

Ответ: $L_n = 21 \cdot 10^{-2} \text{см}$; $D_n = 93 \text{см}^2/\text{с}$.

13. Определите подвижность электронов в кремнии при температуре $T = 300$ К, если коэффициент диффузии электронов $D_n = 31 \text{см}^2/\text{с}$.

Ответ: $\mu_n = 1200 \text{см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$.

14. В кремниевом образце n-типа с удельным сопротивлением $\rho = 3 \text{ Ом}\cdot\text{см}$ при $T = 300 \text{ К}$ время жизни неосновных носителей заряда $\tau_p = 5 \text{ мкс}$. В одну из плоскостей образца вводится и поддерживается постоянной во времени избыточная концентрация дырок $p = 10^{13} \text{ см}^{-3}$. Найти плотность тока диффузии в непосредственной близости от этой плоскости полупроводник. На каком расстоянии от нее концентрация дырок будет равна 10^{12} см^{-3} ? Считать, что длина образца значительно больше диффузионной длины носителей заряд/

Ответ: $2,6 \cdot 10^{-3} \text{ А/см}^2$; $1,7 \cdot 10^{-2} \text{ см}$.

15. Напряженность электрического поля в кристалле собственного кремния $E = 500 \text{ В/м}$, а подвижности электронов μ_n и дырок μ_p соответственно равны $0,14$ и $0,05 \text{ м}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$. Концентрация собственных носителей $n_i = 1,5 \cdot 10^{16} \text{ м}^{-3}$. Определить: а) скорости дрейфа электронов v_n и дырок v_p ; б) удельное сопротивление кремния ρ ; в) полный дрейфовый ток I , если площадь поперечного сечения $S = 3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$.

Ответ: а) $v_n = 70 \text{ м/с}$; $v_p = 25 \text{ м/с}$; б) $\rho_l = 2,2 \cdot 10^3 \text{ Ом}\cdot\text{м}$; в) $I = 0,684 \text{ мк}$.

16. Вычислить диффузионные длины для электронов в германии p-типа и дырок в германии n-типа, если время жизни неосновных носителей заряда $\tau_n = \tau_p = 10^{-4} \text{ с}$, коэффициенты диффузии для германия p-типа $D_n = 99 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ и для германия n-типа $D_p = 47 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$.

Ответ: $0,99$ и $0,69 \text{ мм}$.

5. КОНТАКТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ (ЧАСТЬ 1)

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ

1. Контакт металл-полупроводник в равновесии.
2. Вольт-амперная характеристика контакта металл – полупроводник.
3. P – n-переход в равновесии.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Контактная разность потенциалов контакта металл – полупроводник:

$$\varphi_k = \varphi_M - \varphi_n,$$

где $q\varphi_n$ – термодинамическая работа выхода электронов из полупроводника, $q\varphi_M$ – термодинамическая работа выхода электронов из металла (рис. 5.1, а).

2. Потенциал (высота) барьера Шоттки:

$$\varphi_b = \varphi_M - \chi,$$

где $q\chi$ – сродство к электрону, эВ.

3. Ширина области пространственного заряда (ОПЗ) в полупроводнике (рис. 5.1, б):

$$W = \sqrt{\frac{2\varepsilon_s\varepsilon_0(\varphi_k - V)}{qN}},$$

где ε_s – диэлектрическая проницаемость полупроводника; ε_0 – электрическая постоянная; V – величина приложенного к контакту напряжения смещения; N – концентрация примеси в полупроводнике.

4. Напряженность электрического поля в ОПЗ полупроводника:

$$E(x) = \frac{qN}{\varepsilon_s\varepsilon_0}(W - x) = \frac{2(\varphi_k - V)}{W}.$$

5. Уравнение ВАХ контакта металл – полупроводник (теория термоэлектронной эмиссии-диффузии):

$$j = \frac{qN_c v_R}{1 + \frac{v_R}{v_D}} e^{\frac{-\varphi_b}{\varphi_T}} \left[e^{\frac{V}{\varphi_T}} - 1 \right],$$

где $v_R = \frac{A^* T^2}{qN_c}$ – диффузионная составляющая скорости носителей заряда на границе раздела структуры металл – полупроводник (A^* – эффективная постоянная Ричардсона, прил. 3); $v_D \approx \mu E_0$ – скорость дрейфа носителей заряда в ОПЗ; E_0 – максимальное значение напряженности электрического поля в полупроводнике (при $V = 0$).

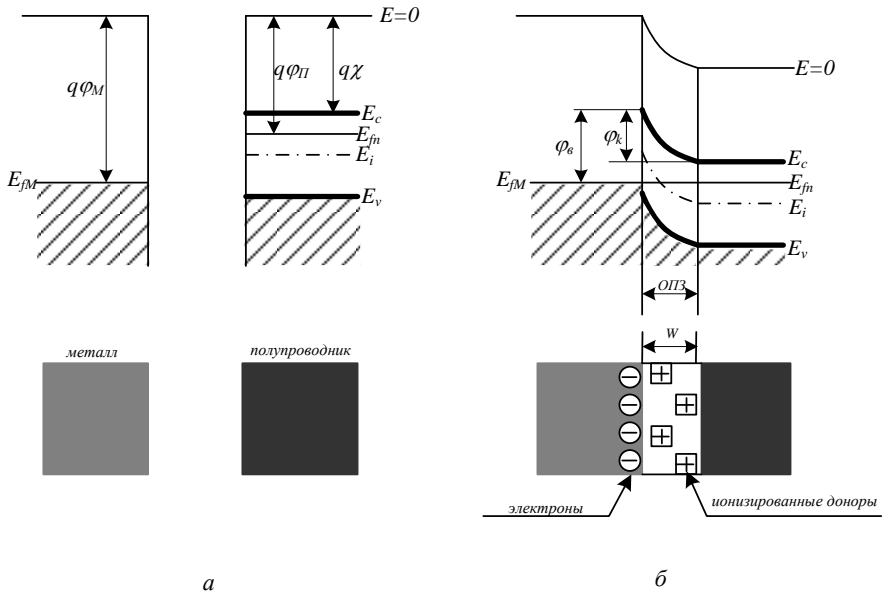


Рис. 5.1. Энергетические диаграммы металла и полупроводника: *а* – до приведения их в контакт; *б* – контакт металл – полупроводник в равновесном состоянии

Если $U_D \gg U_R$, то справедлива теория термоэлектронной эмиссии (теория Бете) и выражение для плотности тока преобразуется к виду

$$j = A^* T^2 e^{\frac{-\phi_0}{\varphi_T}} \left[e^{\frac{V}{\varphi_T}} - 1 \right].$$

В том случае, когда $U_D \ll U_R$, определяющим является процесс диффузии (теория Шоттки) и плотность тока вычисляется по формуле

$$j = q N_c \mu E e^{\frac{-\phi_0}{\varphi_T}} \left[e^{\frac{V}{\varphi_T}} - 1 \right].$$

6. Контактная разность потенциалов р – n-перехода:

$$\varphi_k = \varphi_p - \varphi_n = \varphi_T \ln \frac{N_a N_d}{n_i^2},$$

где $q\varphi_p$ – термодинамическая работа выхода электронов из полупроводника р-типа проводимости; $q\varphi_n$ – термодинамическая работа выхода электронов из полупроводника п-типа проводимости (рис.5.2,*a*); N_a, N_d – концентрация акцепторов и доноров соответственно.

7. Максимальная величина напряженности электрического поля E_{max} в р – п-переходе:

$$E_{max} = \frac{qN_a W_p}{\varepsilon_s \varepsilon_0} = \frac{qN_d W_n}{\varepsilon_s \varepsilon_0},$$

где W_p и W_n – толщина обедненных областей в р- и п-областях р – п-перехода, определяемая соотношениями

$$W_p = \sqrt{\frac{2\varepsilon_s \varepsilon_0 \varphi_k}{qN_a^2 \left(\frac{1}{N_a} + \frac{1}{N_d} \right)}}; \quad W_n = \sqrt{\frac{2\varepsilon_s \varepsilon_0 \varphi_k}{qN_d^2 \left(\frac{1}{N_a} + \frac{1}{N_d} \right)}}.$$

8. Толщина слоя объемного заряда для резкого р – п-перехода W , равная $W = W_p + W_n$:

$$W = \sqrt{\frac{2\varepsilon_s \varepsilon_0 \varphi_k}{q} \left(\frac{1}{N_a} + \frac{1}{N_d} \right)}.$$

9. Толщина слоя объемного заряда для плавного р – п-перехода:

$$W = \left[\frac{12\varepsilon_s \varepsilon_0 (\varphi_k - V)}{qa} \right]^{1/3},$$

где a – градиент концентрации примесей.

