

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**А. Б. Колпачёв**  
**О. В. Колпачёва**

**ВОЛНОВАЯ ОПТИКА**  
**ДИФРАКЦИЯ И ДИСПЕРСИЯ СВЕТА**

*Учебное пособие*

Ростов-на-Дону – Таганрог  
Издательство Южного федерального университета  
2017

УДК 535(075.8)

ББК 22.343я73

К615

Печатается по решению кафедры физики Института нанотехнологий, электроники и приборостроения Южного федерального университета от 21.12 2016 г., протокол № 6.

**Рецензенты:**

зав. кафедрой теоретической, общей физики и технологии Таганрогского института им. А. П. Чехова (филиала) Ростовского государственного экономического университета (РИНХ), кандидат технических наук, доцент *С. Н. Кихтенко*;

зав. кафедрой электротехники и электроники Донского государственного технического университета, доктор физико-математических наук, профессор *А. А. Лаврентьев*

**Колпачёв, А. Б.**

К615 Волновая оптика. Дифракция и дисперсия света : учебное пособие / А. Б. Колпачёв, О. В. Колпачёва ; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону ; Таганрог : Издательство Южного федерального университета, 2017. – 99 с., 30 ил. – Библиогр.: 12 назв.

**ISBN**

Учебное пособие содержит изложение разделов волновой оптики, касающихся явлений дифракции и дисперсии световых волн.

Пособие предназначено для студентов ЮФУ, обучающихся по направлениям «Приборостроение», «Электронная техника, радиотехника и связь», «Электроника и микроэлектроника», «Информационная безопасность».

УДК 535(075.8)

ББК 22.343я73

**ISBN**

© Южный федеральный университет, 2017

© Колпачёв А. Б., Колпачева О. В., 2017

## Введение

Предлагаемое вашему вниманию учебное пособие посвящено изложению основополагающих принципов волновой оптики. Оно является прямым продолжением опубликованных ранее пособий, посвященных явлениям преломления света, поляризации световых волн и интерференции [1,2]. В настоящем пособии будут рассмотрены явления дифракции и дисперсии света.

Как и раньше, мы будем придерживаться последовательного волнового подхода к объяснению оптических явлений. Такой подход к реализован в хорошо известных учебнике Н. И. Калитеевского [3] и монографии М. Борна и Э. Вольфа [4]. В курсе физике для будущих инженеров, при весьма ограниченном объеме времени, невозможно рассмотреть все аспекты столь обширного раздела физики, как оптика. В нашем пособии мы поставили задачу изложить основные принципы волновой оптики, и сделать изложение понятным для студентов младших курсов. Подробное и практически всестороннее изложение курса оптики можно найти в хорошо зарекомендовавших себя учебниках [5–9]. За развитием учения о свете можно проследить в книге [10].

Предлагаемое пособие также можно рассматривать, как дополнение к серии учебных пособий по физике, изданных в ТРТУ и ТИ ЮФУ в двухтысячных годах. Его можно считать логическим продолжением пособия А.С. Уколова [11] и существенным дополнением к пособию Н.Н. Заичкина [12].

Пособие содержит кроме теоретического материала контрольные вопросы, примеры решения задач и задания для самостоятельной работы. Мы надеемся, что оно поможет качественно подготовиться к сдаче зачетов и экзаменов.

# 1. Дифракция света

## 1.1. Наблюдение дифракции

Перечень явлений, которые можно объяснить волновой природой света, не исчерпывается описанными выше интерференционными явлениями. Некоторые из наблюдаемых экспериментальных результатов не могут быть объяснены только на основании теории интерференции света. Рассмотрим одно из таких явлений. Если освещать монохроматическим светом от сильного точечного источника небольшое отверстие, сделанное в непрозрачной преграде, то на экране, находящемся за этой преградой, можно увидеть светлое изображение отверстия, окруженное чередующимися концентрическими темными и светлыми кольцами. Отверстие, проколотное в преграде иглой, можно заменить диафрагмой, диаметр которой можно увеличивать или уменьшать. Изменяя таким образом диаметр отверстия, можно заметить, что не только меняются радиусы наблюдаемых светлых и темных колец, но и их освещенность, светлые кольца становятся темными и наоборот. Можно также добиться того, что в центре наблюдаемой картины светлое пятно сменится темным. Добиться такого результата в опыте Юнга по интерференции когерентных волн, исходящих из двух отверстий невозможно. В опыте Юнга в центре интерференционной картины всегда наблюдается светлое пятно или светлая полоса.

Описанный опыт не является

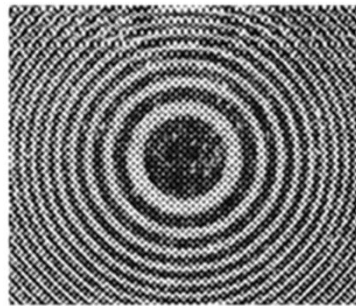


Рис 1. Дифракция на круглом отверстии. Пример дифракционной картины

единственным проявлением явления дифракции света. Так, если освещать монохроматическим светом хорошо заточенный край металлического лезвия, то на границе области световой тени на экране можно заметить чередующиеся светлые и темные полосы. В случае, когда на такую преграду падает белый свет, на границе тени наблюдается радужная окраска. Иногда говорят, что дифракция света есть проникновение световых волн в область геометрической тени. Безусловно, такое проникновение в описанных опытах происходит, но наблюдаемая картина сложнее – в некоторых частях экрана наблюдается усиление освещенности, в других – ослабление. Эти изменения освещенности наблюдаются не только в области геометрической тени, но и прямо напротив диафрагмы. При определенном диаметре диафрагмы в центре картины может быть темное, а не светлое пятно.

Определим явление дифракции следующим образом.

***Дифракция – это совокупность явлений, происходящих при распространении волн в среде с резкими неоднородностями и приводящих к перераспределению интенсивности излучения.***

Первые попытки объяснить дифракцию и другие волновые свойства света были предприняты Х. Гюйгенсом. В 1690 году голландский ученый Христиан Гюйгенс (1629–1703) издал во Франции «Трактат о свете», первое научное сочинение по волновой оптике. В этом труде впервые был сформулирован принцип распространения волны, известный ныне под названием принципа Гюйгенса. На основании этого принципа Гюйгенс объяснял законы отражения и преломления света и разработал теорию двойного лучепреломления в кристаллах. Однако теория Гюйгенса основывалась на представлении в свете как о продольных механических волнах, распространяющихся в некоторой прозрачной среде, названной Гюйгенсом светоносным эфиром. Представление о свете, как о продольной

волне не могло объяснить явления поляризации света, также открытого и исследованного Гюйгенсом. У волновой теории Гюйгенса также возникали трудности при описании образования геометрической тени, отбрасываемой предметами. Против представления об эфире выступал Ньютон, считая, что среда, в которой распространяются световые волны, заполняющая все пространство, должна мешать движению планет, которое Ньютон хорошо описывал без учета сил сопротивления среды.

На время волновая теория света Гюйгенса была забыта, однако в начале XIX века французский физик Огюстен Жан Френель (1788–1827) вернулся к идеям Гюйгенса и существенно развил их. В 1815–1819 годах он опубликовал несколько научных работ, в которых на основании дополненного им принципа Гюйгенса смог объяснить результаты опытов по дифракции света, то есть по перераспределению интенсивности света, возникающей в результате распространения света в среде с резкими неоднородностями. К этим явлениям можно отнести возникновение цветных каемок у теней, возникающих при освещении предметов (тонкой проволоки, кромки заточенного лезвия) точечными источниками света.

### **Контрольные вопросы**

1. Приведите примеры экспериментального наблюдения дифракции света. В чем отличие результатов этих опытов от экспериментов, демонстрирующих явление интерференции?

2. Иногда говорят, что дифракция сводится к огибанию волнами препятствий. Почему это утверждение неверно? Приведите примеры.

3. Что такое дифракция?

## 1.2. Принцип Гюйгенса – Френеля

Распространение волн любой природы, в том числе электромагнитных волн, можно описывать с помощью принципа Гюйгенса – Френеля, который состоит в следующем.

**Принцип Гюйгенса.** Каждая точка волнового фронта является источником вторичных колебаний, происходящих с той же частотой и распространяющихся с той же скоростью, что и исходные колебания.

**Дополнение Френеля.** Интенсивность волны в данной точке является результатом наложения волн, исходящих из всех точек волнового фронта.

Рассмотрим пример, касающийся описания распространения плоской электромагнитной волны с помощью принципа Гюйгенса – Френеля. Рис. 2 является иллюстрацией к этому примеру. Пусть плоская волна распространяется в пространстве со скоростью  $v$  и к некоторому моменту времени ее волновым фронтом является плоскость  $AB$ . Согласно принципу Гюйгенса каждая точка волнового фронта  $AB$  является источником волн, распространяющихся с той же скоростью, что и исходная волна. Точечные источники могут излучать только сферические волны. Сферические волны, исходящие из некоторых точек волнового фронта показаны на рис. 2. За время  $\tau$ , распространяясь со скоростью  $v$ , эти волны пройдут расстояние  $R = v\tau$ . Этой величине равны радиусы окружностей,

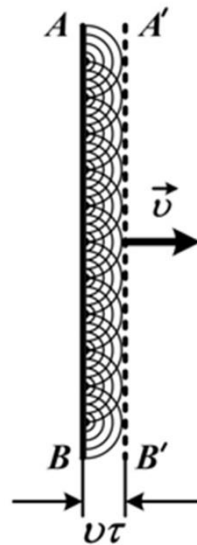


Рис. 2. Распространение плоской волны

изображенных на рисунке. Количество точек на плоскости бесконечно велико, поэтому огибающая всех сфер, центрами которых являются точки на плоскости  $AB$ , будет плоскостью  $A'B'$ . Скорость распространения волны направлена перпендикулярно волновому фронту.

На рис. 3 показано построение Гюйгенса для сферической волны, распространяющейся со скоростью  $v$  от точечного источника  $S$ . К некоторому моменту времени фронт волны представляет собой сферу радиуса  $R$ . Каждую точку этой сферы считаем точечным источником, испускающим сферические волны. Через время  $\tau$  эти волны достигают поверхности сферы радиуса  $R_1 = R + v\tau$ .

Дополнение Френеля состоит в том, что при определении интенсивности излучения в каждой точке пространства следует учитывать интерференционные эффекты. Это означает, что при наложении когерентных волн в некоторых точках пространства, в зависимости от разности фаз колебаний в волнах, может происходить усиление интенсивности излучения, а в других точках – ослабление.

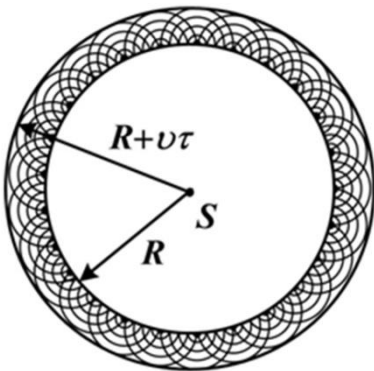


Рис. 3. Распространение сферической волны от точечного источника  $S$ .

Таким образом, при описании и объяснении дифракционных явлений мы должны считать, что источниками волн являются все точки открытой части волнового фронта. Например, если мы рассматриваем дифракцию света на отверстии, то источниками волн мы должны считать все точки волнового фронта, попадающие внутрь этого отверстия. Амплитуда колебаний в волне в точке наблюдения



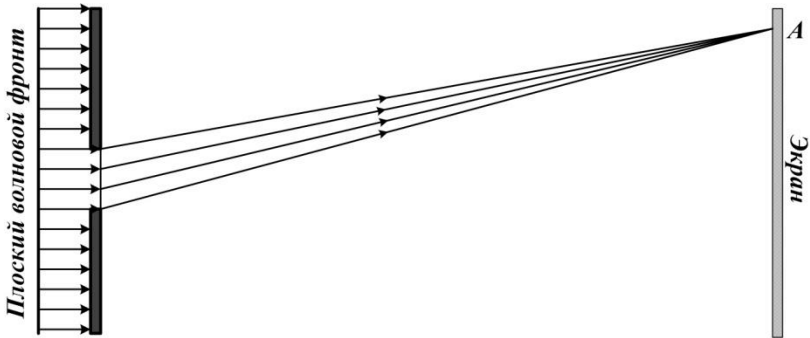


Рис. 4. При дифракции света на отверстии волны из различных точек открытой части волнового фронта приходят в точку наблюдения А, проходя различные расстояния. Это приводит к тому, между колебаниями в точке А возникает разность фаз.

является результатом сложения колебаний, приходящих от всех точечных источников открытой части волнового фронта. Из-за того, что расстояния от разных точек волнового фронта до точки наблюдения различны, колебания будут происходить в различных фазах и это мы должны учитывать при их сложении.

Нечто подобное нам приходилось делать при описании двухлучевой интерференции [2] (опыт Юнга, тонкие пленки, кольца Ньютона), однако там результат определялся разностью фаз между двумя волнами, исходящими из конечного числа источников, обычно, из двух. При рассмотрении дифракции необходимо суммировать вклады от бесконечно большого числа волн, исходящих из бесконечно большого числа источников, которыми являются все точки открытой части волнового фронта. Разумеется, эта задача намного сложнее той, что пришлось решать для объяснения интерференции. Способ решения этой задачи предложил О. Ж. Френель.

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте принцип Гюйгенса.

2. Сформулируйте дополнение Френеля к принципу Гюйгенса.

3. Пусть волна, исходящая из точечного источника, распространяется в плоскости. Докажите, что если скорость распространения волны одинакова по всем направлениям в этой плоскости, то волновой фронт будет окружностью.

4. Пусть волна, исходящая из точечного источника, распространяется в плоскости  $XU$ . Скорость распространения волны в направлении оси  $OX$  равна  $v_1$ , скорость распространения волны в направлении оси  $OY$  равна  $v_2$ . Докажите, что волновой фронт в этом случае будет эллипсом. Найдите отношение полуосей этого эллипса.

5. Докажите геометрическим построением, что при распространении плоской световой волны в среде с изменяющимся показателем преломления световой луч не будет прямолинейным.

6. Волны, исходящие из каких точек волнового фронта следует учитывать при объяснении дифракционных явления?

### 1.3. Метод зон Френеля

Согласно принципу суперпозиции суммарная напряжённость электрического поля в точке наблюдения  $A$ , созданная волнами, исходящими из всех точечных источников на открытой части волнового фронта  $\sigma$ , равна сумме напряжённостей полей волн, исходящих из каждого точечного источника (рис. 4). Для того чтобы найти эту сумму, нужно вычислить интеграл по открытой поверхности волнового фронта  $\sigma$ :

$$E(A) = \iint_{\sigma} dE = \iint_{\sigma} E_0 e^{i(\omega t - kr)} d\sigma.$$

Непосредственно вычислять такой интеграл непросто. Для того, чтобы просуммировать вклады в напряженность электрического поля, создаваемого электромагнитными волнами, исходящими из всех точек открытой части волнового фронта, Френель предложил разделить волновой фронт на отдельные области, называемые *зонами Френеля*. Эти зоны выбирают так, чтобы из двух соседних зон в точку наблюдения волны приходили с разностью хода в половину длины волны  $\lambda/2$  (или с разностью фаз колебаний  $\pi$ ). В этом случае две волны, приходящие в точку наблюдения из двух соседних зон Френеля при сложении дают минимум освещенности.

Будем считать, что волны, излучаемые различными точками волнового фронта, имеют одинаковую амплитуду. Число «излучателей» в каждой зоне Френеля пропорционально площади зоны. При условии, что площади соседних зон Френеля одинаковы, суммарный вклад в напряженность поля волны в точке наблюдения от двух соседних зон Френеля будет равен нулю. Таким образом, если в открытой части волнового фронта помещается две зоны Френеля, в точке наблюдения мы увидим минимум освещенности, темную полосу или пятно. Точно также мы будем наблюдать минимум освещенности в точке наблюдения, если в открытой части волнового фронта укладывается любое четное число зон Френеля. Как говорят, волны, приходящие из соседних зон «гасят» друг друга. Наоборот, если в открытой части волнового фронта укладывается любое нечетное число зон Френеля, в точке наблюдения освещенность максимальна. В этом случае всегда остаются «непогашенные» волны из одной зоны Френеля.

Итак, *участки волнового фронта одинаковой площади, из которых в точку наблюдения волны приходят с разностью хода в  $\lambda/2$  называются зонами Френеля.*

## Контрольные вопросы

1. Что такое зоны Френеля?
2. Как должны соотноситься площади зон Френеля? Почему?
3. Верно ли утверждение, что для объяснения процесса дифракции на данном объекте (отверстие, нить) достаточно один раз провести разбиение волнового фронта на зоны Френеля, а в дальнейшем это разбиение можно использовать для определения освещенности в различных точках экрана? Ответ обоснуйте.
4. Верно ли утверждение, что для объяснения процесса дифракции на данном объекте (отверстие, нить) следует проводить разбиение волнового фронта на зоны Френеля для каждой новой точки наблюдения? Ответ обоснуйте.

### 1.4. Объяснение дифракции плоских волн на отверстии с помощью метода зон Френеля

Пусть на отверстие в непрозрачной преграде падает плоская световая волна, как это показано на рис. 4. В качестве источника света мы должны рассматривать всю площадь отверстия. Падающее излучение сформировано в параллельный пучок, поэтому мы можем считать, что фазы колебаний во всех точках отверстия одинаковы. Число точек – источников волн в отверстии бесконечно велико. Для объяснения наблюдаемой дифракционной картины применим метод зон Френеля.