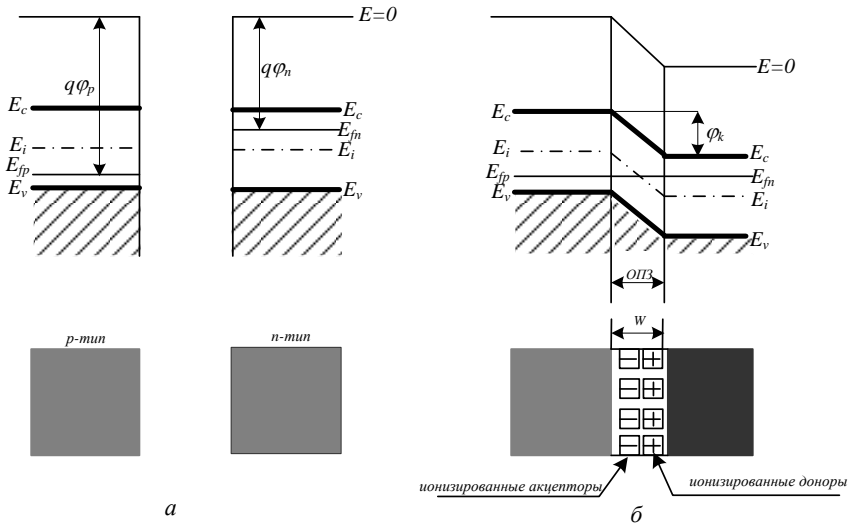


Рис. 5.2. Энергетические диаграммы полупроводников р- и n-типа проводимости: *а* – до приведения их в контакт; *б* – р – n-переход в равновесном состоянии

10. Плотность тока насыщения (обратного тока) р – n-перехода:

$$j_o = q \left(\frac{D_p p_{n0}}{L_p} + \frac{D_n n_{p0}}{L_n} \right),$$

где n_{p0} и p_{n0} – равновесная концентрации неосновных носителей заряд

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. На образце кремния n-типа сформирован золотой контакт, образующий барьер Шоттки. Падение напряжения на контакте металл – полупроводник $\phi_k = 0,5$ В. Работа выхода электронов из металла $q\phi_M$ равна 4,75 эВ. Чему равна концентрация легирующей примеси в кремнии. Рассчитать величину максимального значения напряженности электрического поля в области пространственного заряда в кремнии.

Решение

Поскольку

$$\varphi_k = \varphi_M - \varphi_n = 0,5 \text{ эВ},$$

получим

$$\varphi_n = \varphi_M - \varphi_k = 4,75 - 0,5 = 4,25 \text{ эВ}.$$

Воспользовавшись рис. 5.1, можно записать:

$$q\varphi_n - q\chi = (E_c - E_{fn}),$$

откуда следует

$$\begin{aligned} E_c - E_{fn} &= 4,25 - 4 = 0,2 \text{ эВ}; \\ E_{fn} - E_i &= (E_c - E_i) - (E_c - E_{fn}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$E_{fn} - E_i = 0,562 - 0,2 = 0,362 \text{ эВ}.$$

Теперь, используя уравнение

$$n = n_i \exp\left(\frac{E_i - E_{fn}}{kT}\right),$$

можно рассчитать концентрацию примеси в полупроводнике:

$$n = N_d = n_i \exp(0,362/0,0258) = 1,5 \cdot 10^{10} \exp(0,362/0,0258) = 1,8 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}.$$

Из уравнения, приведенного в п. 4, следует, что напряженность электрического поля в ОПЗ максимальна (E_{max}) при $x = 0$. Рассчитаем вначале ширину ОПЗ при $V = 0$:

$$W = \sqrt{\frac{2\varepsilon_s \varepsilon_0 \varphi_k}{qN_d}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 11,7 \cdot 8,85 \cdot 10^{-14} \cdot 0,5}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,8 \cdot 10^{16}}} = 190 \cdot 10^{-7} \text{ см},$$

а затем напряженность электрического поля:

$$E_{max} = \frac{2\varphi_k}{W} = \frac{2 \cdot 0,5}{190 \cdot 10^{-7}} = 5,27 \cdot 10^4 \text{ В/см}.$$

Пример 2. Дан р – n-переход с постоянными концентрациями примеси N_a в области р-типа и примеси N_d в области n-типа. Рассчитать долю K_n (в процентах) полного обратного напряжения, приходящегося на область n-типа при условии, что $N_a = 10^{17} \text{см}^{-3}$ и $N_d = 0,1 N_a$; $N_d = 0,001 N_a$.

Решение

Если обозначить максимальную напряженность электрического поля в р – n-переходе E_{max} , то падение напряжения на области р-типа V_p равно

$$V_p = E_{max} W_p / 2,$$

а падение напряжения на области n-типа V_n равно

$$V_n = E_{max} W_n / 2.$$

Из этих уравнений имеем $V_p/V_n = W_p/W_n$. Полное обратное напряжение смещения $V_{об} = V_p + V_n$, следовательно,

$$K_n = [V_n / (V_n + V_p)] 100 = (1 + V_p/V_n)^{-1} 100 = (1 + W_p/W_n)^{-1} 100.$$

Воспользовавшись уравнениями, приведенным в п. 7, получим

$$K_n = (1 + N_d / N_a) 100.$$

Соответствующие процентные доли (значения K_n) для двух рассматриваемых случаев равны:

$$\begin{aligned} K_n &= 91\% \text{ для } N_d = 10^{16} \text{см}^{-3}; \\ K_n &= 99,9\% \text{ для } N_d = 10^{14} \text{см}^{-3}. \end{aligned}$$

Таким образом, в случае, когда примесные концентрации по обе стороны резкого р – n-перехода различаются по величине на порядок, более 90 % падения полного обратного напряжения соответствует слаболегированной области.

Пример 3. В сплавном германиевом р – n-переходе с $N_d = 10^3 N_a$, на каждые 10^8 атомов германия приходится один атом акцепторной примеси. Определить контактную разность потенциалов при температуре $T = 300 \text{ К}$. Плотность атомов германия принять равной $N = 4,4 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$.

Решение

Определим концентрацию акцепторных атомов:

$$N_a = N/10^8 = 4,4 \cdot 10^{22}/10^8 = 4,4 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$$

($N = 4,4 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ – плотность атомов германия).

Концентрация атомов доноров $N_d = 10^3 N_a = 4,4 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$. Контактная разность потенциалов

$$\varphi_k = \frac{kT}{q} \ln \frac{N_d N_a}{n_i^2} = 0,026 \ln \frac{4,4 \cdot 10^{17} \cdot 4,4 \cdot 10^{14}}{(2,5 \cdot 10^{13})^2} = 0,326 \approx 0,33 \text{ В.}$$

Пример 4. В германиевом р – п-переходе удельная проводимость р-области $\sigma_p = 10^4 \text{ См/м}$ и удельная проводимость п-области $\sigma_n = 10^2 \text{ См/м}$. Подвижности электронов μ_n и дырок μ_p в германии соответственно равны 0,39 и 0,19 м²/(В·с). Концентрация собственных носителей в германии при $T = 300 \text{ К}$ составляет $n_i = 2,5 \cdot 10^{19} \text{ м}^{-3}$. Вычислить контактную разность потенциалов (высоту потенциального барьера) при $T = 300 \text{ К}$.

Решение

Для материала р-типа $\sigma_p = q\rho_p\mu_p$. Отсюда концентрация дырок в р-области

$$p_p = \sigma_p / (q\mu_p) = 10^4 / (0,19 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}) = 3,29 \cdot 10^{23} \text{ м}^{-3}.$$

Аналогично для материала п-типа

$$n_n = \sigma_n / (q\mu_n) = 100 / (0,39 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}) = 1,6 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}.$$

Концентрация дырок в п-области

$$p_n = n_i^2 / n_n = (2,5 \cdot 10^{19})^2 / (1,60 \cdot 10^{21}) = 3,91 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-3}.$$

Тогда контактная разность потенциалов

$$\varphi_k = \frac{kT}{q} \ln \left(\frac{p_p}{p_n} \right) = \frac{1,38 \cdot 10^{-21} \cdot 300}{1,6 \cdot 10^{-19}} \ln \left(\frac{3,29 \cdot 10^{23}}{3,91 \cdot 10^{17}} \right) = 0,35 \text{ В.}$$

Пример 5. Используя данные и результаты расчетов задачи из примера 4, найти плотность обратного тока насыщения, а также отношение дырочной составляющей обратного тока насыщения к электронной, если диффузионные длины для электронов и дырок $L_n = L_p = 1 \cdot 10^{-3}$ м.

Решение

Плотность обратного тока насыщения

$$j_o = q \left(\frac{D_p p_{n0}}{L_p} + \frac{D_n n_{p0}}{L_n} \right).$$

Из предыдущей задачи

$$p_n = 3,91 \cdot 10^{17} \text{ м}^{-3}; n_p = n_i^2/p_p = 1,9 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-3}.$$

Известно, что

$$D_p = (kT/q)\mu_p \text{ и } D_n = (kT/q)\mu_n.$$

Следовательно,

$$\text{А/м}^2. j_o = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \left[\frac{(3,91 \cdot 10^{17} \cdot 0,19 + 1,9 \cdot 10^{15} \cdot 0,39)}{1 \cdot 10^{-3}} \right] = 0,31 \text{ А/м}^2.$$

Отношение дырочной составляющей обратного тока насыщения к электронной составляющей равно

$$\begin{aligned} I_{op}/I_{on} &= \mu_p p_n L_n / (\mu_n p_p L_p) = \\ &= 0,19 \cdot 3,91 \cdot 10^{17} / (0,39 \cdot 1,9 \cdot 10^{15}) = 100. \end{aligned}$$

ЗАДАЧИ

1. Для контакта металл-полупроводник на основе кремния n-типа проводимости с концентрацией донорной примеси $N = 5 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ рассчитать контактную разность потенциалов, если в качестве металла использован: а) Та ($\varphi_M = 4,5$ эВ); б) Pt ($\varphi_M = 5,3$ эВ) при $T = 300$ К.

Ответ: а) 0,34 В; б) 1,1 В.