Разделим волновой фронт в отверстии на такие участки (зоны), из которых в точку наблюдения волны будут приходить с разностью хода в  $\lambda/2$ . Волны, приходящие из соседних зон в точку наблюдения с разностью хода в  $\lambda/2$  будут при сложении давать минимум освещенности. Если интенсивность излучения, исходящего из двух соседних зон одинакова, то при сложении

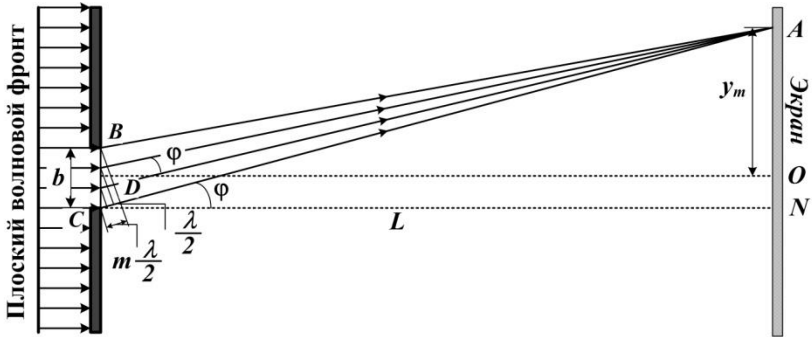


Рис. 5. Схема разбиения плоского волнового фронта на зоны Френеля

будет наблюдаться не просто минимум освещённости, но полная темнота. Этого можно добиться, если число точечных источников в каждой зоне одинаково. А для этого необходимо, чтобы площади зон были равны. Отметим, что для каждой точки наблюдения разбиение волнового фронта на зоны Френеля будет отличаться от разбиения для другой точки.

Сформулируем решаемую задачу. На отверстие падает плоская волна (волновой фронт – плоскость). Известна длина волны  $\lambda$ , размер отверстия  $b$  и расстояние до экрана  $L$ . Требуется определить освещённость в некоторой точке  $A$  на экране.

Схема разбиения открытой части волнового фронта на зоны Френеля для рассматриваемого случая представлена на рис. 5. На рисунке плоский волновой фронт падает на непрозрачную преграду с отверстием  $BC$ . Наклонные линии, идущие от отверстия и сходящиеся в точке наблюдения  $A$ , обозначают ход лучей из граничных точек зон Френеля. Разность хода между лучами, исходящими из соседних зон равна  $\lambda/2$ . Разность хода между крайними лучами  $\delta$  равна

$$\delta = m \frac{\lambda}{2},$$

где  $m$  – число зон Френеля, укладывающихся в открытой части волнового фронта. На рис. 5 показаны три зоны Френеля, укладывающиеся в открытой части волнового фронта. Размер отверстия  $b$  много меньше расстояния до экрана,  $b \ll L$ . Поэтому  $\angle ACN \approx \angle CBD = \varphi$ . Разность хода волн, исходящих из крайних точек отверстия  $CD = \delta = b \sin \varphi$ . С другой стороны,  $CD = \delta = m\lambda/2$ . Таким образом,

$$b \sin \varphi = m \frac{\lambda}{2}.$$

Если число открытых зон Френеля  $m$  – чётное, то в точке  $A$  наблюдается минимум освещённости, если  $m$  – нечётное, то максимум.

Условие наблюдения в точке  $A$  максимума освещенности можно записать так

$$b \sin \varphi = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (1.1)$$

где нечетные числа представлены как  $m = (2k + 1)$ ,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

Условие минимума ( $m = 2k$  – четные числа)

$$b \sin \varphi = 2k \frac{\lambda}{2},$$

$$b \sin \varphi = k\lambda. \quad (1.2)$$

Расстояние  $y_m$  от центра дифракционной картины до максимума или минимума номер  $m$  можно рассчитать так. Расстояние от отверстия до точки наблюдения  $L \gg b$ , поэтому можно считать, что

$$y_m = btg \varphi.$$

Для малых углов можно считать, что

$$\sin \varphi = tg \varphi = \frac{y_k}{L}.$$

Подставляя тангенс вместо синуса в условие максимума, получим

$$b \operatorname{tg} \varphi = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

$$b \frac{y_k}{L} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2},$$

откуда

$$y_k = (2k + 1) \frac{\lambda L}{2 b}. \quad (1.3)$$

Аналогично можно определить положение минимумов освещенности на экране. Условие минимума

$$b \sin \varphi = k \lambda,$$

$$\sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi = \frac{y_m}{L},$$

откуда

$$b \frac{y_k}{L} = k \lambda,$$

$$y_k = k \lambda \frac{L}{b}. \quad (1.4)$$

Из полученных формул, определяющих положение дифракционных максимумов и минимумов на экране видно, что дифракционная картина, возникающая при дифракции плоских волн на отверстии, представляет собой чередующиеся светлые и темные полосы либо окружности в зависимости от формы отверстия. Качественно такая картина соответствует той, что наблюдается в эксперименте. Положение интерференционных максимумов и минимумов, рассчитанное по формулам (1.3) и (1.4) согласуется с экспериментом не только качественно, но и количественно.

**Выводы:**

**1.** Применение метода зон Френеля позволяет определить положение минимумов и максимумов освещенности при дифракции плоских волн, но не даёт количественной информации об интенсивности излучения в различных точках экрана.

Для объяснения дифракционной картины, получаемой при дифракции сферических волн, исходящих из точечного источника также возможно применение метода зон Френеля, однако геометрические построения при разбиении волнового фронта на зоны в этом случае более сложны. Применение метода зон Френеля к дифракции сферических волн будет рассмотрено ниже.

**2.** Для применения метода зон Френеля необходимо сделать следующее:

- построить чертёж, отражающий ход лучей от источника к точке наблюдения.

- разделить волновой фронт на зоны Френеля. При этом следует помнить, что площади зон Френеля должны быть равны.

- определить число зон Френеля, помещающееся в открытой части волнового фронта, на основании чего сделать выводы об освещённости точки наблюдения.

**3.** Разбиение волнового фронта на зоны Френеля определяется положением точки наблюдения, поэтому при переходе к другой точке наблюдения следует повторить всю процедуру сначала.

**4.** Направления, в которых наблюдаются дифракционные максимумы и минимумы определяются формулами (1.1) и (1.2), а положение максимумов и минимумов на экране – формулами (1.3) и (1.4).



## Контрольные вопросы

1. На какую величину отличаются длины лучей, исходящих из двух соседних зон Френеля и приходящих в одну точку наблюдения?

2. Как определить разность хода двух лучей, исходящих из двух соседних зон Френеля и приходящих в одну точку наблюдения при дифракции плоской волны на отверстии из геометрических соображений (рис. 5)?

3. Рассмотрим дифракцию световой волны на отверстии. Какова разность фаз между колебаниями в двух соседних зонах Френеля внутри отверстия?

4. Рассмотрим дифракцию световой волны на отверстии. Какова разность фаз между колебаниями, приходящими из двух соседних зон Френеля в точку наблюдения?

5. Что такое дифракция Фраунгофера?

6. Что такое дифракция Френеля?

7. Какие приближения были использованы при выводе условий минимума и максимума освещенности при дифракции плоской волны на отверстии?

8. Какие ограничения на применение формул (1.1), (1.2), (1.3) и (1.4), отражающих условия максимумов и минимумов освещенности при дифракции плоской волны на отверстии, накладывают приближения, использованные при их выводе?

### 1.5. Дифракция плоской волны на отверстии. Количественная теория

В предыдущем параграфе мы с помощью метода зон Френеля объяснили возникновение светлых и темных областей в дифракционной картине, полученной при падении параллельного пучка света на малое отверстие, и даже указали,

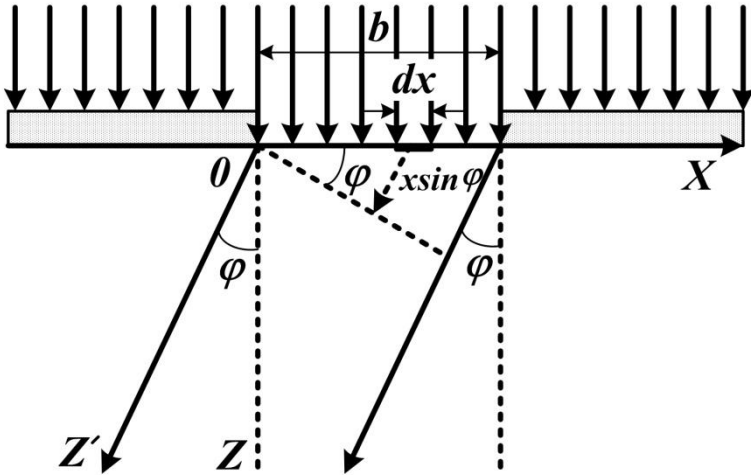


Рис. 6. К выводу формулы интенсивности света, излучаемого в определенном направлении

в каких местах будут наблюдаться светлые полосы, а в каких – темные. Для получения более полной информации о распределении интенсивности света на экране нам потребуется просуммировать вклады от волн, исходящих из всех точек открытой части волнового фронта. Сформулируем решаемую задачу.

Пусть на отверстие падает плоская монохроматическая волна (волновой фронт – плоскость). Известна длина волны  $\lambda$ , размер отверстия  $b$  и расстояние до экрана  $L$ . Требуется определить, как распределена интенсивность излучения на экране. Для этого достаточно определить распределение интенсивности излучения по направлениям после прохождения отверстия.

Согласно принципу Гюйгенса-Френеля каждая точка волнового фронта является источником сферических волн, колебания в которых происходят с той же частотой, что и исходные волны и распространяющихся с той же скоростью. В

нашем случае источником сферических волн является открытая часть волнового фронта, попадающая в отверстие.

Рассмотрим участок отверстия длиной  $dx$ , расположенный на расстоянии  $x$  от его края (рис. 6). Ось  $OX$  на рисунке проходит по краю отверстия. Начало отсчета находится у левого края отверстия. Волны, излучённые с произвольного отрезка волнового фронта  $dx$ , распространяются по всем направлениям. Угол  $\varphi$ , образуемый направлением излучения волны (луч  $OZ'$  на рисунке) с перпендикуляром к плоскости отверстия (ось  $OZ$  на рисунке), изменяется в пределах от  $-\pi/2$  до  $+\pi/2$  ( $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ ). Рассмотрим волны, распространяющиеся вдоль прямой, образующей угол  $\varphi$  с перпендикуляром к преграде. Вклад в излучение по этому направлению дают все элементарные отрезки волнового фронта. Суммарную амплитуду колебаний напряженности электрического поля в световой волне, распространяющейся по этому направлению, найдем, складывая напряженности электрического поля волн, исходящих из всех точек открытой части волнового фронта.

Волны, излучённые с отрезка  $dx$ , по сравнению с волнами, излученными из крайней точки отверстия, запаздывают по фазе на

$$\Delta = kx \sin \varphi,$$

где  $k = \frac{\omega}{v}$  - волновое число (модуль волнового вектора).

Запишем уравнение волны, испущенной с произвольного участка  $dx$  в направлении луча  $OZ'$ . Если  $E_0$  - амплитуда волны, испущенной из всего отверстия в этом направлении, то амплитуда волны, испущенной с участка  $dx$  равна

$$E_{0x} = \frac{E_0}{b} dx.$$

Уравнение волны, испущенной с участка  $dx$  в направлении, определяемом углом  $\varphi$ , запишем в комплексной форме

$$dE_\varphi = \frac{E_0}{b} e^{i(\omega t - kx \sin \varphi)} dx.$$

Волна  $E_\varphi$ , испущенная из всего отверстия в рассматриваемом направлении является суммой волн, излученных всеми точками той части волнового фронта, которая попала в отверстие, поэтому

$$E_\varphi = \int_0^b \frac{E_0}{b} e^{i(\omega t - kx \sin \varphi)} dx.$$

Так как интегрирование производится по переменной  $x$ , множитель, зависящий от времени, можно вынести из-под знака интеграла. Затем возьмем интеграл, и подставим значения подынтегральной функции на верхнем и нижнем пределах:

$$\begin{aligned} E_\varphi &= \int_0^b \frac{E_0}{b} e^{i(\omega t - kx \sin \varphi)} dx = \frac{E_0}{b} e^{i\omega t} \int_0^b e^{-ikx \sin \varphi} dx = \\ &= \frac{E_0}{b} e^{i\omega t} \left. \frac{e^{-ikx \sin \varphi}}{-ik \sin \varphi} \right|_0^b = E_0 e^{i\omega t} \frac{e^{-ikb \sin \varphi} - 1}{-ikb \sin \varphi}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Преобразуем полученное выражение к симметричной форме. Это позволит в дальнейшем перейти к действительной форме записи, более удобной для анализа и сравнения с тем, что наблюдается в эксперименте. Для этого преобразуем дробь в полученном выражении.

$$\begin{aligned} \frac{e^{-ikb \sin \varphi} - 1}{-ikb \sin \varphi} &= \frac{e^{-ik \frac{b}{2} \sin \varphi} e^{-ik \frac{b}{2} \sin \varphi} - e^{-ik \frac{b}{2} \sin \varphi} e^{+ik \frac{b}{2} \sin \varphi}}{-ikb \sin \varphi} = \\ &= \frac{e^{-ik \frac{b}{2} \sin \varphi} - e^{+ik \frac{b}{2} \sin \varphi}}{-2ik \frac{b}{2} \sin \varphi} e^{-ik \frac{b}{2} \sin \varphi} = \frac{e^{-iu} - e^{+iu}}{-2iu} e^{-iu}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для упрощения записи мы ввели обозначение

$$u = k \frac{b}{2} \sin \varphi. \quad (1.7)$$

Величина  $u$ , постоянна для направления, определяемого углом  $\varphi$ . Далее, преобразуем (1.6) к действительной форме

$$\frac{e^{-iu} - e^{+iu}}{-2iu} e^{-iu} = \frac{\sin u}{u} e^{-iu}.$$

Теперь уравнение волны, испущенной из всей щели в направлении, образующим угол  $\varphi$  с перпендикуляром к отверстию:

$$E_{\varphi} = E_0 \frac{\sin u}{u} e^{i(\omega t - u)}.$$

Интенсивность излучения, испущенного из всей щели в рассматриваемом направлении, определяется квадратом амплитуды этой волны

$$I \sim |E|^2,$$

$$E_{\varphi}^2 = E_0^2 \left| e^{i(\omega t - u)} \right|^2 \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2. \quad (1.8)$$

Так как частота колебаний световой волны очень велика, наблюдать можно только среднее значение интенсивности. Усреднение следует производить по времени, многократно превышающем период колебаний напряженности электрического поля в световой волне. От времени в (1.8) зависит только множитель

$$\left| e^{i\omega t} \right|^2.$$

Он является гармонической функцией. Вопрос о среднем значении квадрата гармонической функции был подробно рассмотрен в связи с вычислением средней освещенности в первой части нашего пособия, параграф 1.5. Среднее значение освещенности, равно средней мощности излучения, падающей на единицу площади освещаемой поверхности. Оно пропорционально квадрату амплитуды световой волны. Поэтому можно считать, что величину освещенности, наблюдаемой в направлении, определяемом углом  $\varphi$  можно выразить как

$$I_{\varphi} = I_0 \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2, \quad (1.9)$$

где  $u = k \frac{b}{2} \sin \varphi$ .

Исследуем полученную зависимость. Когда  $u$  стремится к нулю,

$$\frac{\sin u}{u} \rightarrow 1.$$

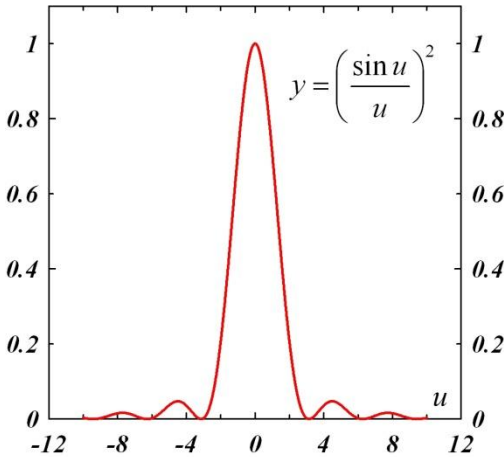


Рис. 7. Распределение интенсивности излучения по направлениям при дифракции Фраунгофера на отверстии

Это – максимальное значение функции. При возрастании модуля  $u$  функция будет убывать. Это убывание не будет монотонным вследствие осцилляций числителя. Теперь можно определить, при каких значениях угла дифракции  $\varphi$  наблюдаются максимумы и минимумы интенсивности излучения.

Функция

$$I_{\varphi} = I_0 \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2$$

имеет локальные *минимумы* при условии  $\sin u = 0$ .

Это возможно, если

$$u = m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Подставляя выражение для величины  $u$ , получим

$$\frac{kb}{2} \sin \varphi = \frac{2\pi b}{2\lambda} \sin \varphi = m\pi,$$

откуда условие наблюдения минимума освещенности можно записать так:

$$b \sin \varphi = m\lambda.$$

Это условие совпадает с аналогичным условием (1.2), полученным с помощью метода зон Френеля.

Функция

$$I_{\varphi} = I_0 \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2$$

имеет локальные *максимумы* (кроме центрального) при условии  $\sin u = \pm 1$ .

Это возможно, если

$$u = (2m + 1) \frac{\pi}{2},$$

Подставляя выражение для величины  $u$ , получаем:

$$\frac{kb}{2} \sin \varphi = \frac{2\pi b}{2\lambda} \sin \varphi = (2m + 1) \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда получаем условие наблюдения максимума освещенности при дифракции плоской волны на отверстии.

$$b \sin \varphi = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}.$$

Это условие также совпадает с выражением (1.1), полученным с использованием метода зон Френеля.

Точный расчёт позволяет определить значения интенсивности для произвольного угла дифракции. Для этого нужно использовать формулу (1.7).

### **Выводы:**

1. Суммирование вкладов от всех источников излучения, попадающих в открытую часть волнового фронта, дает такие же условия наблюдения дифракционных максимумов при дифракции плоской волны на отверстии, что и применение метода зон Френеля.

2. При дифракции плоской волны на отверстии дифракционные максимумы освещенности можно обнаружить при наблюдении под углами  $\varphi_m$ , определяемыми выражением

$$b \sin \varphi_m = (2m + 1) \frac{\lambda}{2},$$

где  $b$  – размер отверстия,  $\lambda$  – длина волны света,  $m$  – целое число.

3. При дифракции плоской волны на отверстии дифракционные минимумы освещенности видны при наблюдении под углами  $\varphi_m$ , определяемыми выражением

$$b \sin \varphi_m = m\lambda,$$

где  $b$  – размер отверстия,  $\lambda$  – длина волны света,  $m$  – целое число.

### Контрольные вопросы

1. Какие фундаментальные физические принципы и какие свойства электромагнитных волн использовались при расчете распределения интенсивности излучения, возникающего в случае дифракции плоской волны на отверстии?

2. Имеется круглое отверстие в непрозрачной преграде, на которую падает монохроматическая световая волна от удаленного точечного источника. За отверстием расположен экран. Что будет происходить с интенсивностью в центре наблюдаемой на экране дифракционной картины, если экран удалять от преграды?