2. Для контакта Al-Si с концентрацией акцепторной примеси в кремнии $N_a = 2 \cdot 10^{15}$ оценить величину диффузионной U_R и дрейфовой U_D составляющих скорости электронов при протекании тока через контакт при температуре $T = 305$ К. Обосновать выбор выражения для расчета ВАХ. Работа выхода электронов из Al равна $\varphi_M = 4,1$ эВ.

Ответ: $U_R = 4,4 \cdot 10^4$ м/с; $U_D = 1,1 \cdot 10^4$ м/с.

3. Используя результаты решения задачи 2, рассчитать в диапазоне от -5 В до $+5$ В и построить ВАХ контакта Al-Si, если его площадь $S = 1 \cdot 10^{-6}$ м².

5. Определить контактную разность потенциалов φ_k кремниевое р – n-перехода при $T = 300$ К, если $N_a = 2 \cdot 10^{13}$ см⁻³ и $N_d = 5 \cdot 10^{12}$ см⁻³.

Ответ: 0,359 В.

6. Решить задачу (пример 3) для кремниевое р – n-перехода с такими же концентрациями примеси. Значения N и n_i приведены в прил. 3.

Ответ: 0,745 В.

7. Удельное сопротивление р-области германиевого р – n-перехода $\rho_p = 2$ Ом·см, а удельное сопротивление n-области $\rho_n = 1$ Ом·см. Вычислить контактную разность потенциалов при $T = 300$ К.

Ответ: 0,22 В.

8. Решить предыдущую задачу для кремниевое диода с такими же значениями удельных сопротивлений р- и n-областей.

Ответ: 0,673 В.

9. Для кремниевое диода с резким р – n-переходом начертить в полулогарифмическом масштабе распределение концентрации носителей заряда в переходе, если $N_d = 10^{15}$ см⁻³, а $N_a = 10^{16}$ см⁻³. Определить численные значения ординат, указать n- и р-области, а также область, обедненную носителями зарядов. Для этих условий начертить также распределения плотности объемного заряда и потенциала в переходе.

10. Выполнить такие же построения, как и в предыдущей задаче, для германиевого диода с резким р – n-переходом и такими же концентрациями примесей.

11. В кремниевом р – n-переходе удельное сопротивление р-области $\rho_p = 10^{-4}$ Ом·м, а удельное сопротивление n-области $\rho_n = 10^{-2}$ Ом·м. Вычислить контактную разность потенциалов φ_k , если подвижности дырок μ_p и электронов μ_n соответственно равны 0,05 и 0,13 м²/(В·с), а собственная концентрация $n_i = 1,4 \cdot 10^{16}$ м⁻³ при $T = 300$ К.

Ответ: 0,8 В.

12. Р – n-переход у германиевого диода имеет площадь поперечного сечения $S = 10^{-6}$ м². Ширина р- и n-областей равна 0,1 мм. Удельное сопротивление р-области $\rho_p = 4,2 \cdot 10^{-4}$ Ом·м и время жизни неосновных носителей заряда в р-области $\tau_n = 75$ мкс, а удельное сопротивление n-области $\rho_n = 2,08 \cdot 10^{-2}$ Ом·м и время жизни $\tau_p = 150$ мкс.

Определить обратный ток насыщения диода, если подвижность электронов $\mu_n = 0,30$ м²/(В·с), подвижность дырок $\mu_p = 0,15$ м²/(В·с), концентрация собственных носителей заряда $n_i = 2,5 \cdot 10^{19}$ м⁻³ при $T = 300$ К.

Ответ: 0,51 мкА.

13. Р – n-переход выполнен из собственного германия с концентрацией $n_i = 10^{13}$ см⁻³, легированного акцепторной примесью с концентрацией $N_a = 10^{17}$ см⁻³ и донорной примесью с концентрацией $N_d = 5 \cdot 10^{16}$ см⁻³. Коэффициенты диффузии для неосновных электронов и дырок соответственно равны 100 и 50 см²/с, диффузионные длины $L_n = L_p = 0,8$ см. Определить: а) контактную разность потенциалов φ_k ; б) плотность обратного тока насыщения j_0 при $T = 300$ К.

Ответ: а) 0,44 В; б) $4 \cdot 10^7$ А/см².

14. В германиевом р – n-переходе удельные сопротивления областей равны: $\rho_p = 4,2 \cdot 10^{-4}$ Ом·м и $\rho_n = 2,08 \cdot 10^{-2}$ Ом·м. Подвижность электронов $\mu_n = 0,3$ м²/(В·с) и дырок $\mu_p = 0,15$ м²/(В·с), концентрация собственных носителей заряда равна $n_i = 2,5 \cdot 10^{19}$ м⁻³. Время жизни неосновных носителей заряда $\tau_n = 75$ мкс и $\tau_p = 150$ мкс. Площадь поперечного сечения р – n-перехода $S = 10^{-6}$ м² ($T = 300$ К).

Определить: а) контактную разность потенциалов φ_k ; б) обратный ток насыщения; в) долю тока, создаваемого дырками.

Ответ: а) 0,3 В; б) 0,51 мкА; в) 98 %.

6. КОНТАКТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ (ЧАСТЬ 2)

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ

1. Вольт-амперная характеристика р – n-перехода.
2. Дифференциальное сопротивление и емкость р – n-перехода.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Уравнение ВАХ :

$$j = q \left(\frac{D_p p_{n0}}{L_p} + \frac{D_n n_{p0}}{L_n} \right) \left(e^{\frac{qV}{kT}} - 1 \right) = j_0 \left(e^{\frac{qV}{kT}} - 1 \right),$$

где j – плотность тока, протекающего через р – n-переход при приложении к нему внешнего напряжения смещения V .

2. Величина удельной барьерной емкости резкого р – n-перехода:

$$C_{\sigma} = \frac{\sqrt{2qN_e \varepsilon_s \varepsilon_0}}{2\sqrt{\varphi_k - V}} = \frac{K}{\sqrt{\varphi_k - V}},$$

где N_e – концентрация примеси в высокоомной области р – n-переход

3. Величина удельной барьерной емкости плавного р–n-перехода:

$$C_{\sigma} = \left[\frac{qa(\varepsilon_s \varepsilon_0)^2}{12(\varphi_k - V)} \right]^{1/3}.$$

4. Дифференциальное сопротивление р – n-перехода:

$$r = \frac{dV}{dI} = \varphi_T / (I_0 + I),$$

или при условии $I \gg I_0$

$$r = \varphi_T / I,$$

где I и I_0 – величины силы тока при прямом и обратном смещениях p – n -перехода соответственно.

5. Напряжение пробоя резкого несимметричного p – n -перехода:

$$V_{np} = \frac{E_{max}W}{2} = \frac{\varepsilon_s \varepsilon_0 E_{max}^2}{2qN_a}$$

6. Напряжение пробоя линейно-плавного p – n -перехода:

$$V_{np} = \frac{2E_{max}W}{3} = 4E_{max}^{3/2} \left(\frac{2\varepsilon_s \varepsilon_0}{q} \right)^{1/2} a^{-1/2}$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Используя данные и результаты примера 4 (занятие 5), найти напряжение, при котором плотность прямого тока $j = 10^5$ А/м².

Решение

Напряжение, которое необходимо приложить к p – n -переходу для получения тока плотностью 10^5 А/м², найдем из выражения

$$J = j_0 [\exp(qV/(kT)) - 1].$$

При этом

$$\exp(qV/(kT)) - 1 = 10^5 / 0,31 = 3,2 \cdot 10^5,$$

$$qV/(kT) = 12,7,$$

откуда

$$V = \frac{12,7 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1,6 \cdot 10^{-19}} = 0,328 \approx 0,33 \text{ В.}$$

Пример 2. Кремниевый p – n -переход имеет следующие данные: ширина p – n -перехода $W = 10^{-3}$ см, концентрация акцепторных примесей $N_a = 10^{19}$ см⁻³, концентрация донорных примесей $N_d = 2 \cdot 10^{16}$ см⁻³, площадь

поперечного сечения перехода $S = 10^{-4} \text{ см}^2$, длина областей $l_n = 10^{-4} \text{ см}$, $l_p = 10^{-3} \text{ см}$, коэффициенты диффузии неосновных носителей $D_p = 8 \text{ см}^2/\text{с}$, $D_n = 25 \text{ см}^2/\text{с}$, концентрация собственных носителей заряда $n_i = 1,5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$. Определить: а) обратный ток насыщения I_0 ; б) прямой ток и падение напряжения на объемах р- и п-областей при прямом напряжении, равном 0,65 В.

Решение

а) Поскольку $N_a \gg N_d$, то обратный ток насыщения определим из выражения

$$I_0 = \frac{q S n_i^2 D_n}{W N_d} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-4} (1,5)^2 \cdot 10^{20} \cdot 25}{10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{16}} = 4,5 \cdot 10^{-15} \text{ А.}$$

б) Для прямого напряжения, равного 0,65В, ток

$$I \approx I_0 \exp\left(\frac{qV}{kT}\right) = 4,5 \cdot 10^{-15} \exp(0,65 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} / (1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300)) = 4 \cdot 10^{-4} \text{ А.}$$

Сопротивления объемов р- и п-областей определяем по формуле

$$R = \rho l / S.$$

Удельные сопротивления можно вычислить по формулам:

– для п-области

$$n \gg p \text{ и } \rho_n = 1 / (q \mu_n n) = 3 \cdot 10^{-1} \text{ Ом} \cdot \text{см},$$

следовательно, сопротивление п-области

$$R = \frac{3 \cdot 10^{-1} \cdot 10^{-4}}{10^{-4}} = 3 \cdot 10^{-1} \text{ Ом};$$

– для р-области

$$p \gg n \text{ и } \rho_p = 1 / (q \mu_p p) = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Ом} \cdot \text{см},$$

следовательно, сопротивление р-области

$$R = \frac{2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3}}{10^{-4}} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ Ом.}$$

При токе, равном $4 \cdot 10^{-4}$ А, падения напряжений на сопротивлениях объемов n- и p-областей равны $1,2 \cdot 10^{-4}$ и $8 \cdot 10^{-6}$ В соответственно.