3. Свет от удаленного монохроматического точечного источника падает на круглый небольшой непрозрачный диск или шарик. На расстоянии  $Z$  от него находится экран. Расстояние  $Z$  велико по сравнению с диаметром диска или шарика, так что последний закрывает лишь несколько зон Френеля. Возможно ли, чтобы в таких условиях в центре геометрической тени, полученной на экране, наблюдалось светлое пятно?



## 1.6. Дифракция плоской волны на периодической структуре

Явление дифракции параллельных пучков света можно наблюдать не только на малых отверстиях, но и на специально изготовленных дифракционных решетках. В этом случае дифракционная картина также представляет собой чередующиеся светлые и темные пятна, но выглядит намного более яркой и наглядной, так как максимумы и минимумы располагаются на гораздо больших расстояниях друг от друга.

*Дифракционная решётка* – совокупность большого числа регулярно расположенных штрихов (канавок, щелей, выступов), нанесённых на плоскую или сферическую поверхность. Существуют различные виды дифракционных решеток. В большинстве случаев световые волны испытывают дифракцию при прохождении дифракционной решетки, но существуют и такие дифракционные решетки, в которых дифракционная картина наблюдается при отражении световых волн. Так, радужная окраска, возникающая при освещении белым светом компьютерного CD-диска, объясняется дифракцией отраженного от диска света. В качестве дифракционной решетки в этом случае следует рассматривать миниатюрные канавки на поверхности диска. Качество дифракционных решеток определяется числом штрихов (непрозрачных частей) на миллиметр длины решетки. Чем больше штрихов приходится на 1 мм длины решетки, тем качественнее будет дифракционная картина, полученная с ее помощью. Важной характеристикой дифракционной решетки является период дифракционной решетки.

*Период дифракционной решётки* – наименьшая часть решётки, перемещая которую, можно воспроизвести всю решётку. Для плоской одномерной дифракционной решётки длина периода равна

$$d = b + h.$$

где  $b$  – ширина отверстия,  $h$  – ширина штриха (рис. 8). Величина периода дифракционной решётки связана с числом нанесённых на неё штрихов соотношением

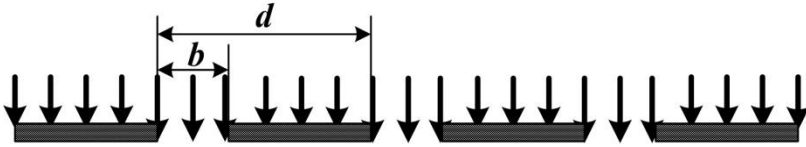


Рис. 8. Плоская волна падает на дифракционную решетку

$$d = \frac{1}{N},$$

где  $N$  – число штрихов, приходящихся на единицу длины решетки. На рис. 8 изображен фрагмент дифракционной решетки, с помощью которой можно наблюдать дифракцию проходящих световых волн.

Сформулируем задачу, которую нам предстоит решить. На дифракционную решётку падает плоская монохроматическая световая волна (волновой фронт – плоскость). Известна длина волны  $\lambda$ , размер отверстий  $b$ , период решётки  $d$ , расстояние до экрана  $L$ . Требуется определить, как распределена интенсивность излучения по направлениям или на экране.

Чтобы решить поставленную задачу, нам необходимо просуммировать вклады в интенсивность результирующей волны, исходящей из всех точечных источников, расположенных во всех щелях дифракционной решётки. Вся процедура вывода формулы для интенсивности излучения в зависимости от направления можно разделить на четыре этапа. Во-первых, нам нужно будет записать уравнение волны, излучаемой одним точечным источником. Во-вторых, записать уравнение волны, излучаемой всеми точечными источниками одной щели. В-третьих, записать уравнение волны, излучаемой всеми щелями дифракционной решётки. И, наконец, в-четвертых, нам нужно будет получить и исследовать выражение для суммарной интенсивности излучения по заданному направлению.

На рис. 9 показана часть плоской дифракционной решетки, на которую падает плоская волна. Ось  $OX$  направлена вдоль решетки,  $dx$  – длина произвольного элементарного отрезка

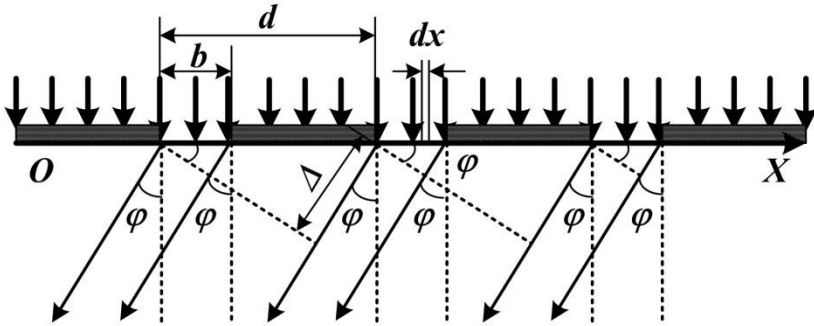


Рис. 9. К выводу формулы распределения интенсивности излучения при дифракции на решетке

волнового фронта, лежащего внутри одного из отверстий решетки. Такой элементарный отрезок будем считать точечным источником волн. Рассмотрим волны, излучаемые всеми точечными источниками в произвольном направлении, составляющем угол  $\varphi$  с перпендикуляром к решетке. На рисунке  $b$  – ширина отверстия решетки,  $d$  – период решетки,  $\Delta$  – разность хода между лучами, исходящими из двух соседних отверстий решетки в направлении, определяемом углом  $\varphi$ .

**Уравнение волны, излучаемой одним произвольным точечным источником.** От элемента  $dx$ , расположенного в щели номер  $n$  в направлении, определяемом углом  $\varphi$ , распространяется волна. Волна, исходящая из элемента  $dx$ , расположенного в щели номер  $n$ , запаздывает по сравнению с волной, вышедшей из крайней левой щели, из точки с координатой  $x = 0$ . Запаздывание связано с тем, что волна из отверстия номер  $n$  должна пройти дополнительное расстояние по сравнению с волной, исходящей из крайнего левого отверстия. Разность хода между волнами, исходящими из крайней левой точки одного отверстия и произвольной точки в соседнем отверстии (рис. 9) равна

$$L = (d + x) \sin \varphi.$$

Разность хода между волнами, исходящими из крайней левой точки решетки и произвольной точки в отверстии номер  $n$  равна

$$L = ((n-1)d + x) \sin \varphi.$$

Поэтому фаза волны исходящей из элемента  $dx$ , расположенного в щели номер  $n$ , отличается от фазы волны, вышедшей из точки  $x = 0$ , на величину

$$\Delta\varphi = k((n-1)d + x) \sin \varphi.$$

$x$  – координата элемента  $dx$ , относительно начала щели.

Пусть  $E_0$  – амплитуда волны, испущенной из всего отверстия номер  $n$  в рассматриваемом направлении, тогда амплитуда волны, испущенной с участка  $dx$  равна

$$E_{0x} = \frac{E_0}{b} dx.$$

Уравнение волны, испущенной с участка  $dx$  в рассматриваемом направлении можно записать так

$$dE_\varphi = \frac{E_0}{b} e^{i(\omega t - (k(n-1)d + x) \sin \varphi)} dx. \quad (1.10)$$

**Уравнение волны, излучаемой всеми точечными источниками одной щели.** Эта волна есть сумма волн, идущих от точечных источников, принадлежащих одной щели номер  $n$ . Интегрирование проведем в пределах от 0 до  $b$ , что соответствует суммированию волн, исходящих от источников, расположенных в одной щели.

$$\begin{aligned} E_{n\varphi} &= \int_0^b dE_\varphi = \frac{E_0}{b} \int_0^b e^{i(\omega t - (k(n-1)d + x) \sin \varphi)} dx = \\ &= \frac{E_0}{b} e^{i(\omega t - k(n-1)d \sin \varphi)} \int_0^b e^{-ikx \sin \varphi} dx = \\ &= \frac{E_0}{b} e^{i(\omega t - k(n-1)d \sin \varphi)} \frac{e^{-ikb \sin \varphi} - 1}{-ik \sin \varphi}. \end{aligned}$$

Преобразуем полученное выражение к симметричной, а затем и к действительной форме записи, которая более удобна для анализа полученного результата.

$$\begin{aligned} \frac{e^{-ikb\sin\varphi} - 1}{-ikb\sin\varphi} &= \frac{e^{-ik\frac{b}{2}\sin\varphi} - e^{+ik\frac{b}{2}\sin\varphi}}{-2ik\frac{b}{2}\sin\varphi} e^{-ik\frac{b}{2}\sin\varphi} = \\ &= \frac{e^{-ik\frac{b}{2}\sin\varphi} e^{-ik\frac{b}{2}\sin\varphi} - e^{-ik\frac{b}{2}\sin\varphi} e^{+ik\frac{b}{2}\sin\varphi}}{-ikb\sin\varphi} = \frac{e^{-iu} - e^{+iu}}{-2iu} e^{-iu} = \\ &= \frac{\sin u}{u} e^{-ik\frac{b}{2}\sin\varphi}, \end{aligned}$$

где мы ввели обозначение (1.7), уже использовавшееся ранее,

$$u = k \frac{b}{2} \sin \varphi.$$

Уравнение волны, излучаемой всеми точечными источниками одной щели можно теперь записать так:

$$E_{n\varphi} = E_0 \frac{\sin u}{u} e^{-k(n-1)d\sin\varphi} e^{i\left(\omega t - k\frac{b}{2}\sin\varphi\right)}. \quad (1.11)$$

Формула (1.11) описывает напряженность электрического поля плоской волны, излученной всем отверстием номер  $n$  в направлении, определяемом углом  $\varphi$ .

**Уравнение волны, излучаемой в заданном направлении всеми точечными источниками всех щелей.** Такая волна представляет собой суперпозицию волн, идущих от всех щелей. Обозначим амплитуду такой волны  $E_\varphi$ . Здесь  $n$  – номер щели,  $N$  – полное число щелей дифракционной решётки.

$$E_\varphi = \sum_{n=1}^N E_{n\varphi} = \sum_{n=1}^N E_0 \frac{\sin u}{u} e^{-k(n-1)d\sin\varphi} e^{i\left(\omega t - k\frac{b}{2}\sin\varphi\right)}.$$

$$E_\varphi = E_0 \frac{\sin u}{u} e^{i\left(\omega t - k \frac{b}{2} \sin \varphi\right)} \sum_{n=1}^N e^{-k(n-1)d \sin \varphi}.$$

Вычислим отдельно сумму, входящую в эту формулу.

$$S_N = \sum_{n=1}^N e^{-k(n-1)d \sin \varphi}.$$

Для этого сначала вспомним, что волновое число  $k$  можно выразить через длину волны  $\lambda$ :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

Выражение, стоящее в показателе экспоненты, запишем теперь так:

$$kd(n-1)\sin \varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\sin \varphi,$$

Введём обозначение:

$$\delta = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi. \quad (1.12)$$

Тогда

$$S_N = \sum_{n=1}^N e^{-k(n-1)d \sin \varphi} = \sum_{n=1}^N e^{-2\delta(n-1)}.$$

Перепишем выражение для суммы в явном виде

$$S_N = \sum_{n=1}^N e^{-2\delta(n-1)} = 1 + e^{-2i\delta} + e^{-4i\delta} + e^{-6i\delta} + \dots + e^{-2(N-1)\delta}.$$

Как видно из последней формулы,  $S_N$  – частичная сумма геометрической прогрессии. Знаменатель этой прогрессии

$$q = e^{-2i\delta}. \quad (1.13)$$

Частичная сумма геометрической прогрессии со знаменателем  $q$  вычисляется по формуле

$$S_N = \frac{1 - q^N}{1 - q}. \quad (1.14)$$

Подставим в (1.14) выражение для знаменателя прогрессии (1.13) и получим

$$S_N = \frac{1 - e^{-2i\delta N}}{1 - e^{-2i\delta}}.$$

Таким образом, уравнение волны, излучаемой всеми точечными источниками всех щелей в направлении, определяемом углом  $\varphi$

$$E_\varphi = E_0 \frac{\sin u}{u} \frac{1 - e^{-2i\delta N}}{1 - e^{-2i\delta}} e^{i\left(\omega t - k \frac{b}{2} \sin \varphi\right)}. \quad (1.15)$$

Отметим, что для вычисления напряженности электрического поля волны, исходящей из всех отверстий решетки мы вычислили сумму напряженностей волн, исходящих из  $N$  щелей. Число  $N$  хотя и большое число, но конечное. Процедура вычисления этой суммы отличается от той, что мы применяли для суммирования вкладов от волн, исходящих из отдельных точек волнового фронта, принадлежащих одному отверстию. Точек-источников волн в отверстии бесконечно много, и применяя принцип Гюйгенса-Френеля, мы вычисляли интеграл по всей длине отверстия. В данном случае вместо интеграла пришлось вычислять частичную сумму геометрической прогрессии. Эти математические различия отражают важный факт: суммируя вклады от различных отверстий решетки, мы имеем дело не с явлением дифракции, а с явлением *многолучевой интерференции* волн, исходящих из различных щелей решетки.

Интенсивность излучения, испущенного из всей решётки в рассматриваемом направлении, определяется квадратом амплитуды

$$I \sim |E|^2,$$

$$I_\varphi \sim |E_\varphi|^2 = \left| E_0 \frac{\sin u}{u} \frac{1 - e^{-2i\delta N}}{1 - e^{-2i\delta}} e^{i\left(\omega t - k \frac{b}{2} \sin \varphi\right)} \right|^2.$$

Вычислим квадрат модуля комплексного числа, входящего в формулу (1.15) для напряженности электрического поля

волны, испускаемой всей решеткой в направлении, определяемом углом  $\varphi$ :

$$\left| \frac{1 - e^{-2i\delta N}}{1 - e^{-2i\delta}} \right|^2 = \frac{(1 - e^{-2i\delta N})(1 - e^{2i\delta N})}{(1 - e^{-2i\delta})(1 - e^{2i\delta})} = \frac{1 - e^{-2i\delta N} - e^{2i\delta N} + 1}{1 - e^{-2i\delta} - e^{2i\delta} + 1}.$$

Числитель:

$$\begin{aligned} 1 - e^{-2i\delta N} - e^{2i\delta N} + 1 &= 2 - 2(e^{-2i\delta N} - e^{2i\delta N}) = \\ &= 2(1 - \cos(2N\delta)) = 2 \cdot 2 \sin^2\left(\frac{2N\delta}{2}\right) = 4 \sin^2(N\delta). \end{aligned}$$

Знаменатель:

$$\begin{aligned} 1 - e^{-2i\delta} - e^{2i\delta} + 1 &= 2 - 2(e^{-2i\delta} - e^{2i\delta}) = \\ &= 2(1 - \cos(2\delta)) = 2 \cdot 2 \sin^2\left(\frac{2\delta}{2}\right) = 4 \sin^2(\delta). \end{aligned}$$

$$\left| \frac{1 - e^{-2i\delta N}}{1 - e^{-2i\delta}} \right|^2 = \frac{4 \sin^2(N\delta)}{4 \sin^2(\delta)} = \frac{\sin^2(N\delta)}{\sin^2(\delta)}.$$

Теперь мы можем записать уравнение, определяющее распределение интенсивности излучения от решетки по направлениям:

$$I = I_0 \frac{\sin^2 u}{u^2} \frac{\sin^2(N\delta)}{\sin^2(\delta)}. \quad (1.16)$$

где

$$\delta = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi, \quad u = \frac{\pi}{\lambda} b \sin \varphi.$$

В формуле (1.16) функция  $\frac{\sin^2 u}{u^2}$  характеризует распределение интенсивности излучения в результате дифракции на одной щели. Функция  $\frac{\sin^2(N\delta)}{\sin^2(\delta)}$  характеризует распределение

интенсивности излучения в результате интерференции пучков, исходящих из различных щелей. Рассмотрим поведение этих



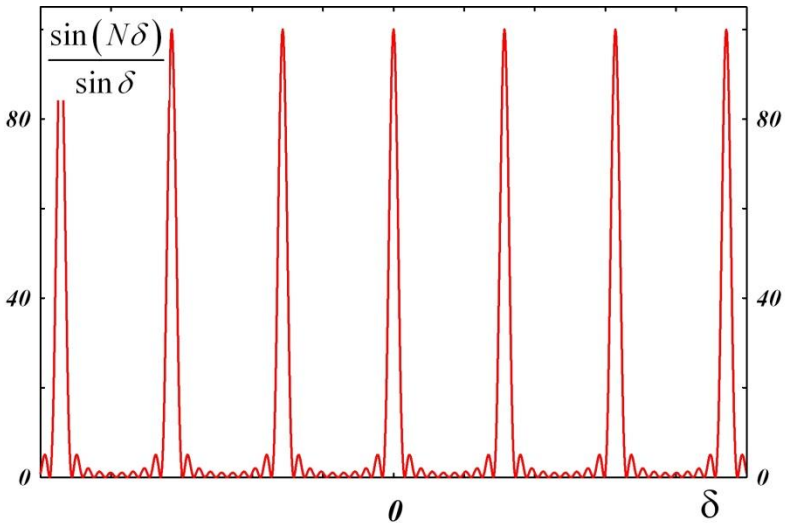


Рис. 10. Распределение интенсивности по направлениям в результате многолучевой интерференции

функций при различных значениях их аргументов  $u$  и  $\delta$ . В конечном счете, величины этих аргументов согласно формулам (1.7) и (1.12) определяются значениями угла дифракции  $\varphi$ .