Пример 3. Германиевый полупроводниковый диод, имеющий обратный ток насыщения $I_0 = 25$ мкА, работает при прямом напряжении, равном 0,1 В, и $T = 300$ К. Определить: а) сопротивление диода постоянному току R_0 ; б) дифференциальное сопротивление r .

Решение

Найдем ток диода при прямом напряжении ($V = 0,1$ В) по формуле

$$I = I_0 \exp\left(\frac{qV}{kT} - 1\right) = 25 \cdot 10^{-6} (\exp(1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,1 / (1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300)) - 1) = 1,17 \text{ м.}$$

Тогда сопротивление диода постоянному току

$$R_0 = V/I = 0,1 / (1,17 \cdot 10^{-3}) = 85 \text{ Ом.}$$

Вычислим дифференциальное сопротивление:

$$r^{-1} = \frac{dI}{dU} = I_0 \left(\frac{q}{kT}\right) \exp(qV/kT) = 25 \cdot 10^{-6} (38,6) \cdot 48 = 46 \cdot 10^{-3} \text{ См,}$$

откуда

$$r = 1 / (46 \cdot 10^{-3}) = 21,6 \text{ Ом.}$$

Или приближенно, с учетом того, что $I \gg I_0$,

$$r^{-1} = \frac{dI}{dU} = \frac{q}{kT} (I + I_0) \approx \frac{q}{kT} I,$$

откуда

$$r \approx \frac{kT}{qI} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 1,17 \cdot 10^{-3}} = 22 \text{ Ом.}$$

Пример 4. Барьерная емкость диода равна 200 пФ при обратном напряжении 2 В. Какое требуется обратное напряжение, чтобы уменьшить емкость до 50 пФ, если контактная разность потенциалов $\varphi_k = 0,82$ В.

Решение

Как было показано в п. 2, величину барьерной емкости диода можно выразить следующим образом:

$$C = K / \sqrt{V + \varphi_k}.$$

При $V = 2$ В емкость $C = 200$ пФ, тогда

$$K = 200 \cdot 10^{-12} (2 + 0,82)^{1/2} = 3,35 \cdot 10^{-10} \text{ пФ} \cdot \text{В}^{1/2}.$$

Находим теперь обратное напряжение, при котором $C = 50$ пФ:

$$50 \cdot 10^{-12} = \frac{3,35 \cdot 10^{-10}}{(V + 0,82)^{1/2}},$$

откуда $V = 44,1$ В.

ЗАДАЧИ

1. Кремниевый планарный р – n-переход имеет удельную проводимость р-области $\sigma_p = 10^3$ См/м и n-области $\sigma_n = 20$ См/м. Время жизни неосновных носителей заряда равно 5 и 1 мкс в р- и n-областях соответственно. Определить: а) отношение дырочной составляющей к электронной составляющей тока в р – n-переходе; б) плотность обратного тока насыщения и плотность тока, текущего через р – n-переход при прямом напряжении, равном 0,3 В. Температура $T = 300$ К, концентрация собственных носителей заряда $n_i = 1,4 \cdot 10^{16}$ м⁻³, подвижность электронов $\mu_n = 0,12$ м²/(В·с), подвижность дырок $\mu_p = 0,05$ м²/(В·с).

Ответ: а) $I_p/I_n = 28,8$; б) $1,05 \text{ мкА/м}^2$, $0,081 \text{ А/м}^2$.

2. Исходя из уравнения для плотности обратного тока насыщения

$$j_o = q \left(\frac{D_p P_{n0}}{L_p} + \frac{D_n n_{p0}}{L_n} \right),$$

показать, что плотность обратного тока насыщения р – n-перехода можно найти по формуле

$$j_o = \frac{kT}{q} \frac{b\sigma_i^2}{(1+b)^2} \left(\frac{1}{\sigma_n L_p} + \frac{1}{\sigma_p L_n} \right),$$

где $b = \mu_n/\mu_p$.

3. Используя результат решения предыдущей задачи, найти обратный ток насыщения для германиевого сплавного р – n-перехода при температуре $T = 300 \text{ К}$, если площадь его поперечного сечения $S = 4 \text{ мм}^2$, $\sigma_n = 0,1 \text{ См/см}$, $\sigma_p = 1 \text{ См/см}$, $L_n = L_p = 0,15 \text{ см}$.

Ответ: 9 мк.

4. Ток, текущий в идеальном р – n-переходе при большом обратном напряжении и $T = 300 \text{ К}$, равен $2 \cdot 10^{-7}$. Найти ток, текущий при прямом напряжении, равном $0,1 \text{ В}$.

Ответ: 10 мк.

5. Вычислить прямое напряжение на р – n-переходе при токе диода $I = 1 \text{ мА}$, если обратный ток насыщения I_o при $T = 300 \text{ К}$ равен: а) 1 мкА ; б) 1 нА .

Ответ: а) $0,23 \text{ В}$; б) $0,58 \text{ В}$.

6. Германиевый сплавной р – n-переход имеет обратный ток насыщения $I_o = 1 \text{ мкА}$, а кремниевый с такими же размерами – ток $I_o = 10^{-8}$. Вычислите и сравните прямые напряжения на переходах при $T = 293 \text{ К}$, если через каждый диод протекает ток 100 мА .

Ответ: 288 мВ и 407 мВ .

7. Рассчитать и построить вольт-амперную характеристику идеального полупроводникового диода при $T = 300 \text{ К}$, если обратный ток насыщения диода $I_o = 10 \text{ мА}$, предположив, что диод имеет омическое сопротивление р- и n-областей, равное 25 Ом . Расчет провести в интервале напряжений от 0 до -10 В (через 1 В) и от 0 до $0,2 \text{ В}$ (через

0,05 В).

8. Диод имеет обратный ток насыщения $I_0 = 10$ мкА, напряжение, приложенное к диоду, равно 0,5 В. Пользуясь упрощенным уравнением вольт-амперной характеристики диода, найти отношение прямого тока к обратному при $T = 300$ К.

Ответ: $21,8 \cdot 10^7$.

9. Определить концентрацию акцепторной примеси N_a в р-области и концентрацию донорной примеси N_d п-области германиевого диода, если известно, что при $T = 300$ К удельные проводимости областей равны: $\sigma_n = 1$ См/см; $\sigma_p = 100$ См/см.

Ответ: $N_a = 1,6 \cdot 10^{17}$ см⁻³; $N_d = 1,6 \cdot 10^{15}$ см⁻³.

10. В идеальном р – п-переходе прямое напряжение 0,1 В вызывает определенный ток носителей заряда при $T = 300$ К. Какое необходимо прямое напряжение, чтобы ток увеличился в 2 раза?

Ответ: 0,118 В.

11. Для идеального р – п-перехода при $T = 300$ К определить:
а) какое необходимо приложить напряжение к переходу, чтобы получить прямой ток, равный обратному току насыщения I_0 ; б) какое необходимо прямое напряжение для получения тока, в 100 раз большего, чем обратный ток насыщения I_0 .

Ответ: а) 0,018 В; б) 0,12 В.

12. При $T = 300$ К обратный ток насыщения идеального германиевого диода $I_0 = 30$ мк. Найти дифференциальное сопротивление диода при прямом и обратном напряжениях, равных 0,2 В.

Ответ: $r_{np} = 0,4$ Ом, $r_{обр} = 890$ Ом.

13. Идеальный кремниевый р – п-переход имеет обратный ток насыщения $I_0 = 30$ мкА при $T = 125$ °С. Определить дифференциальное сопротивление диода при прямом и обратном напряжениях, равных 0,2 В.

Ответ: $r_{np} = 3,5$ Ом, $r_{обр} = 380$ Ом.

14. Вычислить барьерную емкость германиевого полупроводникового диода с площадью поперечного сечения р – п-перехода $S = 1$ мм² и с шириной области, обедненной носителями заряда, равной $2 \cdot 10^{-4}$ см.

Ответ: 71 пФ.

15. Найти барьерную емкость германиевого р – n-перехода, если удельное сопротивление р-области $\rho_p = 3,5$ Ом·см, контактная разность потенциалов $\varphi_k = 0,35$ В, приложенное обратное напряжение $V = 5$ В и площадь поперечного сечения р – n-перехода $S = 1$ мм².

Ответ: 44,7 пФ.

16. Кремниевый р – n-переход формируется путем диффузии бора в кремниевую подложку n-типа с удельным сопротивлением 0,015 Ом·м. Концентрация бора на поверхности подложки равна $5 \cdot 10^{25}$ м⁻³. Известно, что на глубине 1,5 мкм от поверхности концентрация бора уменьшается в e раз. Площадь поперечного сечения р – n-перехода $S = 1$ мм², обратное напряжение $V = 10$ В. Определить: а) ширину р – n-перехода; б) максимальную напряженность электрического поля в р – n-переходе; в) барьерную емкость р – n-перехода; г) напряжение пробоя, считая, что он наступает при напряженности электрического поля $E_m = 5 \cdot 10^7$ В/м.

Ответ: а) 1,6 мкА; б) $9,65 \cdot 10^6$ В/м; в) 311 пФ; г) 120 В.

17. Кремниевый сплавной р – n-переход имеет площадь поперечного сечения $S = 1$ мм² и барьерную емкость $C = 300$ пФ, если подводится обратное напряжение $V = 10$ В. Найти: а) изменение емкости, если обратное напряжение становится равным 20 В; б) максимальную напряженность электрического поля в обедненном носителями заряда слое при обратном напряжении, равном 10 В.

Ответ: а) 78 пФ; б) $4,2 \cdot 10^7$ В/м.

18. Обратный ток насыщения полупроводникового диода $I_0 = 1$ мкА при $T = 300$ К. Определить сопротивление диода постоянному току при прямом напряжении, равном 150 мВ.

Ответ: 450 Ом.

19. Полупроводниковый диод имеет прямой ток 0,8 А при прямом напряжении 0,3 В и температуре окружающей среды $T = 35$ °С. Определить: а) обратный ток насыщения; б) дифференциальное сопротивление диода при прямом напряжении 0,2 В; в) дифференциальное сопротивление диода при обратном напряжении 1 В.

Ответ: а) 10 мкА; б) 1,43 Ом; в) $6 \cdot 10^{19}$ Ом.

20. Определить сопротивление диода постоянному току при прямом и обратном напряжениях, если при прямом напряжении 1 В прямой ток равен 5 мА, а при обратном напряжении 100 В обратный ток равен 0,25 м.

Ответ: $r_{np} = 200 \text{ Ом}$, $r_{обр} = 4 \cdot 10^5 \text{ Ом}$.

7. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ

1. Уравнение Пуассона. Поверхностный потенциал. Поверхностная проводимость.

2. Эффект поля. МДП-структура. Емкость МДП-структуры.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Концентрация электронов и дырок в приповерхностной области пространственного заряда (ОПЗ) полупроводника:

$$n = n_i e^{\beta(\varphi + \varphi_b)};$$

$$p = n_i e^{-\beta(\varphi + \varphi_b)},$$

где $\beta = \frac{q}{kT}$; φ_b – объемный потенциал, равный

$$\varphi_b = \varphi_T \ln(N/n_i).$$

Здесь N – концентрация атомов примеси в объеме полупроводниковой подложки.

2. Поверхностные концентрации электронов n_s и дырок p_s :

$$n_s = n_i e^{\beta\varphi_s};$$

$$p_s = n_i e^{-\beta\varphi_s},$$

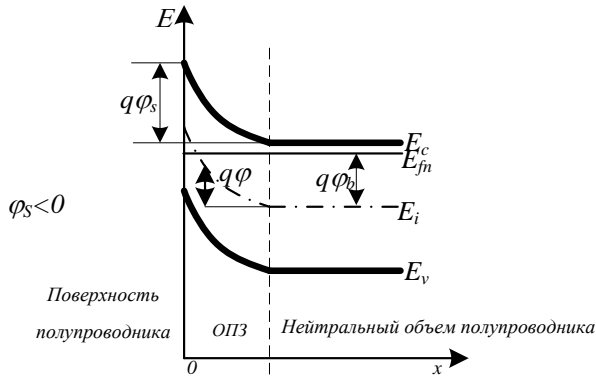


Рис. 7.1. Зонная диаграмма приповерхностной области полупроводника n -типа

где φ_s – поверхностный потенциал.

3. Поверхностная проводимость полупроводника:

$$\sigma_s = q(n_s \mu_n + p_s \mu_p).$$

4. Длина Дебая (длина экранирования электрического поля):

– для собственного полупроводника

$$L_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_s k T}{q^2 n_i}};$$

– для примесного полупроводника в случае обогащения

$$L_D = \sqrt{\frac{2 \varepsilon_0 \varepsilon_s k T}{q^2 N}};$$

– в случае инверсии типа проводимости

$$L_D = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\varepsilon_s kT}{q^2 N^*}},$$

где N^* – концентрация неосновных носителей заряда в полупроводнике.

5. Плотность заряда в приповерхностной области полупроводника (р-типа) Q_s является в общем случае суммой плотности заряда в обедненной области полупроводника Q_B и плотности подвижного заряда в инверсионном слое полупроводника Q_n , т.е.

$$Q_s = Q_B + Q_n.$$

6. Плотность заряда в обедненной области полупроводника Q_B :

$$Q_B = -qNW,$$

где W – толщина обедненного слоя в приповерхностной области МДП-структуры в режиме сильной инверсии, равная

$$W = \sqrt{\frac{4\varepsilon_0\varepsilon_s\varphi_b}{qN}}.$$

7. Дифференциальная емкость МДП-структуры:

$$C = \frac{C_d C_s}{C_d + C_s},$$

где C_d – удельная емкость диэлектрического слоя МДП-структуры, равная

$$C_d = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_d}{d}; \quad \varepsilon_d - \text{относительная диэлектрическая проницаемость}$$

диэлектрического слоя МДП-структуры; d – толщина диэлектрического слоя МДП-структуры; C_s – удельная емкость заряда в ОПЗ полупроводника, равная

$$C_s = \frac{dQ_s}{d\varphi_s}.$$

8. Распределение напряжения, прикладываемого к затвору МДП-структуры:

$$V_3 = V_d + \varphi_s + V_{nz},$$

где V_d – падение напряжения на диэлектрике, равное

$$V_d = \frac{|Q_s|}{C_d};$$

V_{nz} – напряжение плоских зон, равное

$$V_{nz} = \varphi_{МП} - \frac{Q_{ss}}{C_d},$$

где Q_{ss} – плотность заряда на границе раздела диэлектрик-полупроводник;

$q\varphi_{МП}$ – разность работ выхода электрона из металла и полупроводник $\varphi_{МП}$ для структуры Al- SiO₂-Si вычисляется следующим образом:

$$\varphi_{МП} = 3,2 - (3,25 + 0,55 \pm \varphi_b).$$

Здесь знак «+» используется для полупроводника p-типа и знак «-» – для полупроводника n-типа

9. Пороговое напряжение МДП-транзистора:

– **n-канального**

$$V_{пор} = V_{nz} + 2/|\varphi_b| + Q_B/C_d;$$

– **p-канального**

$$V_{пор} = V_{nz} - 2/|\varphi_b| - Q_B/C_d.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Какова толщина слоя окисла кремния в идеальной МДП-структуре, зонная диаграмма которой изображена на рис. 7.2.

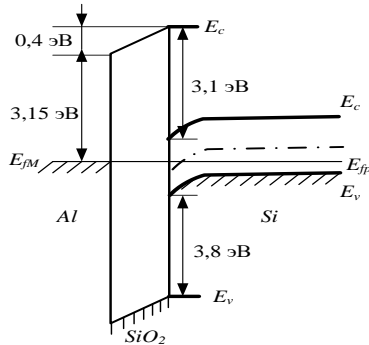


Рис. 7.2. Зонная диаграмма МДП-структуры

Решение

На рис. 7.2 показана энергетическая зонная диаграмма МДП-структуры на основе Al-SiO₂-Si при тепловом равновесии. Между металлом и кремнием действует разность потенциалов, обусловленная разностью работ выхода $\varphi_{МП}$, которая составляет $(4,9 - 4,1) \text{ В} = 0,8 \text{ В}$. Падение потенциала на слое окисла равно 0,4 В, поэтому падение потенциала на приповерхностном слое кремния также составляет 0,4 В.

Никаких зарядов в SiO₂ нет, поэтому поле в окисле E_d постоянно и падение потенциала на слое окисла V_d равно $E_d d$, где d – толщина окисла. Следовательно, найдя E_d , можно сразу же определить и толщину d .

Поскольку в задаче принято допущение, что никаких зарядов на границе окисел-кремний нет, то составляющая вектора электрического смещения D , перпендикулярного к границе раздела, непрерывна, поэтому поле E_d у поверхности кремния выражается через поле в окисле формулой

$$E_d = (\varepsilon_s / \varepsilon_d) E_s.$$

У поверхности кремния существует обедненный слой с постоянной плотностью заряда qN_a , распространяющийся на глубину W от границы раздела Si - SiO₂. В этой области зависимости поля и потенциала от координаты можно определить следующим образом:

$$E_s = qW/\varepsilon_0\varepsilon_s,$$

$$W=(2\varphi_s\varepsilon_0\varepsilon_s/qN_a)^{1/2}.$$

Концентрацию акцепторной примеси N_a в кремнии можно рассчитать, используя соотношение

$$p = N_a = n_i \exp[(E_i - E_{fp})/kT],$$

подставив в него значение $(E_i - E_{fp})$, определяемое из рис. 7.2:

$$(E_i - E_{fp}) = 4,9 - 4,05 - 0,56 = 0,29 \text{ эВ.}$$

В результате имеем

$$N_a = n_i \exp[(E_i - E_{fp})/kT] = 1,1 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}.$$

Приняв $\varphi_s = 0,4 \text{ В}$, можно получить $W = 685 \text{ нм}$ и $E_s = 1,17 \cdot 10^4 \text{ В/см}$. Следовательно, $E_d = 3,505 \cdot 10^4 \text{ В/см}$, $d = V_d/E_d = 114 \text{ нм}$.