Начнем с первой функции в формуле (1.16):

$$I_{1\varphi} = \frac{\sin^2 u}{u^2}.$$

Эта функция описывает распределение интенсивности излучения в результате дифракции света на одном отверстии. Поведение этой функции при различных значениях аргумента  $u$  было исследовано при рассмотрении вопроса о дифракции на отверстии (см. параграф 1.5). График функции приведен на рис. 7. Она имеет *максимумы* при

$$b \sin \varphi = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (1.17)$$

и *минимумы* при

$$b \sin \varphi = m\lambda. \quad (1.18)$$

Рассмотрим поведение функции, описывающей результаты интерференции пучков, исходящих из различных отверстий,

$$I_{2\varphi} = \left( \frac{\sin(N\delta)}{\sin(\delta)} \right)^2. \quad (1.19)$$

Из математического анализа известно, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sin(N\delta)}{\sin(\delta)} = N.$$

Величины  $\sin(\delta)$  и  $\sin(N\delta)$  в формуле (1.19) стремятся к нулю при  $\delta = m\pi$ , ( $m$  – целое число). Эти значения являются максимумами функции  $I_{2\varphi}$ . При  $\delta \rightarrow 0$   $I_{2\varphi} = N^2$ , где  $N$  – число щелей дифракционной решётки, которое обычно очень велико. График зависимости  $I_{2\varphi}$  от аргумента  $\delta$  приведен на рис. 10. Определим значения углов дифракции  $\varphi$ , соответствующие этим значениям аргумента  $\delta$ . Эти значения  $\varphi$  будут соответствовать максимумам освещенности при дифракции на решетке. Согласно принятому ранее обозначению (1.12)

$$\delta = \frac{\pi}{\lambda} d \sin \varphi = m\pi,$$

где  $m$  – целое число. Отсюда

$$d \sin \varphi = m\lambda. \quad (1.20)$$

Максимумы интенсивности излучения, возникающие при выполнении условия (1.20) называются *главными максимумами*. Остальные максимумы интенсивности излучения (см. рис. 10) называются *побочными максимумами*. Побочные максимумы возникают, когда  $\sin(N\delta) \rightarrow 0$ , но, в то же время  $\sin(\delta) \neq 0$ .

Перечислим условия наблюдения всех максимумов. Условия наблюдения главных максимумов выделены жирным шрифтом:

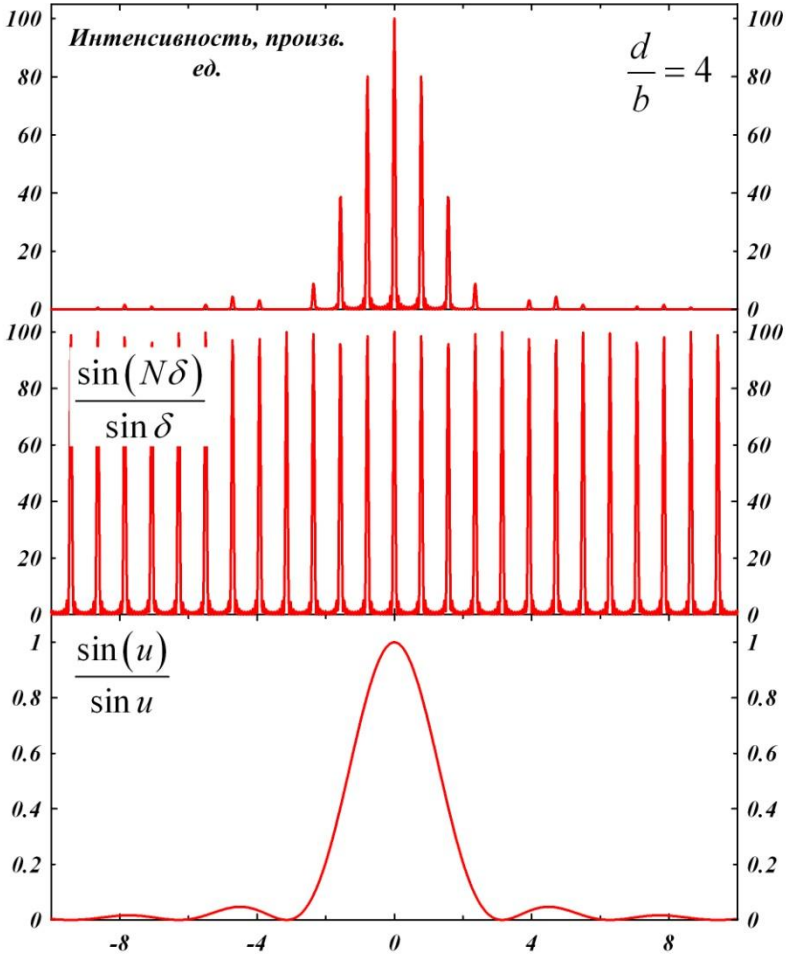


Рис. 11. Распределение интенсивности по направлениям при дифракции на решетке

$N\delta = 0, \pi, 2\pi, \dots, (N-1)\pi, N\pi, (N+1)\pi, \dots, (2N-1)\pi, 2N\pi, (2N+1)\pi, \dots$

Результирующая интенсивность является произведением двух функций:

$$I = I_0 = \frac{\sin^2 u}{u^2} \frac{\sin^2(N\delta)}{\sin^2(\delta)}.$$

На рис. 11 показаны графики зависимостей функций  $I_{1\varphi}$  и  $I_{2\varphi}$  от аргумента  $\delta$  для соотношения между периодом дифракционной решетки и шириной щели  $d = 4b$ . Верхний график показывает зависимость результирующей интенсивности излучения после дифракции на дифракционной решетке, средний и нижний графики показывают, как изменяются  $I_{1\varphi}$  и  $I_{2\varphi}$  в формуле (1.16) в зависимости от  $\delta$  для случая  $d = 4b$ . Как видно из рисунка, положение главных максимумов определяется функцией  $I_{2\varphi}$ , которая описывает результат многолучевой интерференции пучков, исходящих из различных отверстий решетки. Интенсивность излучения в главных максимумах определяется функцией  $I_{1\varphi}$ , которая описывает процесс дифракции на одном отверстии. Положение главных дифракционных максимумов при дифракции света на решетке определяется формулой (1.20).

### ***Краткие выводы***

1. Распределение интенсивности излучения при дифракции монохроматической волны на периодической структуре можно представить, как результат двух процессов: 1) дифракции волны на отверстиях, 2) интерференции пучков, исходящих из всех отверстий.

2. Положение главных дифракционных максимумов определяется интерференцией пучков, исходящих из разных отверстий решётки. Условие наблюдения главных максимумов  $d \sin \varphi = m\lambda$ .

3. Интенсивность главных максимумов определяется как процессом дифракции на отдельном отверстии, так и процессом интерференции волн, исходящих из всех отверстий.

### **Контрольные вопросы**

1. Запишите формулу, из которой можно найти, под каким углом наблюдается дифракционный минимум порядка  $m$  при

дифракции Фраунгофера на отверстиях? Диаметр отверстия равен  $b$ . Длина волны излучения  $\lambda$ .

2. Пусть  $N$  – число штрихов дифракционной решетки, приходящееся на 1 мм ее длины. Как найти период  $d$  этой дифракционной решетки?

3. Какие физические процессы определяют распределение интенсивности, наблюдаемое в результате дифракции Фраунгофера на периодической структуре (решетке)?

4. Какой физический процесс определяет положение главных максимумов освещенности, наблюдаемое в результате дифракции Фраунгофера на периодической структуре?

5. Запишите формулу, из которой можно найти, под каким углом наблюдается главный дифракционный максимум порядка  $m$  при дифракции Фраунгофера на решетке. Период решетки равен  $d$ . Длина волны излучения  $\lambda$ .

6. Запишите формулу, из которой можно найти, под каким углом наблюдается главный дифракционный минимум порядка  $m$  при дифракции Фраунгофера на решетке. Период решетки равен  $d$ . Длина волны излучения  $\lambda$ .

7. Укажите порядки главных максимумов, которые не могут наблюдаться на дифракционной решетке с периодом 12 мкм и шириной одной щели 4 мкм.

## **1.7. Дифракция сферических волн (дифракция Френеля).**

### **Постановка задачи**

Рассмотрим теперь случай, когда на преграду с небольшим отверстием падает сферическая волна, исходящая из точечного источника  $S$  (рис. 12). Напомним, что такая волна называется сферической потому, что ее волновой фронт имеет форму сферы. Сферами являются также все волновые поверхности.

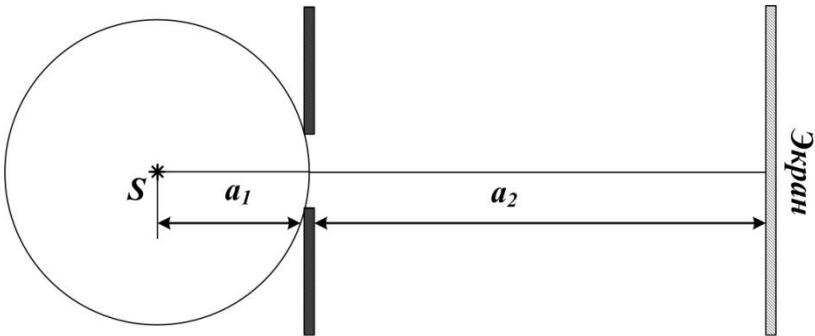


Рис. 12. Сферическая волна падает на малое отверстие

Одна из таких поверхностей показана на рисунке. Известна длина волны  $\lambda$ , размер отверстия  $b$  и расстояние от источника до преграды (отверстия)  $a_1$  и расстояние от преграды до экрана  $a_2$ . Требуется определить, как распределена интенсивность излучения по направлениям, как распределяется освещенность экрана.

Согласно принципу Гюйгенса – Френеля будем считать каждую точку волнового фронта источником волн, в которых колебания происходят с той же частотой, что и в исходной волне и распространяются с той же скоростью, что исходная волна. Интенсивность излучения пропорциональна квадрату амплитуды колебаний напряженности электрического поля в волне. Для того чтобы определить напряженность электрического поля волны в произвольной точке экрана, необходимо просуммировать вклады в эту напряженность от волн, исходящих от всех точечных источников открытой части волнового фронта, учитывая, что колебания напряженности поля в этих волнах происходят в различных фазах.

Точный расчет интенсивности излучения в случае дифракции сферической волны математически сложен. Поэтому мы ограничимся качественным объяснением дифракционных явлений с применением метода зон Френеля. Для решения

поставленной задачи, во-первых, запишем уравнение волны, излучаемой каждой точкой открытой части волнового фронта, во вторых, разделим открытую часть волнового фронта на зоны Френеля, и в третьих, просуммируем вклады от всех зон Френеля в интенсивность излучения в точке наблюдения.

### Контрольные вопросы

1. В чем состоит различие в условиях наблюдения дифракции Фраунгофера и дифракции Френеля?
2. При каких условиях дифракцию волн от точечного источника можно рассматривать, как дифракцию плоской волны?
3. Можно ли наблюдать дифракцию Френеля от отверстия радиусом около 1 мм при освещении его солнечным светом? Как изменится ответ, если радиус отверстия примерно 1 см? Обоснуйте ваш ответ.

### 1.8. Уравнение волны, исходящей из одного точечного источника на сферической поверхности

На рис. 13  $S$  – точечный источник сферических волн. К моменту времени  $t = \tau$  фронт волны представляет собой сферическую поверхность  $\sigma$ ;  $d\sigma$  – элемент этой сферической поверхности, который в дальнейшем мы будем считать источником вторичных волн;  $\vec{n}$  – вектор нормали к элементу сферической поверхности  $d\sigma$ ;  $\psi$  – угол между вектором нормали к элементу поверхности  $d\sigma$  и направлением на точку наблюдения. Точка наблюдения  $P$  находится на экране, а  $r$  – расстояние от элемента  $d\sigma$  до точки наблюдения.

В общем случае уравнение сферической волны можно записать так

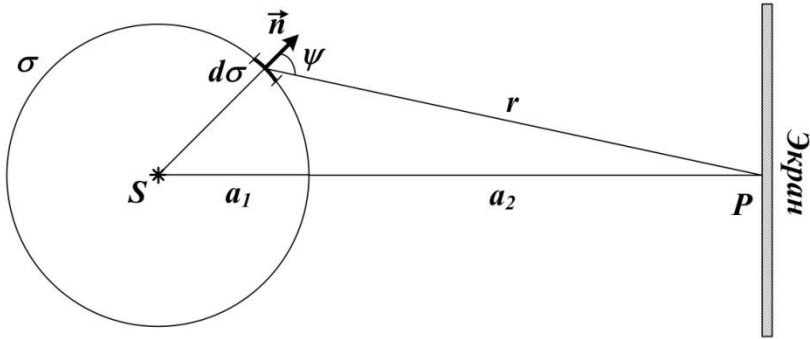


Рис. 13. К выводу уравнения волны, излучаемой одной точкой сферического волнового фронта

$$E = E'_0 \frac{e^{i(\omega t - kr + \alpha)}}{r}.$$

$E'_0$  – амплитуда сферической волны, исходящей из источника  $S$ . Пусть начальная фаза колебаний волны, испускаемой источником  $S$ , равна нулю. Тогда запаздывание по фазе колебаний на сферической поверхности  $\sigma$  по сравнению с колебаниями в источнике составит  $\delta\alpha = ka_1$ . В этом случае для колебаний, происходящих на поверхности  $\sigma$ , можно записать

$$E = E'_0 \frac{e^{i(\omega t + ka_1)}}{a_1} = E'_0 \frac{e^{ika_1}}{a_1} e^{i\omega t}.$$

Обозначим

$$E_{0\sigma} = E'_0 \frac{e^{ika_1}}{a_1}. \quad (1.21)$$

Величина  $E_0$  не зависит от времени и одинакова по всей поверхности  $\sigma$ . Поэтому ее можно считать амплитудой колебаний напряженности электрического поля в световой волне на поверхности  $\sigma$ .



Уравнение сферической волны, исходящей из точечного источника на поверхности  $\sigma$  запишем так:

$$dE = K(\psi) E_{0\sigma} \frac{e^{ikr}}{r} e^{i\omega t} d\sigma. \quad (1.22)$$

Здесь  $E_{0\sigma}$  – амплитуда волны, излучаемой с элемента поверхности  $\sigma$ . Коэффициент  $K(\psi)$  определяет зависимость амплитуды колебаний волны от направления, то есть от угла  $\psi$  (рис.13). При этом коэффициент  $K(\psi)$  достигает наибольшего значения  $K(\psi) = K_{max}$  при совпадении направлений вектора нормали с направлением на точку наблюдения.  $K(\psi) = 0$  при  $\psi \geq \pi/2$ . Это означает, что мы не рассматриваем волны, распространяющиеся внутрь поверхности  $\sigma$ .

Согласно принципу суперпозиции суммарная напряжённость электрического поля в волне, исходящей из всех точечных источников на поверхности  $\sigma$  равна сумме напряженностей поля волн, исходящих из каждого точечного источника. Для того чтобы найти эту сумму, нужно вычислить интеграл по сферической поверхности  $\sigma$

$$E(P) = \iint_{\sigma} K(\psi) E_0' \left[ \frac{e^{ika_1}}{a_1} \right] \frac{e^{ikr}}{r} e^{i\omega t} d\sigma.$$

Непосредственно вычислять такой интеграл непросто, поэтому для объяснения наблюдаемых явлений дифракции сферических волн воспользуемся методом зон Френеля. Разобьем поверхность  $\sigma$  на зоны Френеля, то есть на такие участки, что из двух соседних участков в точку наблюдения волны приходят с разностью фаз, равной  $\pi$ , или с разностью хода  $\lambda/2$ . Затем вычислим вклады от каждой из зон Френеля и, просуммировав эти вклады, найдем напряженность электрического поля в точке наблюдения  $P$ . Зная распределение напряженности электрического поля волны по направлениям,

мы сможем сделать выводы о распределении интенсивности излучения.

### Контрольные вопросы

1. Запишите уравнение сферической волны.
2. Как определить суммарную напряженность электрического поля в точке наблюдения, если на отверстие падает сферическая волна? Как определить интенсивность излучения в точке наблюдения?
3. Почему коэффициент  $K(\psi)$  в формуле (1.22) принимает максимальное значение, равное единице при  $\psi = 0$  и минимальное значение, равное нулю при  $\psi = \pi/2$ ?

### 1.9. Разбиение сферического волнового фронта на зоны Френеля

Для того чтобы вычислить напряженность электрического поля световой волны в точке наблюдения  $P$ , разобьём весь волновой фронт на зоны Френеля, исходя из условия, что волны из двух соседних зон приходят в точку наблюдения с разностью хода  $\lambda/2$ . На рис. 14 радиус волнового фронта равен  $a_1$ , расстояние от центральной зоны Френеля до точки наблюдения равно  $a_2$ . Расстояния до точки наблюдения от зон Френеля с номерами  $m = 1, 2, 3, \dots$  обозначены  $r_m$ . При этом выполняются условия

$$r_1 = |N_1 P| = a_2 + \frac{\lambda}{2};$$

$$r_2 = |N_2 P| = a_2 + 2 \frac{\lambda}{2};$$

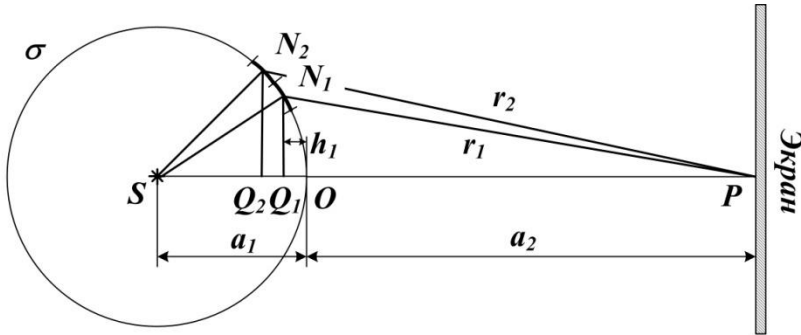


Рис. 14. Разбиение сферического волнового фронта на зоны Френеля

$$r_m = |N_m P| = a_2 + m \frac{\lambda}{2}.$$

Центральная зона Френеля представляет собой сферический сегмент с вершиной в точке  $O$ . Остальные зоны представляют собой кольца на сферической поверхности (рис. 15). Радиус первой зоны Френеля  $R_1 = |N_1 Q_1|$ , радиус второй зоны  $R_2 = |N_2 Q_2|$ , и так далее.

Для того чтобы понять, сколько зон Френеля укладывается в открытой части волнового фронта, то есть в круглом отверстии, нужно знать радиусы зон Френеля. Удобно было бы выразить их через исходные параметры эксперимента – расстояние от источника до преграды  $a_1$ , расстояние от преграды до экрана  $a_2$  и радиус отверстия  $b$ . Кроме того, площади зон Френеля должны быть одинаковыми, чтобы в каждой зоне укладывалось одинаковое число источников. Выразим радиусы зон через исходные параметры и проверим, выполняется ли условие равенства площадей зон.

Найдем радиус зоны Френеля на примере первой зоны. Радиус первой зоны обозначим  $R_1$ . Чтобы определить этот

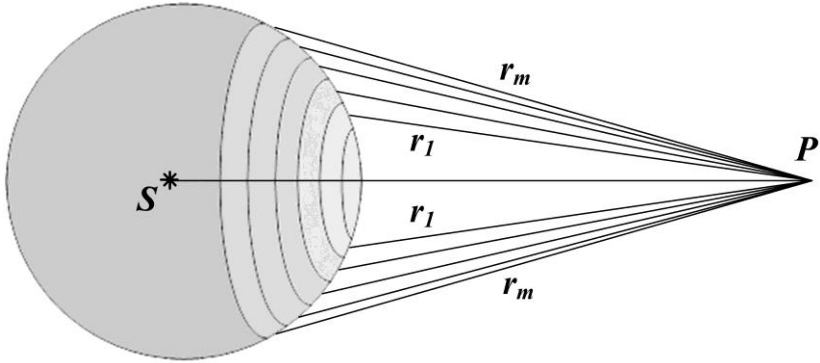


Рис.15. Форма зон Френеля сферического волнового фронта радиус, нужно знать высоту сферического сегмента (рис. 14). Высота сферического сегмента для первой зоны

$$h_1 = |OQ_1|.$$

На рис. 14  $R_1 = |N_1Q_1|$ . Согласно теореме Пифагора для прямоугольных треугольников  $SN_1Q_1$  и  $PN_1Q_1$  получаем:

$$\begin{cases} |N_1Q_1|^2 = |SN_1|^2 - |SQ_1|^2, \\ |N_1Q_1|^2 = |N_1P|^2 - |Q_1P|^2. \end{cases}$$

Согласно рис. 14  $|SN_1| = a_1$ ,  $|SQ_1| = a_1 + \frac{\lambda}{2}$ ,  $|Q_1P| = a_2 + h_1$ ,

$|N_1P| = r_1 = a_2 + \frac{\lambda}{2}$ . Для зоны номер один можно записать систему уравнений

$$\begin{cases} R_1^2 = a_1^2 - (a_1 - h_1)^2, \\ R_1^2 = \left(a_2 + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (a_2 + h_1)^2. \end{cases}$$

Для зоны Френеля номер  $m$  можно записать аналогичную систему уравнений

$$\begin{cases} R_m^2 = a_1^2 - (a_1 - h_m)^2, \\ R_m^2 = \left(a_2 + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (a_2 + h_m)^2. \end{cases}$$

Решим эту систему уравнений, найдем радиус зоны Френеля  $R_m$ . Приравняем правые части уравнений системы

$$a_1^2 - (a_1 - h_m)^2 = \left(a_2 + m \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (a_2 + h_m)^2.$$

Раскроем скобки, приведем подобные

$$2a_1h_m = 2a_2m \frac{\lambda}{2} + m^2 \frac{\lambda^2}{4} - 2a_2h_m.$$

Длина волны света  $\lambda$  составляет величину порядка  $10^{-7}$  м. Пренебрежём малой величиной порядка  $\lambda^2$ :

$$2a_1h = a_2m\lambda - 2a_2h;$$

Отсюда высота сферического сегмента

$$h_m = \frac{a_2m\lambda}{2(a_1 + a_2)}.$$

Теперь определим радиус зоны Френеля номер  $m$ :

$$R_m^2 = a_1^2 - (a_1 - h_m)^2,$$

$$R_m^2 = a_1^2 - (a_1 - h_m)^2 = a_1^2 - a_1^2 + 2a_1h_m - h_m^2 = 2a_1h_m - h_m^2.$$

Отсюда,

$$R_m^2 = 2a_1h_m - h_m^2,$$

$$h_m = \frac{a_2m\lambda}{2(a_1 + a_2)}.$$

После подстановки полученного выражения в формулу для  $R_m^2$  получим

$$R_m^2 = 2a_1 \frac{a_2 m \lambda}{2(a_1 + a_2)} - \frac{a_2^2 m^2 \lambda^2}{4(a_1 + a_2)^2},$$

Помня о том, что длина волны света  $\lambda$  – величина малая, пренебрежём малой величиной порядка  $\lambda^2$  и получим формулу для вычисления радиуса зоны Френеля номер  $m$ :

$$R_m = \sqrt{\frac{a_1 a_2}{(a_1 + a_2)}} m \lambda. \quad (1.23)$$

Согласно определению площади зон Френеля должны быть равны. Проверим, выполняется ли это условие. Площадь зоны Френеля номер  $m$  равна разности площадей двух сферических сегментов (рис. 15). Площадь сферического сегмента равна

$$\Omega = 2\pi R h,$$

где  $R$  – радиус сегмента,  $h$  – высота сегмента. Для сферического сегмента, включающего  $m$  зон Френеля  $R = a_1$ ,  $h = h_m$  и поэтому

$$\Omega_m = 2\pi a_1 h_m = \frac{2\pi a_1 a_2 m \lambda}{2(a_1 + a_2)} = \frac{\pi a_1 a_2}{(a_1 + a_2)} m \lambda.$$

Площадь зоны Френеля номер  $m$ :

$$S_m = \Omega_m - \Omega_{m-1} = \frac{\pi a_1 a_2}{(a_1 + a_2)} \lambda [m - (m-1)] = \frac{\pi a_1 a_2 \lambda}{(a_1 + a_2)}.$$

$$S_m = \frac{\pi a_1 a_2 \lambda}{(a_1 + a_2)}. \quad (1.24)$$

Как видно из (1.24), площади зон Френеля не зависят от номера зоны  $m$ , следовательно, они равны. При выводе этой формулы мы пренебрегали слагаемыми, пропорциональными  $\lambda^2$ . Поэтому условие равенства площадей зон Френеля выполняется для не слишком больших номеров зон  $m$ , таких, что  $m^2 \lambda^2 \rightarrow 0$ .

Напомним, что формула для радиусов зон Френеля справедлива при выполнении этого же условия.

**Выводы:**

1. В случае дифракции сферической световой волны на отверстии радиусы зон Френеля можно определить по формуле:

$$R_m = \sqrt{\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}} m \lambda,$$

где  $a_1$  – расстояние от источника света до преграды,  $a_2$  – расстояние от отверстия до экрана,  $\lambda$  – длина волны света,  $m$  – номер зоны.

2. Площади зон Френеля равны для не очень больших номеров зон  $m$ .

3. Формула для вычисления радиусов зон Френеля и утверждение о равенстве площадей зон Френеля выполняются только для волн малой длины ( $\lambda \ll a_1$ ,  $\lambda \ll a_2$ ).

**Контрольные вопросы**

1. Как зависит от номера зоны Френеля ее площадь в случае дифракции сферических волн (дифракции Френеля)? Длина волны излучения  $\lambda$ . Расстояние от источника до преграды  $a_1$ , от преграды до экрана  $a_2$ .

2. Как зависит от номера зоны Френеля ее площадь в случае дифракции плоских волн (дифракции Фраунгофера)? Длина волны излучения  $\lambda$ . Расстояние от источника до преграды  $a_1$ , от преграды до экрана  $a_2$ .

3. Как зависит радиус зоны Френеля от ее номера в случае дифракции сферических волн (дифракции Френеля)? Длина волны излучения  $\lambda$ . Расстояние от источника до преграды  $a_1$ , от преграды до экрана  $a_2$ .

4. Как зависит радиус зоны Френеля от ее номера в случае дифракции плоских волн (дифракции Фраунгофера)? Длина волны излучения  $\lambda$ . Расстояние от источника до преграды  $a_1$ , от преграды до экрана  $a_2$ .

5. Какие приближения были использованы при выводе формул радиусов зон Френеля и площадей зон Френеля в случае дифракции сферической волны на отверстии? Какие ограничения на применение этих формул накладывает применение таких приближений?

### 1.10. Определение амплитуды колебаний напряженности электрического поля при дифракции сферической волны на отверстии

Суммарная напряжённость электрического поля в волне, исходящей из всех точечных источников на поверхности  $\sigma$  (или её участка  $\sigma_1$ ):

$$E(P) = \iint_{\sigma} K(\psi) E'_0 \left[ \frac{e^{ika_1}}{a_1} \right] \frac{e^{ikr}}{r} e^{i\omega t} d\sigma. \quad (1.25)$$

Интенсивность излучения в точке наблюдения  $P$  пропорциональна квадрату напряжённости электрического поля:

$$I \sim E^2(P) = \left| \iint_{\sigma} K(\psi) E'_0 \left[ \frac{e^{ika_1}}{a_1} \right] \frac{e^{ikr}}{r} e^{i\omega t} d\sigma \right|^2.$$

Для того чтобы вычислить этот интеграл, мы вслед за Френелем разделили волновой фронт на зоны, из которых волны в точку наблюдения приходят с разностью хода в  $\lambda/2$ .

Приступаем к вычислению интеграла (1.25). Определим элемент поверхности  $d\sigma$ . В рассматриваемом случае (рис. 14)

$$d\sigma = a_1^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (1.26)$$

Из треугольника  $SNP$  (рис. 14) по теореме косинусов:



$$r^2 = (a_1 + a_2)^2 + a_1^2 - 2a_1(a_1 + a_2)\cos\vartheta,$$

где  $r$  – расстояние от волнового фронта до точки наблюдения. Для точек волнового фронта, принадлежащих зоне Френеля номер  $m$   $r = r_m$  – расстояние от зоны Френеля номер  $m$  до точки наблюдения. Продифференцируем полученное выражение по  $r$  и по  $\theta$ :

$$2rdr = 2a_1(a_1 + a_2)\sin\vartheta d\vartheta.$$

Отсюда получим

$$\sin\vartheta d\vartheta = \frac{rdr}{a_1(a_1 + a_2)}.$$

Подставим полученное выражение в (1.26). После этого

$$d\sigma = a_1^2 \frac{rdr}{a_1(a_1 + a_2)} d\varphi = \frac{a_1}{(a_1 + a_2)} r dr d\varphi.$$

Подставим полученное выражение в интеграл (1.25), проведем элементарные алгебраические преобразования и выполним интегрирование по переменной  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} E(P) &= \iint_{\sigma} K(\psi) E'_0 \left[ \frac{e^{ika_1}}{a_1} \right] \frac{e^{ikr}}{r} e^{i\omega t} d\sigma = \\ &= \iint_{r,\varphi} K(\psi) E'_0 \left[ \frac{e^{ika_1}}{a_1} \right] \frac{e^{ikr}}{r} e^{i\omega t} \frac{a_1}{(a_1 + a_2)} r dr d\varphi = \\ &= \frac{E'_0 e^{ika_1} e^{i\omega t}}{(a_1 + a_2)} \iint_{r,\varphi} K(\psi) e^{ikr} dr d\varphi = 2\pi \frac{E'_0 e^{ika_1} e^{i\omega t}}{(a_1 + a_2)} \int_{r_0}^{r_m} K(\psi) e^{ikr} dr. \end{aligned}$$

Интегрирование по переменной  $r$  провести нельзя, потому что неизвестно, как изменяются коэффициенты  $K(\psi)$  в зависимости от  $r$ . Напряженность электрического поля волны, созданной всеми источниками отверстия

$$E(P) = 2\pi \frac{E'_0 e^{ika_1} e^{i\omega t}}{(a_1 + a_2)} \int_{r_0}^{r_{\max}} K(\psi) e^{ikr} dr. \quad (1.27)$$

Теперь воспользуемся разбиением волнового фронта на зоны Френеля и сначала подсчитаем вклад в напряжённость поля от одной зоны Френеля, зоны номер  $m$ . Будем считать, что коэффициент  $K(\psi)$  в пределах одной кольцевой зоны Френеля постоянен. Для каждой зоны  $K(\psi)$  имеет своё определённое значение.

$$K(\psi) = K_m(\psi) = K_m.$$

При переходе от одной зоны к соседней значение коэффициента изменяется.

Вклад в напряжённость электрического поля волны от одной зоны Френеля номер  $m$  найдем, если в (1.27) интегрирование проведем только по одной зоне Френеля, то есть от  $r_{m-1}$  до  $r_m$ . Символами  $r_{m-1}$  и  $r_m$  обозначены расстояния от зон Френеля с соответствующими номерами до точки наблюдения. При этом  $r_{m-1} = a_2 + (m - 1)\lambda/2$ , а  $r_m = a_2 + m\lambda/2$ . Коэффициент  $K_m$  в пределах одной зоны остается постоянным и его можно вынести за знак интеграла.

$$E_m(P) = 2\pi K_m \frac{E'_0 e^{ika_1} e^{i\omega t}}{(a_1 + a_2)} \int_{r_{m-1}}^{r_m} e^{ikr} dr. \quad (1.28)$$

Вычислим интеграл в формуле (1.28).

$$\int_{r_{m-1}}^{r_m} e^{ikr} dr = \frac{1}{ik} (e^{ikr_m} - e^{ikr_{m-1}}).$$

Подставим вместо  $r_m$  и  $r_{m-1}$  выражения  $r_m = a_2 + m \frac{\lambda}{2}$ , и

$r_{m-1} = a_2 + (m-1) \frac{\lambda}{2}$ , тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{ik} \left( e^{ikr_m} - e^{ikr_{m-1}} \right) &= \frac{1}{ik} \left( e^{ik \left( a_2 + m \frac{\lambda}{2} \right)} - e^{ik \left( a_2 + (m-1) \frac{\lambda}{2} \right)} \right) = \\ &= \frac{1}{ik} \left( 1 - e^{-ik \frac{\lambda}{2}} \right) e^{ik \left( a_2 + m \frac{\lambda}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Учтем также, что волновое число связано с длиной волны соотношением  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  и подставим это соотношение в последнюю формулу.

$$\begin{aligned} \frac{1}{ik} \left( 1 - e^{-ik \frac{\lambda}{2}} \right) e^{ik \left( a_2 + m \frac{\lambda}{2} \right)} &= \frac{\lambda}{2\pi i} \left( 1 - e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2}} \right) e^{i \left( ka_2 + m \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} \right)} = \\ &= \frac{\lambda}{2\pi i} \left( 1 - e^{-i\pi} \right) e^{i(ka_2 + m\pi)} = \frac{\lambda}{\pi i} e^{im\pi} e^{ika_2} = \frac{i\lambda}{\pi} (-1)^{m+1} e^{ika_2}. \end{aligned}$$

Подставим в формулу (1.28) полученное выражение для интеграла, и получим

$$E_m(P) = 2i\lambda (-1)^{m+1} K_m \frac{E'_0 e^{ik(a_1+a_2)}}{(a_1+a_2)} e^{i\omega t}. \quad (1.29)$$

Напряжённость поля в точке наблюдения, создаваемая волнами, исходящими из всех зон Френеля равна сумме вкладов от волн, исходящих из каждой зоны.

$$E(P) = \sum_m E_m(P) = E_1(P) + E_2(P) + E_3(P) + \dots \quad (1.30)$$

Обратим ваше внимание на множитель  $(-1)^{m+1}$  в формуле (1.29) для напряженности поля волны, излучаемой одной зоной Френеля. Для нечетных степеней  $m$  он равен  $+1$ , а для четных он равен  $-1$ . С учетом этого, а также формулы (1.29) выражение (1.30) можно переписать так

$$E(P) = 2i\lambda e^{i\omega t} \frac{E'_0 e^{ik(a_1+a_2)}}{(a_1+a_2)} (K_1 - K_2 + K_3 - K_4 + \dots). \quad (1.31)$$

Рассмотрим сумму в скобках в (1.31). Коэффициенты  $K_m$  для соседних зон незначительно отличаются друг от друга, поэтому с достаточно высокой степенью точности можно считать, что

$$K_m = \frac{K_{m-1} + K_{m+1}}{2}. \quad (1.32)$$

Сумму в скобках в выражении (1.31) теперь можно переписать так:

$$K_1 - K_2 + K_3 - \dots = \frac{K_1}{2} + \left[ \frac{K_1}{2} - K_2 + \frac{K_3}{2} \right] + \left[ \frac{K_3}{2} - K_4 + \frac{K_5}{2} \right] + \dots$$

Если принять во внимание (1.32), то выражения в квадратных скобках будут равны нулю. Таким образом, если в отверстии помещается  $m$  зон Френеля, то в сумме остаются только первое и последнее слагаемые, соответствующие первой зоне Френеля и зоне с номером  $m$ .

$$E_0(P) = \frac{1}{2} (E_1(P) \pm E_m(P)). \quad (1.33)$$

В формуле (1.33) знак «+» соответствует нечетным числам  $m$ , а знак «-» соответствует четным. При полностью открытом волновом фронте можно считать, что в этой формуле  $m \rightarrow \infty$ . В этом случае  $E_m(P) = 0$ , потому что входящий в выражение (1.29) коэффициент  $K(\psi)$  для угла  $\psi = \pi/2$  равен нулю и в этом случае

$$E_0(P) = \frac{1}{2} E_1(P).$$

Интенсивность излучения пропорциональна квадрату напряжённости поля в волне

$$I \sim E^2(P) = \frac{1}{4} (E_1(P) \pm E_m(P))^2. \quad (1.34)$$

Минус, как и в (1.33) соответствует четным числам  $m$ , а плюс – нечетным. При полностью открытом волновом фронте интенсивность излучения в точке  $P$

$$I_0(P) = \frac{1}{4} I_1(P), \quad (1.35)$$

где  $I_1(P)$  – интенсивность, создаваемая только одной центральной зоной Френеля. В результате наложения волн излучение, исходящее из всех зон, кроме первой в точке наблюдения не дает вклада в суммарную освещенность.

### **Выводы:**

1. В случае дифракции сферической световой волны на отверстии освещенность в точке наблюдения зависит от числа зон Френеля, укладывающихся в отверстии, и определяется по формуле:

$$I \sim E^2(P) = \frac{1}{4} (E_1(P) \pm E_m(P))^2,$$

где  $E_1(P)$  и  $E_m(P)$  – амплитуды волн, излучаемых зонами Френеля под номерами один и  $m$ . Зона с номером  $m$  – последняя из укладывающихся в отверстии. Знак «+» соответствует четному номеру  $m$ , знак «-» – нечетному.

2. В случае дифракции сферической световой волны на отверстии освещенность в точке наблюдения при одной открытой зоне Френеля в 4 раза больше, чем при полностью открытом волновом фронте.