Пример 2. Вычислите плотность заряда Q_{ss} , возникающего на границе раздела Si - SiO₂ в некоторой МДП-структуре, имеющей алюминиевую металлизацию, подложку р-типа, концентрацию акцепторов $N_a = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ и толщину оксидного слоя 0,1 мкм. Известно, что напряжение плоских зон составляет величину $-2,3 \text{ В}$.

К затвору МДП-конденсатора, рассмотренного выше, приложено напряжение в несколько сотых долей вольта; прибор работает при достаточно высокой температуре. Определить плотность заряда, связанного с обедненной областью Q_B , а также плотность подвижного заряда Q_n , вытесненного на поверхность кремния, если напряжение плоских зон составляет $V'_{nz} = 1,3 \text{ В}$. Исходные данные: $\varepsilon_d = 4$; $\varphi_T = 0,026 \text{ В}$.

Решение

Напряжение плоских зон определяется по формуле

$$V_{nz} = \varphi_{МП} - \frac{Q_{ss}}{C_d}.$$

Следовательно,

$$Q_{ss} = C_d(\varphi_{МП} - V_{n3}).$$

$$C_d = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_d}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-14} \cdot 4}{10^{-5}} = 3,54 \cdot 10^{-8} \text{ Ф/см}^2.$$

Вычислим разность работ выхода:

$$\varphi_{МП} = 3,2 - (3,25 - 0,55 + \varphi_T \ln(N_a/n_i)) = 3,2 - (3,25 - 0,55 +$$

$$+ 0,026 \ln(10^{16}/1,5 \cdot 10^{15})) = -0,6 - 0,29 = -0,89 \text{ эВ}.$$

Таким образом,

$$Q_{ss} = 3,54 \cdot 10^{-8} (0,89 + 2,3) = 3,54 \cdot 10^{-8} \cdot 3,19 =$$

$$= 11,29 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/см}^2.$$

Плотность заряда в обедненной области

$$Q_B = C_d(\varphi_{МП} - V'_{n3}) = 3,54 \cdot 10^{-8} (0,89 + 1,3) = 7,75 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/см}^2,$$

а плотность подвижного заряда

$$Q_n = Q_{ss} - Q_B = 3,54 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/см}^2.$$

Пример 3. Идеальный МДП-конденсатор сформирован на основе кремниевой подложки р-типа с концентрацией $N_a = 10^{15} \text{ см}^{-3}$. Диэлектрический слой имеет толщину 100 нм. Разность работ выхода электрона из металла и полупроводника составляет $\varphi_{МП} = -0,9 \text{ эВ}$. Плотность заряда на границе раздела $Q_{ss} = 8 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/см}^2$. Вычислите максимальную толщину обедненной области W_{max} , емкость диэлектрического слоя, заряд в обедненной области ($Q_s = Q_B$), пороговое напряжение и минимальную емкость МДП-конденсатора, а также его пороговое напряжение с учетом влияния напряжения плоских зон.

Решение

Для расчета максимальной толщины обедненной области W_{max} вычислим сначала величину объемного потенциала:

$$\varphi_b = \varphi_T \ln(N_a/n_i) = 0,026 \ln(10^{15}/1,5 \cdot 10^{10}) = 0,29 \text{ В}.$$

Тогда

$$W_{max} = 2 \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_d \varphi_b}{q N_a} \right)^{1/2} = 2 \left(\frac{8,85 \cdot 10^{-14} \cdot 12 \cdot 0,29}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{15}} \right)^{1/2} = 0,87 \text{ мкм},$$

а емкость диэлектрического слоя

$$C_d = \varepsilon_0 \varepsilon_d / d = 8,85 \cdot 10^{-14} \cdot 4 / 10^{-5} = 3,45 \cdot 10^{-8} \text{ Ф/см}^2.$$

Заряд в обеденной области рассчитаем следующим образом:

$$Q_B = Q_s = -q N_a W_{max} = -1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{15} \cdot 0,87 \cdot 10^{-4} = 1,39 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/см}^2,$$

тогда пороговое напряжение

$$V_{nop} = 2\varphi_b - Q_s / C_d = 2 \cdot 0,29 + 1,39 \cdot 10^{-8} / 3,45 \cdot 10^{-8} = 0,98 \text{ В}.$$

Емкость обеденного слоя полупроводника

$$C = C_s = \varepsilon_0 \varepsilon_s / W_{max} = 8,85 \cdot 10^{-14} \cdot 12 / 0,87 \cdot 10^{-4} = 1,2 \cdot 10^{-8} \text{ Ф/см}^2,$$

а общая емкость МДП-структуры при наличии обеденного слоя

$$C_{min} = \frac{C_d C_s}{C_d + C_s} = \frac{3,45 \cdot 1,2}{3,45 + 1,2} 10^{-8} = 0,89 \cdot 10^{-8} \text{ Ф/см}^2.$$

Пороговое напряжение с учетом влияния напряжения плоских зон

$$\begin{aligned} V'_{nop} &= \varphi_{МП} + 2\varphi_b - (Q_{ss} + Q_s) / C_d = \\ &= -0,9 + 0,576 - (5 \cdot 10^{11} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} - 1,39 \cdot 10^{-8}) / 3,45 \cdot 10^{-8} = -2,24 \text{ В}. \end{aligned}$$

Пример 4. Рассчитать требуемое время жизни неосновных носителей τ_0 в кремниевой подложке р-типа с удельным сопротивлением 12 Ом·см, в приповерхностной области которой сформирован прибор с зарядовой связью (ПЗС), выполняющий функцию формирователя изображений, исходя из условия, что на долю тепловой генерации приходится не более 5% детектируемого порогового заряда. В качестве элементов в ПЗС используется МДП-структура с квадратными затворами размером

5×5 мкм. Пороговое значение детектируемого заряда составляет 2500 электронов на элемент изображения, а заряд каждого элемента считывается и обнуляется каждые 10 мс. При тепловом равновесии поверхностная плотность зарядов в инверсном слое МДП-структуры должна составлять 10^{13} электрон/см².

Принять, что тепловая генерация электронов описывается экспоненциальной функцией времени

$$Q(t) = [1 - \exp(-t/\tau_a)], \quad (7.1)$$

где $Q(t)$ – количество генерируемых электронов; τ_a – характеристическое время поверхностной генерации, а связь τ_0 и τ_a имеет вид

$$\tau_0 = (n_i/2N_a)\tau_a. \quad (7.2)$$

Решение

При тепловом равновесии на каждом затворе находится $10^{13}(5 \cdot 10^{-4})^2 = 2,5 \cdot 10^6$ электронов. Пороговый детектируемый заряд равен 2500 электронам, а допустимое количество электронов, образующихся за счет тепловой генерации, равно для каждого затвора $2500 \cdot 0,05 = 125$.

Следовательно, подставив в уравнение (7.1) рассчитанные характеристики

$$2,5 \cdot 10^6 [1 - \exp(-t/\tau_a)] = 125,$$

получаем $t/\tau_a = 5 \cdot 10^{-5}$. Для времени генерации $t = 10^{-2}$ с получаем требуемое характеристическое время поверхностной генерации

$$\tau_a = 10^{-2}/5 \cdot 10^{-5} = 2 \cdot 10^2 \text{ с.}$$

Тогда согласно уравнению (7.2) для кремния с удельным сопротивлением 12 Ом·см ($N_a = 10^{15}$ см⁻³, прил. 4) получаем

$$\tau_0 = (1,45 \cdot 10^{10}/2 \cdot 10^{15}) 2 \cdot 10^2 = 1,45 \text{ мс.}$$

Результаты данной задачи показывают, что характеристическое время поверхностной генерации в ПЗС τ_a значительно больше времени жизни неосновных носителей заряда τ_0 .

ЗАДАЧИ

1. МДП-структура Al-SiO₂-Si сформирована на подложке p-типа проводимости. Вычислите плотность заряда Q_B , если известно, что величина объемного потенциала составляет 0,25 эВ, а собственная концентрация носителей заряда $n_i = 1,5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$.

Ответ: $Q_B = -6,18 \cdot 10^9 \text{ Кл/см}^2$.

2. МДП-структура сформирована на подложке из кремния p-типа с концентрацией акцепторов $N_a = 10^{15} \text{ см}^{-3}$. Толщина оксидного слоя d составляет 0,2 мкм, затвор выполнен из алюминия. Когда затвору сообщают некоторый заряд, на поверхности кремния возникает обедненная область толщиной $W = 0,65 \text{ мкм}$. За счет эффекта обеднения на поверхности создается электрическое поле напряженностью $E = 10^4 \text{ В/см}$. Вычислить, считая, что МДП-структура идеальная: а) потенциал поверхности подложки; б) напряжение между затвором и корпусом (на что указывает знак этого напряжения?); в) пороговое напряжение, учитывая, что в рассматриваемом случае плотность индуцированного подвижного заряда $Q_n = 0 \text{ Кл/см}^2$.

Ответ: а) $\phi_s = 0,324 \text{ В}$; б) $V_s = 0,943 \text{ В}$; в) $V_{пор} = 1,4 \text{ В}$.

3. Вычислите напряжение плоских зон для системы Al-SiO₂-Si, зависящее лишь от разности работ выхода. Подложка p-типа при температуре 300 К имеет концентрацию дырок $5 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$. Плотностью заряда на поверхности можно пренебречь.