### **Контрольные вопросы**

1. При дифракции сферической волны на отверстии открыты  $m$  зон Френеля. Сравните освещенность в центре дифракционной картины с освещенностью при полностью

открытом волновом фронте (при отсутствии преграды). Ответ дайте для значений  $m = 2$ ,  $m = 3$ ,  $m = 4$  и  $m = 5$ .

2. Какой будет освещенность центра дифракционной картины, если при дифракции сферической волны на пути волны поставить сложную преграду, закрывающую зоны Френеля с нечетными номерами и оставляющую открытыми зоны с четными номерами?

3. Какой будет освещенность центра дифракционной картины, если при дифракции сферической волны на пути волны поставить сложную преграду, закрывающую зоны Френеля с четными номерами и оставляющую открытыми зоны с нечетными номерами?

4. Для чего можно использовать сложные преграды, описанные во втором и третьем вопросах?

### 1.11. Примеры наблюдения дифракции сферических волн

#### *Дифракция сферической волны на круглом отверстии.*

Рассмотрим случай, когда свет от точечного источника падает на малое отверстие в непрозрачной преграде (рис. 12). Предположим, что в качестве отверстия мы используем диафрагму, радиус которой мы можем плавно изменять. Как будет изменяться освещенность в точке  $P$  при изменении радиуса отверстия? Когда радиус отверстия равен радиусу первой зоны Френеля, на экране в точке  $P$  наблюдается яркое светлое пятно. Интенсивность излучения в соответствии с формулой (1.35) в четыре раза больше, чем при отсутствии преграды с отверстием. Если увеличить радиус отверстия до радиуса второй зоны Френеля, освещенность стане практически нулевой. Далее, когда радиус отверстия равен радиусу нечетной зоны Френеля, пятно в центре дифракционной картины будет

светлым, а когда радиус отверстия равен радиусу четной зоны Френеля, в центре будет наблюдаться минимум освещенности. Увеличивая радиус отверстия, мы будем наблюдать на экране в точке  $P$  чередование светлых и темных пятен. При этом освещенность светлых пятен с ростом радиуса отверстия будет убывать.

Оценим величину радиусов зон Френеля при наблюдении дифракции сферических волн в оптическом диапазоне. Пусть длина волны света равна 500 нм. Эта величина соответствует середине оптического диапазона. Если расстояния от источника до преграды и от преграды до экрана  $a_1 = a_2 = 1$  м, то радиус первой зоны Френеля ( $m = 1$ ) составит

$$R_1 = \sqrt{\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}} \lambda = 0,5 \text{ мм.}$$

Радиусы последующих зон составят приблизительно 0,71 мм, 0,87 мм, 1,0 мм и так далее. Столь малый радиус зон требует для наблюдения дифракции использования малых отверстий, а это в свою очередь требует использования достаточно мощных источников света.

Наблюдать чередование светлых и темных пятен на экране напротив отверстия можно, перемещая экран при постоянном радиусе отверстия  $R$  и расстоянии до источника  $a_1$  или, отодвигая источник света от преграды с отверстием при постоянном радиусе отверстия  $R$  и постоянном расстоянии до экрана  $a_2$ . Величины радиусов зон Френеля  $R_m$  зависят от трех параметров,  $a_1$ ,  $a_2$ , и  $\lambda$ . Плавное изменение любой из этих величин при фиксированных значениях двух других ведет к изменению величин радиусов зон, а, следовательно, и к изменениям условий наблюдения дифракционной картины.

**Дифракция сферической волны на круглой преграде.** Если на пути распространения сферической световой волны от точечного источника к экрану поместить небольшую

непрозрачную преграду, (рис. 16), то освещенность в точке  $P$  на

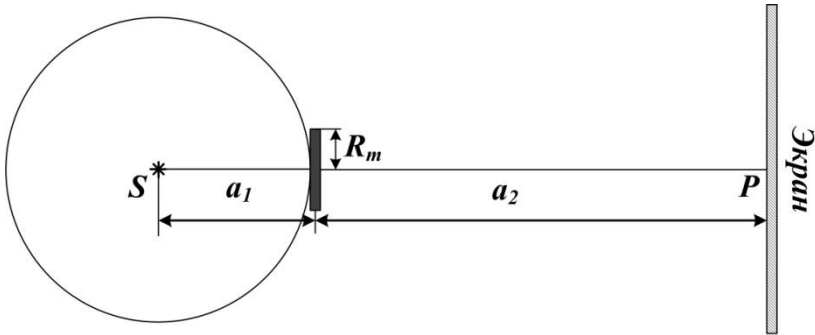


Рис. 16. Сферическая волна падает на непрозрачную преграду

экране, лежащей напротив центра преграды, будет зависеть от того, сколько зон Френеля закрывает эта преграда.

Для того чтобы рассчитать амплитуду колебаний напряженности электрического поля в волне, падающей в точку  $P$  экрана, в этом случае также, как и в случае с падением волны на отверстие, необходимо вычислить интеграл в формуле (1.27). Процедура вычисления этого интеграла в том и в другом случае одинакова. В обоих случаях интеграл (1.28) вычисляется по открытой части волнового фронта. Отличие состоит только в том, что в данном случае открыты зоны Френеля с номерами, начиная с  $m \geq 1$  и заканчивая  $m = \infty$ . Поэтому в случае, если преградой закрыто  $m$  зон Френеля, то амплитуда колебаний вектора напряженности электрического поля в точке  $P$  составит

$$E_0(P) = \frac{1}{2} (E_{m+1}(P) \pm E_n(P)). \quad (1.36)$$

Здесь  $n$  – максимальный номер открытой зоны Френеля. В ситуации, соответствующей рис. 16, открыты все зоны Френеля с номерами  $k \geq m + 1$ . Как уже отмечалось выше, при  $n \rightarrow \infty$   $E_n(P) \rightarrow 0$ , поэтому в рассматриваемом нами случае амплитуда колебаний будет равна



$$E_0(P) = \frac{1}{2} E_{m+1}(P).$$

Интенсивность излучения в точке  $P$  будет

$$I_0(P) = \frac{1}{4} I_{m+1}(P). \quad (1.37)$$

Здесь  $I_{m+1}(P)$  – интенсивность излучения, испускаемого источниками зоны Френеля номер  $m + 1$ , первой зоны, радиус которой больше радиуса преграды. Эта величина всегда больше нуля. Отсюда следует важный вывод – *при дифракции сферической волны на малой преграде в центре дифракционной картины всегда наблюдается светлое пятно.*

Этот результат впервые был получен французским ученым Симеоном Дени Пуассоном (1781 – 1840), который считал его не соответствующим эксперименту. Пуассон считал, что этот результат опровергает всю теорию дифракции, построенную Френелем. Однако другой французский физик Франсуа Араго (1786 – 1853) подтвердил на опыте, что в центре дифракционной картины, получаемой при дифракции сферической волны на преграде, действительно наблюдается светлое пятно. Однако по странному стечению обстоятельств это пятно до сих пор иногда называют в литературе *пятном Пуассона.*

**Зонная пластинка.** При помощи дифракции можно добиться увеличения интенсивности света в точке наблюдения. Для этого нужно изготовить сложный экран, который будет закрывать все четные зоны Френеля, и оставлять открытыми нечетные. Тогда в формуле (1.31) в сумме останутся только положительные слагаемые, и результирующая амплитуда станет больше. Изготовить такой экран непросто, нужно точно рассчитать радиусы зон Френеля и использовать его можно только помещая в одной и той же точке, все время на одинаковых расстояниях от источника и экрана.

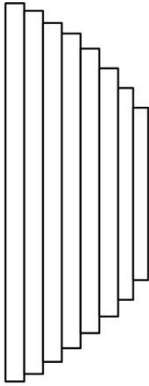


Рис. 17. Зонная пластинка

Другим способом усиления освещенности является применение ступенчатой зонной пластинки. Зонную пластинку можно представить как состоящую из круглых плоских пластин, радиусы которых равны радиусам зон Френеля для данной точки наблюдения (рис.17). Толщина каждой плоской пластины, или, точнее, высота ступеньки должна быть такой, чтобы прохождение волны через пластинку (ступеньку) вносило дополнительную разность фаз, равную  $\pi$ , что соответствует добавлению к оптической длине луча половины длины волны. Как известно, волны из соседних зон Френеля приходят в точку наблюдения с разностью хода  $\lambda/2$ . При прохождении через пластинку к оптической длине луча добавляется еще  $\lambda/2$  и получается, что в точке наблюдения волны из всех зон Френеля приходят с нулевой разностью хода. Это означает, что в точке наблюдения, лежащей на оси пластинки, происходит значительное усиление интенсивности излучения.

Если через середины ступенек зонной пластинки провести огибающую поверхность (рис. 17), то получится часть сферы. Как известно, сферическая преломляющая поверхность в геометрической оптике называется линзой. Точка, в которой происходит усиление освещенности, называется фокусом линзы. Усиление освещенности зонной пластинкой в точке на ее оси можно рассматривать, как обоснование свойств линзы с волновой точки зрения.

## Контрольные вопросы

1. Оцените размеры препятствия (или отверстия) на котором наблюдается дифракция радиоволн с длиной примерно 10 см, если расстояние от источника до препятствия и от препятствия до экрана примерно 10 м.
2. Объясните, почему при дифракции света на малой преграде в центре дифракционной картины всегда наблюдается светлое пятно (пятно Пуассона)?
3. Чем объясняется усиление освещенности, наблюдаемое на некотором расстоянии от зонной пластинки напротив ее центра?

### 1.12. Условия наблюдения дифракции

Дифракция проявляется при распространении волн в средах с резкими неоднородностями. Коснемся вопроса о том, при выполнении каких условий можно наблюдать дифракционные явления, а когда можно говорить о выполнении законов геометрической оптики. При рассмотрении этого вопроса следует учитывать соотношение между размерами препятствия или отверстия и размерами зон Френеля. Дифракционные явления проявляются в том случае, когда линейные размеры препятствия или отверстия одного порядка по величине, что и линейные размеры зон Френеля. Если размер препятствия намного больше, чем размеры зон Френеля, то дифракция практически незаметна и вполне можно ограничиться приближением геометрической оптики.

Размеры зон Френеля определяются тремя параметрами: длиной волны  $\lambda$ , расстоянием от источника до неоднородности (отверстия, преграды)  $a_1$  и расстояния от неоднородности до точки наблюдения  $a_2$ . Следовательно, условия наблюдения

дифракции зависят от всех трех параметров. Радиус первой зоны Френеля определяются формулой

$$R_1 = \sqrt{\frac{a_1 a_2}{(a_1 + a_2)}} \lambda.$$

Для того, чтобы определить, возможно ли наблюдение дифракции, будем сравнивать размеры неоднородности  $d$  с радиусом первой зоны Френеля. Обозначим

$$\rho = \frac{a_1 a_2}{(a_1 + a_2)}.$$

Тогда  $R_1 = \sqrt{\rho \lambda}$ . Назовем величину  $p = \frac{\sqrt{\rho \lambda}}{d}$  параметром дифракции. Физический смысл параметра дифракции состоит в том, что он показывает, во сколько раз линейные размеры первой зоны Френеля больше размера неоднородности.

Если параметр дифракции мал,  $p = \frac{\sqrt{\rho \lambda}}{d} \ll 1$ , то этом случае будем считать размер неоднородности (щели, преграды) большим. В этом случае при наблюдении дифракционные явления практически незаметны и можно считать, что применимы законы геометрической оптики. Это условие практически всегда реализуется при малой длине волны,  $\lambda \rightarrow 0$ .

Если величина параметра дифракции сравнима с единицей,  $p = \frac{\sqrt{\rho \lambda}}{d} \sim 1$ , то учет волновые свойства излучения должны играть главную роль в описании оптических явлений. Это самые благоприятные условия для наблюдения дифракции.

Интересно, что при условии  $p \gg 1$ , когда размеры неоднородности очень малы, учитывать волновые свойства тоже нет необходимости. Волна как бы «не замечает» столь малых препятствий. Это возможно при достаточно большой длине

волны излучения. При малых расстояниях реализуются условия для применения законов геометрической оптики, а при увеличении расстояний следует учитывать волновые свойства. Для волн оптического диапазона на практике выполнить такое условие непросто, но при рассмотрении дифракции волн с гораздо большей длиной, например, радиоволн, это следует учитывать.

### **Выводы:**

1. Наблюдение дифракции возможно, когда выполняется условие

$$d = \sqrt{\frac{a_1 a_2}{(a_1 + a_2)}} \lambda,$$

где  $d$  – размеры неоднородности среды (преграды или отверстия),  $\lambda$  – длина волны излучения,  $a_1$  – расстояние от источника до неоднородности и  $a_2$  – расстояние от неоднородности до точки наблюдения.

### **Контрольные вопросы**

1. При каком соотношении между размерами зон Френеля и размерами преграды или отверстия можно наблюдать дифракцию?
2. При каком соотношении между размерами зон Френеля и размерами преграды следует пользоваться законами геометрической оптики?
3. Что такое параметр дифракции и в чем состоит его физический смысл?
4. Как с помощью параметра дифракции определить, возможно или невозможно в данных условиях наблюдение дифракции?

### 1.13. Примеры решения задач

Рассмотрим примеры решения типичных задач, относящихся к рассматриваемому разделу оптики.

**Задача 1.** Монохроматический источник света ( $\lambda = 600$  нм) установлен в фокусе собирающей линзы. После прохождения линзы свет падает нормально на диафрагму с диаметром отверстия  $d = 6$  мм. За диафрагмой на расстоянии  $L = 3$  м от нее находится экран. Какое число  $m$  зон Френеля укладывается в отверстии диафрагмы, если точка наблюдения находится на экране напротив центра отверстия? Каким будет центр дифракционной картины на экране – темным или светлым?

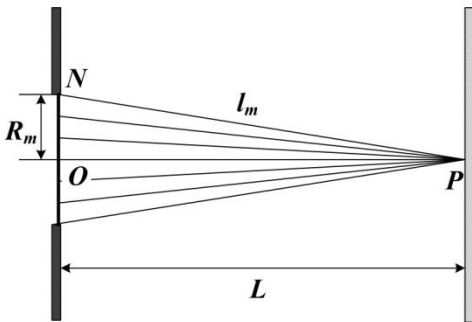


Рис. 18. Разбиение волнового фронта на зоны Френеля

**Решение.** Источник света находится в фокусе собирающей линзы, следовательно, после прохождения линзы формируется пучок параллельных лучей. Волновой фронт такого пучка будет плоским. Согласно правилу построения зон

Френеля волны из двух соседних зон приходят в точку наблюдения с разностью хода  $\lambda/2$ . На рис. 18  $\ell_m$  - оптическая длина луча, исходящего из зоны Френеля номер  $m$ ,  $R_m$  - радиус зоны Френеля номер  $m$ .

$$\ell_m = L + m \frac{\lambda}{2},$$

где  $m$  – номер последней открытой зоны. С другой стороны, по теореме Пифагора,

$$\ell_m^2 = L^2 + R_m^2.$$

Подставим в последнюю формулу выражение для  $l_m$ :

$$l_m^2 = L^2 + Lm\lambda + m^2 \frac{\lambda^2}{4}.$$

Отсюда  $R_m^2 = Lm\lambda + m^2 \frac{\lambda^2}{4}$ . Пренебрегая малыми слагаемыми

порядка  $\lambda^2$ , получим  $R_m^2 \approx Lm\lambda$ ,  $R_m^2 = \frac{d^2}{4} = Lm\lambda$ ,

$$m = \frac{d^2}{4L\lambda} = \frac{36 \cdot 10^{-6}}{4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 10^{-7}} = 5.$$

**Ответ:**  $m = 5$ ; центр дифракционной картины будет светлым.

**Задача 2.** На щель шириной  $b = 20$  мкм падает нормально параллельный пучок монохроматического света ( $\lambda = 500$  нм). Найти ширину изображения  $h$  щели на экране, удаленном от щели на расстояние  $L = 1$  м.

**Решение.** Шириной изображения будем считать расстояние между первыми дифракционными минимумами, расположенными по обе стороны от главного максимума освещенности (рис. 19). Положение дифракционных минимумов на экране определяется формулой  $b \sin \varphi = m\lambda$ . Для малых углов  $\alpha$

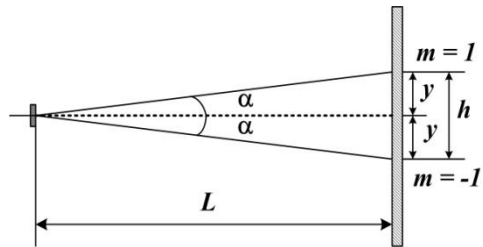


Рис. 19. К решению задачи 2.

справедливо выражение  $\sin \alpha = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{L}$ . Так как  $m = 1$ ,

$$y = \lambda \frac{L}{b}. \text{ Расстояние между минимумами } h = 2y = 2\lambda \frac{L}{b}.$$

$$h = \frac{2\lambda L}{b} = \frac{2 \cdot 500 \cdot 10^{-9} \cdot 1}{2 \cdot 10^{-7}} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ (i)}$$

**Ответ:**  $h = 5$  см.

**Задача 3.** Найти наибольший порядок спектра  $k$  для желтой линии натрия ( $\lambda = 589$  нм), если период дифракционной решетки  $d = 2$  мкм.

**Решение.** Величины углов дифракции определяется формулой  $d \sin \varphi = m\lambda$ . Следовательно,  $\sin \varphi = \frac{m\lambda}{d}$ .

Допустимы такие значения номера максимума  $m$ , когда  $\frac{m\lambda}{d} \leq 1$ , так как синус не может быть больше единицы. Из этого неравенства получаем

$$m \leq \frac{2 \cdot 10^{-6}}{0,589 \cdot 10^{-6}} \approx 3,396.$$

Номер максимума – это целое число, поэтому

$$k = m_{\max} = 3.$$

**Ответ:**  $k = 3$ .

**Задача 4.** Посередине между экраном и точечным источником света ( $\lambda = 500$  нм) находится круглый непрозрачный диск радиусом  $R = 0,5$  мм. Каково должно быть расстояние между источником света и экраном для того, чтобы диск закрыл первые две зоны Френеля?

**Решение.** Диск закрывает две зоны Френеля, а радиусы зон Френеля определяются формулой

$$R_m = \sqrt{\frac{a_1 a_2}{(a_1 + a_2)} m \lambda}.$$



По условию задачи  $m = 2$ . Диск расположен посередине между источником и экраном, поэтому  $a_1 = a_2$ ,  $L = 2a_1$ . Подставляя эти выражения и возводя в квадрат, получим

$$R_m^2 = \frac{a_1^2}{2a_1} m\lambda = \frac{1}{2} a_1 m\lambda.$$

$$a_1 = \frac{2R^2}{m\lambda}, \quad L = 2a_1 = \frac{4R^2}{m\lambda}.$$

$$L = \frac{4R^2}{m\lambda} = \frac{4 \cdot 0.25 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-7}} = 1 \text{ (м)}.$$

**Ответ:**  $L = 1 \text{ м}$ .

### 1.14. Задания для самостоятельного решения

#### Задачи

1. Найти радиусы первых пяти зон Френеля для плоской волны, если расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения  $L = 1 \text{ м}$ . Длина волны света  $\lambda = 500 \text{ нм}$ .

Ответ:  $R_1 = 0,71 \text{ мм}$ ,  $R_2 = 1,0 \text{ мм}$ ,  $R_3 = 1,22 \text{ мм}$ ,  $R_4 = 1,41 \text{ мм}$ ,  $R_5 = 1,58 \text{ мм}$ .

2. На щель шириной  $b = 6\lambda$  падает нормально параллельный пучок монохроматического света с длиной волны  $\lambda$ . Под каким углом  $\alpha$  будет наблюдаться третий дифракционный минимум интенсивности света?

Ответ:  $\alpha = 30^\circ$ .

3. На дифракционную решетку нормально падает пучок света. Натриевая линия ( $\lambda_1 = 589 \text{ нм}$ ) дает в спектре первого порядка угол дифракции  $\varphi_1 = 17^\circ 8'$ . Некоторая линия дает в спектре

второго порядка угол дифракции  $\varphi_2 = 24^\circ 12'$ . Найти длину волн этой линии и число штрихов на единицу длины решетки.  
 Ответ:  $\lambda_2 = 409,9 \text{ нм}$ ;  $N = 500 \text{ мм}^{-1}$ .

4. Дифракционная картина наблюдается на расстоянии от точечного источника монохроматического света ( $\lambda = 600 \text{ нм}$ ). На расстоянии  $a_1 = 0,5L$  от источника помещена круглая непрозрачная преграда диаметром  $d = 1 \text{ см}$ . Найти расстояние  $L$ , если преграда закрывает только центральную зону Френеля.  
 Ответ:  $L = 167 \text{ м}$ .

5. Дифракционная картина наблюдается на расстоянии  $L = 4 \text{ м}$  от точечного источника монохроматического света ( $\lambda = 500 \text{ нм}$ ). Посередине между экраном и источником света помещена диафрагма с круглым отверстием. При каком радиусе  $R$  отверстия центр дифракционных колец, наблюдаемых на экране, будет наиболее темным?  
 Ответ: центр картины будет наиболее темным, когда открыты только две первые зоны Френеля.  $R = 1 \text{ мм}$ .

### Задания с выбором ответа

1. Укажите слово, пропущенное в определении. Совокупность явлений, наблюдаемых при распространении света в среде с резкими неоднородностями и связанных с отклонениями от законов геометрической оптики, называется ... .

- 1) дисперсией;      2) поляризацией;      3) интерференцией;  
 4) дифракцией;      5) поглощением.

2. Какие из приведенных утверждений верны ( $\lambda$  – длина волны излучения,  $n, m$  – номера зон Френеля)?

А. Разность хода между волнами, приходящими в точку наблюдения из двух соседних зон Френеля равна  $\Delta L = \lambda/2$ .

Б. Разность хода между волнами, приходящими в точку наблюдения из двух соседних зон Френеля равна  $\Delta L = \lambda$ .

В. Площади зон Френеля номер  $n$  и  $m$  относятся как  $n/m$ .

Г. Площади любых зон Френеля равны.

- 1) А и В;            2) Б и Г;            3) Б и В;  
4) А и Г;            5) Только А.

3. Укажите правильное выражение для радиусов зон Френеля при дифракции от точечного источника (дифракция Френеля). Здесь  $m$  – номер зоны,  $a$  – расстояние от источника до волновой поверхности,  $b$  – расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения,  $\lambda$  – длина волны,  $r_m$  – радиус зоны Френеля.

$$1) r_m = \sqrt{(a+b)m\lambda} ; \quad 2) r_m = \sqrt{(a+b)\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda} ;$$

$$3) r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda} ; \quad 4) r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b}m\lambda} ;$$

$$5) r_m = \sqrt{bm\lambda} .$$

4. Привести правильное выражение для радиусов зон Френеля в предельном случае плоской волны. Здесь  $b$  – расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения,  $r_m$  – радиус  $m$  – ой зоны (внешней ее границы),  $\lambda$  – длина волны.

$$1) r_m = \sqrt{bm\lambda} ; \quad 2) r_m = \sqrt{b(m+1/2)\lambda} ;$$

$$3) r_m = \sqrt{b(m-1/2)\lambda} ; \quad 4) r_m = \sqrt{b(2m+1)\lambda} ;$$

$$5) r_m = \sqrt{b(2m-1)\lambda} .$$

5. Непрозрачную ширму с отверстием освещают параллельным пучком монохроматического света с длиной волны 500 нм. На расстоянии 3 м от ширмы находится экран. При этом в отверстии укладывается только одна зона Френеля. На каком расстоянии от ширмы должен находиться экран, чтобы в отверстии укладывалось три зоны Френеля?

- 1) 9 м; 2) 5,2 м; 3) 1,73 м; 4) 1 м; 5) 0,33 м.

6. При падении плоской монохроматической световой волны нормально плоскости щели шириной  $a$  условия для наблюдения любого из максимумов интенсивности света, исключая центральный, имеют вид ( $\varphi_m$  – угол дифракции,  $\lambda$  – длина волны,  $m = 0, 1, 2, 3 \dots$ )

$$1) a \sin \varphi_m = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}; \quad 2) a \sin \varphi_m = \pm 2m\frac{\lambda}{2};$$

$$3) \frac{\lambda}{2} \sin \varphi_m = \pm(2m+1)a; \quad 4) \lambda \sin \varphi_m = \pm 2m\frac{a}{2};$$

- 5) Нет правильного ответа.

7. На дифракционную решетку, имеющую период 2 мкм, нормально падает монохроматическая волна. Под углом  $30^\circ$  наблюдается максимум второго порядка. Чему равна длина волны падающего света?

$$1) 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}; \quad 2) 10 \cdot 10^{-7} \text{ м}; \quad 3) 2,8 \cdot 10^{-7} \text{ м};$$

$$4) 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ м}; \quad 5) 4 \cdot 10^{-7} \text{ м}.$$

8. Плоский волновой фронт падает на непрозрачную преграду с малым отверстием, диаметр которого 1 мм. Излучение монохроматическое с длиной волны 500 нм. Экран, на котором наблюдают дифракционную картину, отстоит от преграды на 5 м. На каком расстоянии от центра дифракционной картины находится первый минимум освещённости?

$$1) 1,25 \text{ мм}; \quad 2) 5 \text{ мм}; \quad 3) 2,5 \text{ мм};$$

$$4) 10 \text{ мм}; \quad 5) 12,5 \text{ мм}.$$

9. Если на дифракционной решетке нанесено  $N = 12500$  штрихов на длине  $l = 2,5$  см; то наибольший наблюдаемый с

помощью этой решетки порядок спектра излучения с длиной волны  $\lambda = 600$  нм равен

- 1) 5;            2) 1;            3) 2;            4) 3;            5) 4.

10. Дифракционная решетка имеет 50 штрихов на 1 мм длины. Под каким углом виден главный максимум второго порядка света с длиной волны 400 нм?

- 1)  $\arcsin 0,02$             2)  $\arcsin 0,04$             3)  $\arcsin 0,002$   
 4)  $\arcsin 0,004$             5)  $\arcsin 0,008$

## 2. Дисперсия света

### 2.1. Наблюдение дисперсии света

Со времен Аристотеля ученых занимал вопрос о природе цветов. Многими естествоиспытателями было замечено, что в процессе преломления света прозрачными телами возникала радужная полоса. Белый свет в то время считали простым, то есть не состоящим из излучения различных цветов. Возникновение радужных полосок в процессе преломления белого света долгое время объясняли тем, что вещество призмы в процессе преломления изменяет свойства света, делая его окрашенным в различные цвета. Только в 1648 году чешский физик Й. М. Марци (1595–1667) установил, что лучи разных цветов преломляются по-разному и в дальнейшем лучи, прошедшие через призму, более не разлагаются. Однако работы Марци не получили известности в Европе.

Первым систематическим исследованием «преломляемости лучей различных цветов» стали работы И. Ньютона, выполненные им около 1672 года. Схема опыта Ньютона приведена на рис. 20. Ньютон направил луч солнечного света,

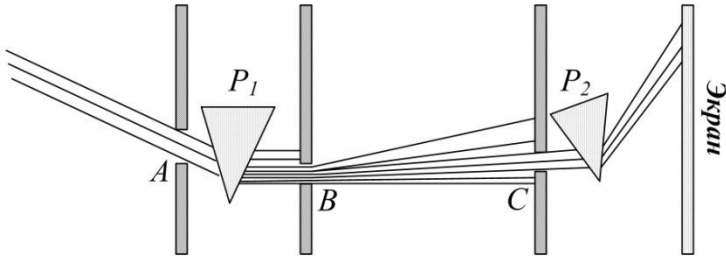


Рис. 20. Оптическая схема опыта Ньютона

прошедший через отверстие, на призму  $P_1$ , затем окрашенный луч он направил на призму  $P_2$ . В результате окрашенный луч не был развернут в спектр и его цвет вообще не изменился. Тем самым было доказано, что, как писал сам Ньютон, «лучи, различающиеся по цвету, различаются и по степеням преломляемости». Сейчас мы знаем, что цвета различаются длиной волны излучения и, говоря современным языком, Ньютон открыл зависимость показателя преломления света от длины волны.

Зависимость показателя преломления от длины волны излучения называется *дисперсией*. Показатель преломления вещества зависит от длины волны:

$$n = n(\lambda) \neq const .$$

Величина показателя преломления определяется скоростью распространения света в среде,

$$n = \frac{c}{v} ,$$

где  $c$  – скорость света в вакууме,  $v$  – скорость света в рассматриваемой среде. Поэтому можно считать, что дисперсия есть зависимость скорости света в среде от свойств среды.

И. Ньютон установил, что показатель преломления света зависит от длины волны. Согласно Ньютону, синие лучи преломляются сильнее, чем красные. То есть показатель

преломления растет с уменьшением длины волны. Этот результат математически можно записать так:

$$\frac{\partial n}{\partial \lambda} < 0.$$

Однако недостаточная точность использованного метода привела Ньютона к неверному выводу о том, что величина  $\frac{\partial n}{\partial \lambda}$  одинакова для всех прозрачных тел.

Неоднократно предпринимались попытки установить зависимость  $n(\lambda)$ , основываясь на экспериментальных данных. В начале XIX века, исходя из экспериментальных данных Френеля, знаменитый математик Коши получил формулу

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda_0^2} + \frac{C}{\lambda_0^4} + \dots,$$

где  $\lambda_0$  - длина волны света в вакууме,  $A, B, C$  - экспериментально определяемые константы, зависящие от рода вещества.

Эта формула достаточно хорошо описывает дисперсию света во многих случаях и для достижения приемлемой точности обычно достаточно определения двух произвольных констант,  $A$  и  $B$ .

Во многих случаях (а в то время – во всех известных случаях)

$$\frac{\partial n}{\partial \lambda} < 0.$$

При таких зависимостях  $n(\lambda)$  дисперсия называется **нормальной**.

В середине XIX века было установлено, что у ряда веществ в какой-то области спектра наблюдается аномальная зависимость  $n(\lambda)$ , когда показатель преломления растет с ростом длины волны:

$$\frac{\partial n}{\partial \lambda} > 0.$$

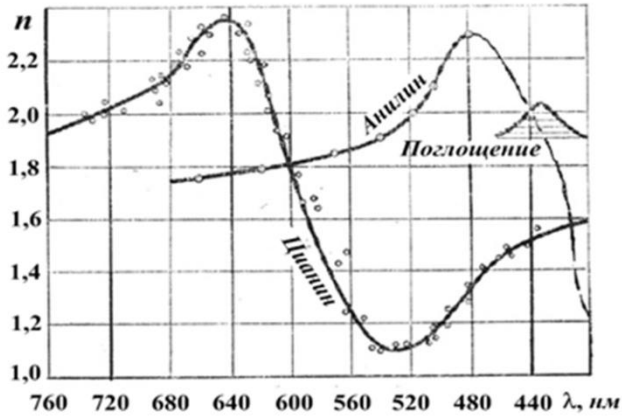


Рис. 21. Зависимость  $n(\lambda)$  для двух красителей. Аномальная дисперсия наблюдается вблизи полос поглощения. Рисунок взят из книги [3].

Впервые это наблюдал французский физик Леру, исследуя прохождение света через пары йода. Подобная зависимость  $n(\lambda)$  получила название **аномальной дисперсии**.

Позднее подобная аномальная зависимость  $n(\lambda)$  была обнаружена у различных красителей (анилин, фуксин, цианин). Аномальная дисперсия наблюдается в веществах, имеющих яркую цветную окраску. Наличие цветной окраски означает, что при падении белого света на поверхность тела некоторые спектральные составляющие белого света отражаются поверхностью, другие же поглощаются. Если тело поглощает волны из красной части спектра лучше, чем из синей, то в отраженном свете оно будет иметь синюю окраску. То есть цветная окраска тела означает, волны с некоторой длиной хорошо поглощаются этим веществом. Длину волны излучения, для которой наблюдается сильное поглощение веществом, называют спектральной линией поглощения.



Было установлено, что аномальная дисперсия света наблюдается в той части спектра, в которой данное вещество сильно поглощает световую энергию, то есть вблизи полос поглощения. Для прозрачных веществ, таких как многие газы, втекло, вода, аномальная дисперсия не наблюдается. Этот факт также требовал теоретического объяснения.

### **Выводы:**

1. При длинах волн оптического излучения, далеких от линий интенсивного поглощения света веществом показатель преломления убывает с ростом длины световой волны. Такая зависимость показателя преломления от длины волны называется *нормальной дисперсией*.

2. Если длина волны света близка к линии поглощения, показатель преломления растет с ростом длины волны. Такая зависимость показателя преломления от длины волны называется *аномальной дисперсией*.

### **Контрольные вопросы**

1. Что такое дисперсия?
2. Что такое нормальная дисперсия?
3. Что такое аномальная дисперсия?
4. В каких экспериментах можно наблюдать дисперсию?
5. Запишите эмпирическую формулу Леру-Коши для дисперсии. Как определяются константы в этой формуле?

### **2.2. Основные положения электронной теории дисперсии**

Явление дисперсии света связано со свойствами среды, через которую распространяется излучение и особенностями взаимодействия излучения с этой средой. Поэтому объяснение

этого явления стало возможным лишь тогда, стали известны важные сведения об атомном строении вещества, был открыт электрон. Задача о взаимодействии электромагнитной волны с веществом может решаться как в приближении классической физики, так и с точки зрения квантовой механики. Мы рассмотрим более простую классическую электронную теорию дисперсии, разработанную в начале XX века Г. А. Лоренцем для газообразных веществ. Несмотря на свою относительную простоту, она позволяет качественно объяснить как явление нормальной, так и аномальной дисперсии, понять физические механизмы этого явления. Количественные оценки, получаемые из этой теории, во многих случаях также имеют приемлемую точность.

Как известно, показатель преломления для прозрачных немагнитных веществ  $n = \sqrt{\varepsilon}$ , где  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость вещества. Под воздействием внешнего электрического поля диэлектрик поляризуется. Поляризация вещества характеризуется величиной вектора поляризации, которая равна суммарному электрическому дипольному моменту, возникающему в единице объема вещества. Вектор поляризации  $\vec{P}$  связан с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  соотношением  $\vec{P} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0\vec{E}$ . Здесь  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля,  $\varepsilon_0$  – электрическая постоянная. Если мы сможем найти, какой суммарный дипольный момент возникает в веществе под воздействием световой волны и как он зависит от длины волны, то мы сможем найти зависимость  $\varepsilon = \varepsilon(\lambda)$  и, наконец, определить, как зависит показатель преломления вещества от длины волны света. Вещество состоит из атомов, атомы состоят из положительно заряженных ядер и отрицательно заряженных электронов, поэтому, прежде всего, нужно понять, как воздействует электромагнитная волна на

атом, какой электрический дипольный момент возникает в атоме под ее воздействием. Затем, зная концентрацию атомов в веществе, можно будет найти величину вектора поляризации.

Г.А. Лоренц исходил из простейшей модели атома, модели Томсона, согласно которой отрицательно заряженные электроны в атоме находятся внутри «желе», имеющего положительный заряд. Электроны

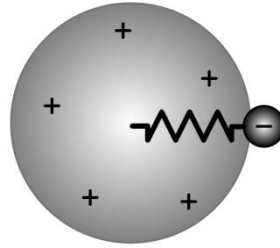


Рис. 22. Модель атома, как гармонического осциллятора. Электрон может совершать колебания по воздействию квазиупругой силы

могут относительно свободно двигаться внутри атома и под воздействием внешнего электромагнитного поля световой волны совершать вынужденные колебания. Эти колебания не могут быть свободными, иначе волны бы так «раскачали» атомы, что в конце концов электроны «оторвались» бы от своих атомов. Этого в эксперименте не наблюдается, атомы не ионизируются, следовательно, внутри атомов на электроны должна действовать некоторая сила сопротивления движению, и в случае прекращения воздействия электромагнитной волны, колебания электронов должны затухнуть. Таким образом, атом следует рассматривать, как гармонический осциллятор с затуханием.