Ответ: $V_{nz} = -0,93 \text{ В}$.

4. МДП-структура создана на кремниевой подложке p-типа. Концентрация акцепторной примеси $N_a = 10^{15} \text{ см}^{-3}$, толщина оксидного слоя d составляет 120 нм, затвор выполнен из алюминия. Вычислите пороговое напряжение, если известно, что поверхностная плотность заряда составляет $4,8 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/см}^2$.

Ответ: $V_{пор} = -1,46 \text{ В}$.

5. МДП-структура сформирована на кремневой подложке p-типа с концентрацией акцепторной примеси $N_a = 10^{15} \text{ см}^{-3}$. Толщина оксидного слоя d составляет 1,2 мкм, затвор выполнен из алюминия. Плотность поверхностного заряда на границе раздела окисел-полупроводник $Q_{ss} = 8 \cdot 10^{-8} \text{ Кл/см}^2$. Найдите пороговое напряжение.

Ответ: $V_{пор} = -32,18$ В.

6. В МДП-структуре, изготовленной из кремния *n*-типа с концентрацией примеси $N_d = 10^{15}$ см⁻³, имеющей толщину оксидного слоя 100 нм и алюминиевый затвор, пороговое напряжение равно $-2,5$ В. Вычислите значение величины Q_{ss}/q , представляющей собой концентрацию носителей на поверхности.

Ответ: $Q_{ss}/q = 1,4 \cdot 10^{11}$ см⁻².

7. МДП-конденсаторы имеют подложки с концентрациями примеси $N_a = 10^{14}$, 10^{15} и 10^{16} см⁻³. Вычислите для каждого из трех указанных значений концентрации: а) максимальную толщину области пространственного заряда; б) пороговые напряжения, полагая, что $\varphi_{МП} = -1,0$ В; $C_{min} = 3,35 \cdot 10^{-8}$ Ф/см²; $d = 100$ нм; $Q_{ss} = 1,6 \cdot 10^{-8}$ Кл/см².

Ответ: а) $W_m = 19; 2; 0,289$ нм; б) $V_{пор} = -60; -248,1; -942$ мВ.

8. Подсчитайте максимальную поверхностную плотность подвижного заряда дырок Q_p , которая может наблюдаться в МДП-конденсаторе с алюминиевым затвором, если к затвору приложен импульс напряжения с амплитудой -10 В и напряжение на границе раздела становится по меньшей мере равным 2 В. Подложка из кремния *n*-типа с концентрацией примеси $N_d = 10^{14}$ см⁻³, толщина оксидного слоя 100 нм. Известно, что $Q_{ss} = 8 \cdot 10^{-9}$ Кл/см²; $\varphi_{МП} = -0,3$ эВ.

Ответ: $Q_p = 2,32 \cdot 10^{-7}$ Кл/см².

9. МДП-транзистор с каналом *p*-типа создан на кремниевой подложке *n*-типа с концентрацией примеси $N_d = 10^{16}$ см⁻³. Затвор выполнен из алюминия, подзатворным диэлектриком служит слой окисла кремния толщиной $d = 150$ нм. Известно, что плотность заряда на границе раздела $Q_{ss} = 3,2 \cdot 10^{-8}$ Кл/см²; $\varphi_{МП} = -0,25$ эВ. Вычислите значения параметров W , $V_{пз}$ и $V_{пор}$.

Ответ: $W = 0,3$ мкм; $V_{пз} = -1,64$ В; $V_{пор} = -4,424$ В.

10. МДП-транзистор с каналом *n*-типа имеет следующие параметры: $N_d = 10^{17}$ см⁻³, $Q_{ss} = 8 \cdot 10^{-8}$ Кл/см²; $\varphi_{МП} = -0,95$ эВ. Толщина слоя окисла $d = 100$ нм. Вычислите: а) пороговое напряжение; б) повторите пункт а) применительно к транзистору с каналом *p*-типа при концентрации примеси в подложке $N_d = 10^{17}$ см⁻³ и тех же значениях параметров Q_{ss} и d . Новое значение $V_{пор}$ определите, учтя изменение уровня Ферми E_f (изменение параметра qE_f составляет 0,407 эВ).

Ответ: а) $V_{пор} = 2,33$ В; б) $V_{пор} = -8,05$ В.

11. Рассчитать и построить зонные диаграммы при тепловом равновесии и в режиме плоских зон для идеальной МДП-структуры с алюминиевым затвором, изготовленной: а) на кремнии *n*-типа проводимости с удельным сопротивлением 1 Ом·см; б) на кремнии *p*-типа проводимости с удельным сопротивлением 1 Ом·см.

Ответ: а) $V_{nz} = -0,17$ В; б) $V_{nz} = -0,9$ В.

12. Сравнить максимальную возможную емкость конденсатора размерами 100×100 мкм, выполненного в виде МДП-конденсатора (C_1), с емкостью конденсатора таких же размеров на обратно смещенном *p-n*-переходе (C_2). Принять поле пробоя окисла равным $8 \cdot 10^6$ В/см, рабочее напряжение равным 10 В. *p-n*-переход изготавливается путем диффузии бора в кремний *n*-типа проводимости с примесной концентрацией 10^{16} см⁻³.

Ответ: $C_1/C_2 = 22,8$.

13. Приняв напряжение плоских зон равным $V_{nz} = -0,5$, определить величину полной емкости МДП-структуры в режиме обеднения. Построить график зависимости отношения C/C_d от V . Толщину окисла принять равной 100 нм и считать, что кремний имеет проводимость *p*-типа и удельное сопротивление 1 Ом·см. Рассчитать и отметить на графике емкость в режиме плоских зон $C_{ПЗ}$, используя следующее выражение:

$$C_{ПЗ} = C_d \frac{L_D}{\varepsilon_0 \varepsilon_s} \left/ \left(C_d + \frac{L_D}{\varepsilon_0 \varepsilon_s} \right) \right.$$

14. Рассчитать и построить графики зависимостей указанных ниже величин для МДП-конденсатора на подложке *n*-типа проводимости, находящегося в режиме инверсии. Принять, что $V_{nz} = -2$ В и определяется в основном наличием неподвижного заряда в окисле Q_s . На графиках должны быть показаны: а) зонная диаграмма; б) полный заряд в системе; в) электрическое поле; г) потенциал. Принять за уровень отсчета потенциал в глубине подложки.

15. Привести качественные зависимости нормированных $C-V$ -характеристик МДП-структур, показанных на рис. 7.3. Вольт-фарадные характеристики измеряются на высокой частоте (≥ 100 кГц) при медленном изменении напряжения смещения на затворе. Показать (с помощью пунктирных линий), как будет влиять на $C-V$ -характеристики

структуры увеличение положительного заряда в диэлектрике. Отметить на характеристиках области обогащения, обеднения и инверсии. Принять удельное сопротивление подложки во всех случаях примерно равным 10 Ом·см.

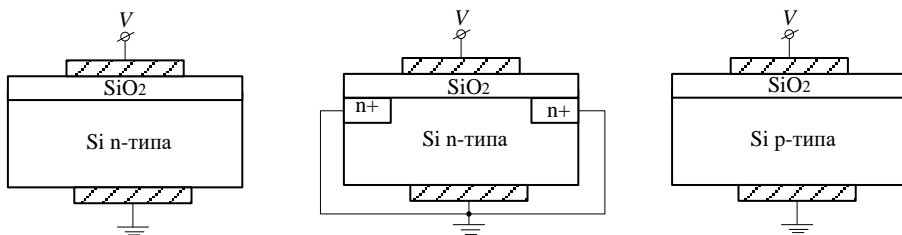


Рис. 7.3. МДП-структуры

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Захаров, А. Г.* Физические основы микроэлектроники [Текст]: учеб. пособие / А.Г. Захаров. – 2-е изд., перераб. и доп. – Таганрог: Издательство ТРТУ, 2006. – 335 с.
2. *Смирнов, Ю. А.* Физические основы электроники [Текст]: учебное пособие для вузов / Ю.А. Смирнов, С.В. Соколов, Е.В. Титов. – 2-е изд, испр. – Санкт-Петербург: Лань, 2013. – 559 с.
3. *Зи, С.* Физика полупроводниковых приборов [Текст] / С. Зи. – В 2-х кн; пер. с англ. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Мир, 1984. – Кн.1 – 456 с. Кн. 2 – 456 с.
4. Сборник задач по полупроводниковой электронике [Текст] / Н. В. Бурбаева, Т. С. Днепровская. – Москва: Физмалит, 2006. – 168 с.
5. *Терехов, В. А.* Задачник по электронным приборам [Текст]: учеб. пособие для вузов / В. Терехов. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва: Энергатамиздат, 1983. – 280 с.
6. *Росадо, Л.* Физическая электроника и микроэлектроника [Текст]; пер. с испан. С.И. Баскакова; под ред. В.А. Терехова. – Москва: Высшая школа, 1991. – 351 с.
7. *Мин Чен.* Задачи по физике с решениями [Текст]; пер. с английского Ю. Янайта; под ред. В.И. Григорьева. – Москва: Мир, 1978. – 296 с.
8. *Маллер, Р.* Элементы интегральных схем [Текст] / Р. Маллер, Т. Кейминс; пер. с англ. – Москва: Мир, 1989. – 630 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

**СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ НЕКОТОРЫМИ
ФИЗИЧЕСКИМИ ЕДИНИЦАМИ.
МНОЖИТЕЛИ ДЛЯ ОБРАЗОВАНИЯ
ДОЛЬНЫХ И КРАТНЫХ ЕДИНИЦ**

1 ампер (А) = 1 Кл/с

1 ангстрем = 10^{-10} м = 10^{-4} мкм

1 атмосфера (ат) = 760 мм рт. ст. = 101 325 Па

1 кулон (Кл) = 1 А·с

1 электрон-вольт (эВ) = $1,60 \cdot 10^{-19}$ Дж

1 фарад (Ф) = 1 Кл/В

1 калория (кал) = 4,1868 Дж

1 генри (Гн) = 1 В·с/А

1 джоуль (Дж) = 10^7 эрг = 1 Вт·с = $6,25 \cdot 10^{18}$ эВ = 1 Н·м = 1 Кл·В

1 микрометр (мкм) = 10^{-6} м

1 ньютон (Н) = 1 кг·м/с²

1 сименс (См) = 1 Ом⁻¹

1 тесла (Тл) = 1 Вб/м²

1 вольт (В) = 1 Вт/А

1 ватт (Вт) = 1 Дж/с

1 вебер (Вб) = 1 В·с

гига (Г) = $\times 10^9$

мега (М) = $\times 10^6$

кило (к) = $\times 10^3$

микро (мк) = $\times 10^{-6}$

нано (н) = $\times 10^{-9}$

пико (п) = $\times 10^{-12}$

Приложение 2

Таблица 1

НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Наименование	Символ	Числовое значение
Скорость света в вакууме	c	$2,998 \cdot 10^8$ м/с
Заряд электрона	q	$1,602 \cdot 10^{-19}$ Кл
Масса покоя электрона	m	$9,109 \cdot 10^{-31}$ кг
Отношение заряда электрона к его массе	q/m	$1,759 \cdot 10^{-11}$ Кл/кг
Постоянная Планка	h	$6,626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Приведенная постоянная Планка, равная $h/2\pi$	\hbar	$1,055 \cdot 10^{-34}$ Дж·с
Постоянная Больцмана	k	$1,381 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Постоянная Стефана – Больцмана		$5,670 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м ² ·К ⁴)
Число Авогадро	N_A	$6,023 \cdot 10^{23}$ 1/моль
Постоянная Фарадея	F	$6,649 \cdot 10^4$ Кл/моль
Магнитная постоянная	μ_0	$1,257 \cdot 10^{-6}$ Гн/м
Электрическая постоянная	ϵ_0	$8,849 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Энергия, соответствующая одному электрон-вольту	1эВ	$1,06 \cdot 10^{-19}$ Дж
Температурный потенциал при температуре 300 К	φ_T	25,8 мВ
Постоянная Ридберга	R	$1,097 \cdot 10^7$ 1/м

Приложение 3

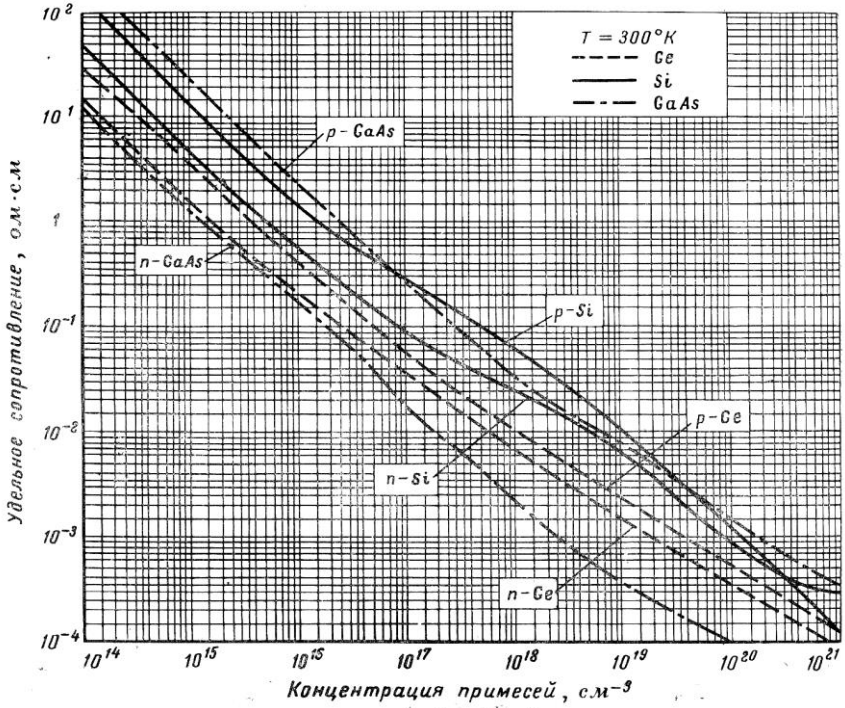
Таблица 2

**ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ И СВОЙСТВА
ПОЛУПРОВОДНИКОВ И ДИЭЛЕКТРИКОВ,
ПРИМЕНЯЕМЫХ В ТВЕРДОТЕЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОНИКЕ**

Параметр	Обозначение	Si	Ge	SiO ₂
Атомная (молекулярная) масса, моль		28,1	72,6	60,1
Атомный номер	Z	14	32	14/8
Плотность, г/см ³		2,33	5,32	2,19
Атомная (молекулярная) плотность, см ⁻³	N	$5,0 \cdot 10^{22}$	$4,4 \cdot 10^{22}$	$2,2 \cdot 10^{22}$
Относительная диэлектрическая проницаемость	ε	11,7	16,0	3,9
Ширина запрещенной зоны при 300 К, эВ при 0 К, эВ	E_g	1,124 1,170	0,67 0,744	$\approx 8 \div 9$
Собственная концентрация носителей заряда при 300 К, см ⁻³	n_i	$1,45 \cdot 10^{10}$	$2,4 \cdot 10^{13}$	–
Удельное сопротивление при 300К, Ом·см,		45	$2,3 \cdot 10^5$	–
Температура плавления, °С		1412	937	≈ 1700
Подвижность электронов при 300 К, см ² /В·с	μ_n	1300	3800	20
Подвижность дырок при 300 К, см ² /(В·с)	μ_p	500	1800	$\approx 10^{-8}$

Окончание табл. 2

Параметр	Обозначение	Si	Ge	SiO ₂
Электрическое поле при пробое, В/см	E_m	$3 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^4$	$(6-9) \cdot 10^6$
Эффективная масса: электронов,	m_n/m	1,08	0,55	–
дырок	m_p/m	0,81	0,3	–
Сродство к электрону, эВ	χ	4,05	4	1,0
Коэффициент диффузии (см ² /с): для электронов,	D_n	34,6	99	–
дырок	D_p	12,3	47	–
Коэффициент теплопроводности, Вт/см·К		1,412	0,606	0,014
Постоянная кристаллической решетки, нм	a	0,543	0,566	–
Эффективная постоянная Ричардсона в теории термоэлектронной эмиссии для кремния и германия ($A \cdot \text{см}^{-2} \text{К}^{-2}$):	A^*			
p-типа		$2,2 \cdot A$	$1,11 \cdot A$	
n-типа		$0,66 \cdot A$	$0,34 \cdot A$	
$A=120A \cdot \text{см}^{-2} \text{К}^{-2}$ – постоянная Ричардсона для свободных электронов				

ГРАФИКИ ЗАВИСИМОСТЕЙ УДЕЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ОТ КОНЦЕНТРАЦИИ ПРИМЕСЕЙ ДЛЯ Ge, Si И GaAs ПРИ 300 К

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
1. Элементы квантовой механики.....	4
2. Статистика носителей заряда в полупроводниках.....	35
3. Кинетические явления в полупроводниках (часть 1).....	41
4. Кинетические явления в полупроводниках (часть 2).....	52
5. Контактные явления (часть 1).....	60
6. Контактные явления (часть 2).....	71
7. Поверхностные явления.....	79
Список литературы.....	92
Приложения.....	93
Приложение 1. Соотношения между некоторыми физическими единицами. Множители для образования дольных и кратных единиц.....	93
Приложение 2. Некоторые физические постоянные.....	94
Приложение 3. Основные параметры и свойства полупроводников и диэлектриков, применяемых в твердотельной электронике.....	95
Приложение 4. Графики зависимостей удельного сопротивления от концентрации примесей для Ge, Si и GaAs при 300 К.....	97

Для заметок

**Захаров Анатолий Григорьевич
Какурина Наталья Андреевна
Какурин Юрий Борисович
Черепанцев Александр Сергеевич**

**СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ ФИЗИКА. ЭЛЕМЕНТЫ ФИЗИКИ
ТВЕРДОТЕЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОНИКИ**

Учебно-методическое пособие

Ответственный за выпуск Какурин Ю. Б.
Редактор Надточий З. И.
Корректор Селезнева Н. И.

Подписано в печать 2017г.
Заказ № Тираж 20 экз.
Формат 60x84 1/16.
Усл. п. л. – 6,3. Уч.-изд. л. – 6,0.

Издательство Южного федерального университета
344091, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1.
Тел. (863)2478051.

Отпечатано в Отделе полиграфической, корпоративной и
сувенирной продукции в г. Таганроге.
ИПК КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ.
ГСП 17А, Таганрог, 28, Энгельса, 1.
Тел (8634)371717, 371655.