Лоренц предложил следующую модель газа для решения задачи о дисперсии света:

1) газ состоит из молекул, молекулы – из атомов; плотность газа мала, поэтому взаимодействие молекул на расстоянии отсутствует;

2) в атоме имеется по хотя бы один валентный («оптический») электрон, который может под воздействием поля электромагнитной волны совершать колебания;

3) электрон в атоме удерживается квазиупругой силой, которая пропорциональна смещению атома из положения равновесия и направлена к этому положению равновесия;

4) на электрон также действует сила сопротивления движению, в результате его колебания являются затухающими; величина силы сопротивления движению пропорциональна скорости движения электрона;

5) в результате колебаний оптического электрона атом поляризуется, у него появляется электрический дипольный момент, сумма дипольных моментов отдельных атомов в единице объема газа равна модулю вектора поляризации; когда вещество поляризовано, у него изменяется диэлектрическая проницаемость и показатель преломления.

Задача состоит в том, чтобы исследовать изменения диэлектрической проницаемости в зависимости от частоты колебаний или длины волны светового излучения.

### **Контрольные вопросы**

1. От чего зависит показатель преломления вещества и его диэлектрическая проницаемость?
2. Как электромагнитная волна влияет на диэлектрическую проницаемость вещества с точки зрения Г.А. Лоренца?
3. Что такое оптические электроны атомов? Как оптические электроны реагируют на внешние периодические воздействия?
4. Учитывается ли в теории дисперсии Лоренца затухание колебаний оптических электронов?

### **2.3. Уравнение колебаний электрона под воздействием электромагнитной волны**

Пусть  $N$  – число атомов вещества. Все атомы эквивалентны. В каждом атоме находится один оптический электрон, то есть

электрон, который может взаимодействовать с электромагнитной волной. Заряд электрона  $q$ , масса  $m$ . На электрон действуют следующие силы: электрическая сила  $F_{em}$  со стороны поля волны, квазиупругая сила  $F_{ky}$ , сила сопротивления движению  $F_c$ . Взаимодействие оптического электрона с электронами данного атома включено в квазиупругую силу, взаимодействием оптических электронов соседних атомов пренебрежём. Это возможно, если считать, что плотность газа мала и расстояния между атомами достаточно велики. Векторы сил, действующих на оптический электрон в атоме, показаны на рис. 23. На рисунке напряженность электрического поля волны  $E$  направлена влево, скорость электрона  $v$  - вправо.

$$\vec{F}_{em} = q\vec{E};$$

$$\vec{F}_{ky} = -k\vec{r};$$

$$\vec{F}_{em} = -g\vec{v}.$$

Здесь  $r$  - радиус-вектор электрона,  $k$  - квазиупругий коэффициент,  $g$  - коэффициент сопротивления движению.

Запишем динамическое уравнение движения (уравнение второго закона Ньютона) в проекции на ось  $OX$  (рис. 23):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - g \frac{dx}{dt} + qE_x.$$

Далее будем считать, что  $E = E_x$ . Разделим правую и левую части уравнения на массу электрона  $m$ :

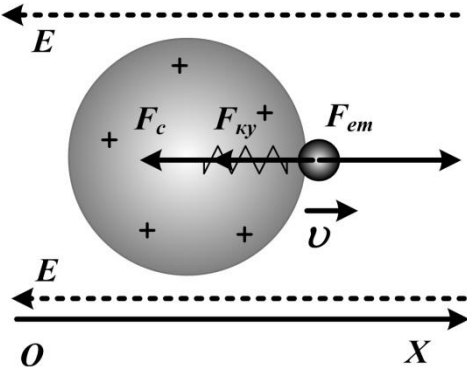


Рис. 23. Силы, действующие на оптический электрон в атоме

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \frac{g}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{q}{m}E. \quad (2.1)$$

Напряжённость электрического поля волны изменяется по гармоническому закону,

$$E(t) = E_0 e^{i\Omega t}.$$

После подстановки этого выражения в уравнение (2.1) получаем уравнение вынужденных колебаний в системе с затуханием:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{q}{m}E_0 e^{i\Omega t}. \quad (2.2)$$

Введём следующие обозначения:  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  - частота собственных колебаний электрона в атоме (считаем, что затухание колебаний мало),  $\gamma = \frac{g}{2m}$  - коэффициент затухания колебаний электрона в атоме.

С учетом этих обозначений уравнение движения электрона примет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{q}{m}E_0 e^{i\Omega t}. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) – линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение есть сумма общего решения линейного однородного уравнения и частного решения линейного неоднородного уравнения. Линейное однородное дифференциальное уравнение в данном случае является уравнением затухающих колебаний.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0.$$

В случае слабого затухания решение этого уравнения имеет вид:

$$x_1(t) = e^{-\gamma t} (C_1 e^{-i\omega t} + C_2 e^{i\omega t}), \quad (2.4)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные константы, которые можно определить из начальных условий. Решение можно также записать в действительной форме

$$x_1(t) = e^{-\gamma t} A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2.5)$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad (2.6)$$

$\omega$  – циклическая частота затухающих колебаний,  $\omega_0$  – циклическая частота собственных колебаний электрона в атоме. Величины  $A$  и  $\varphi_0$  в (2.5) также являются произвольными константами, определяемыми из начальных условий.

Это решение приближенно можно рассматривать, как гармонические колебания, происходящие с частотой  $\omega$ , амплитуда которых убывает по экспоненциальному закону. Частота  $\omega$  связана с собственной частотой колебаний электрона формулой (2.6). В случае, когда коэффициент затухания мал, то есть когда  $\omega_0^2 \gg \gamma^2$ , частота  $\omega$  близка к собственной частоте колебаний электрона в атоме. График затухающих колебаний приведен на рис. 24, однако в случае слабого затухания амплитуда колебаний убывает гораздо медленнее.

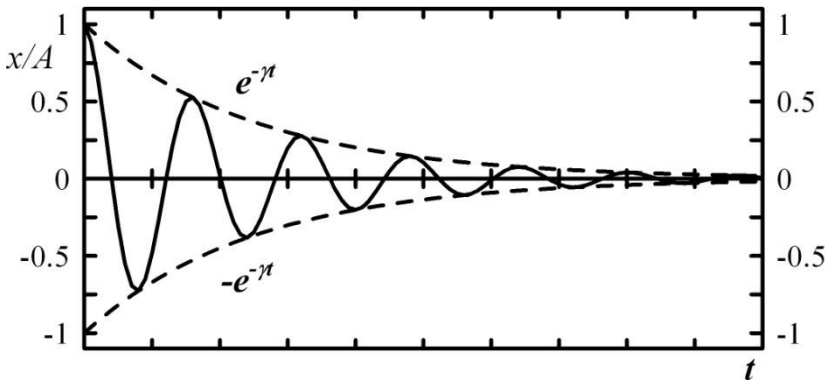


Рис. 24. График затухающих колебаний

Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (2.3) будем искать в виде

$$x_2(t) = x_0 e^{i\Omega t},$$

где  $\Omega$  – частота колебаний напряженности электрического поля в электромагнитной волне. Найдем первую и вторую производные этой функции по времени:

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} &= i\Omega x_0 e^{i\Omega t}, \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -\Omega^2 x_0 e^{i\Omega t}. \end{aligned}$$

Подставим в дифференциальное уравнение (2.3) полученные выражения для производных:

$$-\Omega^2 x_0 e^{i\Omega t} + 2i\gamma\Omega x_0 e^{i\Omega t} + \omega_0^2 x_0 e^{i\Omega t} = \frac{q}{m} E_0 e^{i\Omega t}.$$

Это уравнение обращается в тождество для любого  $t$ , если выполняется условие

$$-\Omega^2 x_0 + 2i\gamma\Omega x_0 + \omega_0^2 x_0 = \frac{q}{m} E_0. \quad (2.7)$$

Из уравнения (2.7) найдем величину  $x_0$ :

$$x_0 = \frac{q/m}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} E_0.$$

Теперь частное решение линейного неоднородного уравнения можно записать так

$$x_2(t) = \frac{q/m}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} E_0 e^{i\Omega t}. \quad (2.8)$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения равно сумме общего решения линейного однородного уравнения (2.4) и частного решения линейного неоднородного уравнения (2.8):



$$x(t) = e^{-\gamma t} (C_1 e^{-i\omega t} + C_2 e^{i\omega t}) + \frac{q/m}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} E_0 e^{i\Omega t}. \quad (2.9)$$

Это решение представляет собой сумму двух функций. Первая описывает затухающие колебания, происходящие с частотой  $\omega$ , а вторая – незатухающие вынужденные гармонические колебания, происходящие с частотой  $\Omega$ , равной частоте колебаний в электромагнитной волне. Для случая, когда частоты  $\omega$  и  $\Omega$  сильно различаются, график этого решения представлен на рис. 25. Из рисунка видно, что в процессе уменьшения амплитуды затухающих колебаний остаются только вынужденные колебания электрона с частотой  $\Omega$ , равной частоте колебаний в электромагнитной волне. Период колебаний в световых электромагнитных волнах составляет примерно от  $1 \cdot 10^{-15}$  до  $2,3 \cdot 10^{-15}$  с. Поэтому время установления колебаний

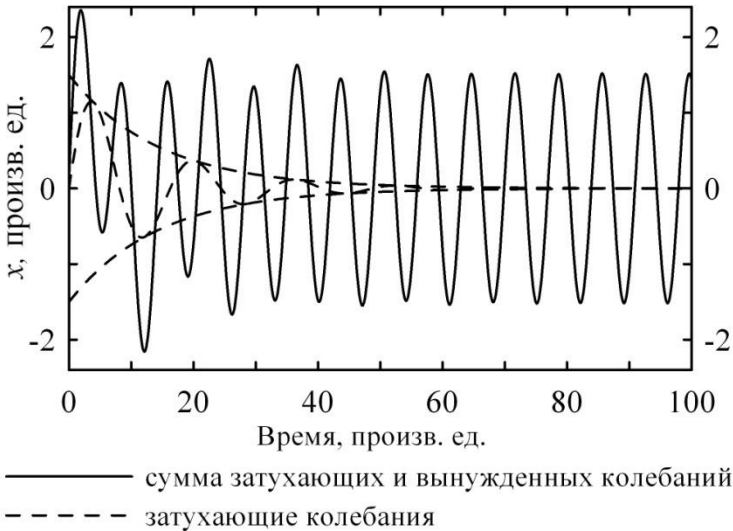


Рис. 25. График вынужденных колебаний при наличии затухания вдали от резонанса

заведомо будет меньше времени наблюдения. Главную роль в описании взаимодействия оптического электрона со световой волной в случае, когда собственная частота колебаний электрона значительно отличается от частоты колебаний в электромагнитной волне, играют вынужденные колебания (второе слагаемое в общем решении (2.9) дифференциального уравнения).

Рассмотренный выше случай соответствует взаимодействию оптического электрона с полем электромагнитной волны вдали от полосы поглощения. При таких условиях наблюдается нормальная дисперсия света в газах. При совпадении частоты колебаний поля в электромагнитной волне с собственной частотой колебаний оптического электрона в атоме наблюдается явление, называемое в теории колебаний резонансом. Резонанс – это резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний, происходящее при совпадении частоты собственных колебаний с частотой периодической вынуждающей силы. Резкий рост амплитуды вынужденных колебаний приводит к интенсивному поглощению энергии колебательной системой. В нашем случае это означает интенсивное поглощение энергии электромагнитных световых волн. Как было отмечено ранее, в такой ситуации наблюдается явление аномальной дисперсии.

Амплитуда вынужденных колебаний оптического электрона в зависимости от частоты электромагнитных колебаний  $\Omega$  согласно (2.9) изменяется по закону

$$x_0 = \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} \frac{qE_0}{m}.$$

На рис. 26 показано, как возрастает амплитуда вынужденных колебаний при приближении частоты колебаний в волне к частоте собственных колебаний электрона в атоме. Из рисунка видно, что с уменьшением коэффициента затухания  $\gamma$  амплитуда резонансных колебаний возрастает. Мы считаем, что затухание

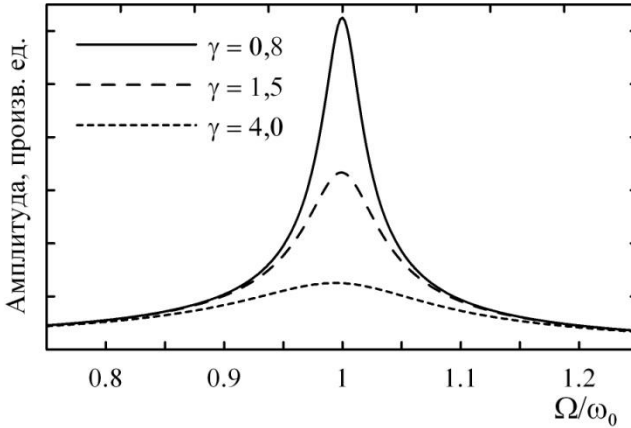


Рис. 26. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от соотношения частоты колебаний поля в волне  $\Omega$  и частоты собственных колебаний электрона  $\omega$

колебаний электрона в атоме незначительно, следовательно, амплитуда резонансных колебаний будет велика.

При совпадении частоты внешней электромагнитной волны  $\Omega$  с частотой собственных колебаний электрона  $\omega_0$  амплитуда резко возрастает, то есть имеет место резонанс. Возрастание амплитуды колебаний электрона приводит к увеличению индуцированного электрического дипольного момента атома. Это приводит к резкому росту вектора поляризации вещества и его диэлектрической проницаемости.

### Выводы:

**I.** В рамках классической электронной модели дисперсии при длинах волн оптического излучения, далеких от линий интенсивного поглощения света веществом величина диэлектрической проницаемости вещества и коэффициента преломления определяется амплитудой вынужденных колебаний

оптических электронов и при изменении длины волны излучения изменяется незначительно.

2. Если длина волны света близка к линии поглощения, то зависимость диэлектрической проницаемости и показателя преломления вблизи длины волны, равной длине волны линии поглощения имеет резонансный характер.

### **Контрольные вопросы**

1. Запишите динамическое уравнение движения оптического электрона под воздействием электромагнитной волны. Объясните физический смысл отдельных слагаемых в этом уравнении.

2. Запишите решение динамического уравнения движения оптического электрона. Какое движение совершает оптический электрон?

3. Как зависит амплитуда колебаний оптических электронов от частоты колебаний в электромагнитной волне?

4. При выполнении каких условий происходит резкое увеличение амплитуды колебаний оптических электронов?

### **2.4. Дисперсия вдали от линии поглощения (нормальная дисперсия)**

Определим, как зависит показатель преломления газа от длины волны или частоты излучения. Для этого сначала найдем величину электрического дипольного момента атома, возникающего под воздействием электромагнитной волны, затем найдем величину вектора поляризации газа, а потом – величину диэлектрической проницаемости и показателя преломления.

Величина электрического дипольного момента одного атома с одним оптическим электроном

$$p_1 = |\vec{p}_1| = qx,$$

где  $q$  – заряд электрона,  $x$  – смещение оптического электрона из положения равновесия. Величина дипольного момента  $N$  атомов с одним оптическим электроном каждый

$$p_N = |\vec{p}_N| = Nqx.$$

Величина вектора поляризации равна электрическому дипольному моменту единицы объёма вещества

$$P = \frac{N}{V} qx = \eta qx.$$

$\eta = (N/V)$  – концентрация оптических электронов. Максимального значения поляризация достигает, когда смещение оптического электрона из положения равновесия равно амплитуде его колебаний. Амплитуда колебаний электрона из (2.9) равна

$$x_0 = \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} \frac{qE_0}{m}.$$

Если  $x_0$  является амплитудным смещением, то величина вектора поляризации

$$P = \eta ex_0 = \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} \frac{\eta q^2 E_0}{m}.$$

Величина вектора электрического смещения

$$\begin{aligned} D &= \varepsilon \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 E + P = \\ &= \varepsilon_0 E + \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} \frac{\eta q^2 E_0}{m} = \\ &= \varepsilon_0 E \left( 1 + \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} \frac{\eta q^2}{m} \right). \end{aligned}$$

Отсюда диэлектрическая проницаемость среды

$$\varepsilon = 1 + \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} \frac{\eta q^2}{m}.$$

Если длина волны электромагнитной волны значительно отличается от длины волны, при которой наблюдается резонансное поглощение света, то можно пренебречь поглощением электромагнитных волн и квадрат показателя преломления среды будет равен

$$n^2 = \varepsilon = 1 + \frac{1}{(\omega_0^2 - \Omega^2)} \frac{\eta e^2}{m}. \quad (2.10)$$

В последней формуле учтено, что заряд электрона равен элементарному заряду,  $q = e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл.

Для большинства прозрачных тел частота  $\omega_0$  лежит в ультрафиолетовой области и поэтому длина волны света чаще всего значительно отличается от той длины волны, на которой наблюдается резонансное поглощение. Всюду за исключением точки  $\Omega = \omega_0$  функция  $n^2(\Omega)$  возрастает с ростом частоты  $\Omega$ . Следовательно, она убывает с ростом длины волны  $\lambda$ , так как

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}, \text{ где } c \text{ – скорость света в вакууме. На рис. 27 показан}$$

график типичной зависимости квадрата показателя преломления от частоты колебаний электрического поля в электромагнитной волне. Стрелками показаны направления возрастания частоты колебаний напряженности электрического поля  $\Omega$  и длины волны  $\lambda$ . Символами  $\omega_{кр}$  и  $\omega_{ф}$  обозначены значения частоты, соответствующие границам видимой части спектра – излучению красного и фиолетового света,  $\omega_0$  – частота, на которой происходит резонансное поглощение света. Из рисунка видно, что с ростом длины волны показатель преломления уменьшается, то есть

$$\frac{\partial n}{\partial \lambda} < 0.$$

Для фиолетового цвета показатель преломления больше, чем для красного,  $n_{\text{фиол}} > n_{\text{красн}}$ , что соответствует результатам многочисленных экспериментов.

Считая, что  $\Omega \ll \omega_0$ , можно разложить выражение (2.10) в ряд по степеням  $(\Omega/\omega_0)$  и ограничиться в этом разложении двумя членами, тогда

$$n^2 = 1 + \frac{\eta e}{m \omega_0^2} \left( 1 + \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \right). \quad (2.11)$$

Длина волны света  $\lambda = \frac{2\pi c}{\Omega}$ , длина волны, соответствующая

резонансному поглощению энергии, равна  $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0}$ . Перейдем

в формуле (2.11) от частот к длинам волн,  $\Omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$ ,  $\omega_0 = \frac{2\pi c}{\lambda_0}$ .

$$n^2 = 1 + \frac{\eta e \lambda_0^2}{4\pi^2 m} \left( 1 + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \right).$$

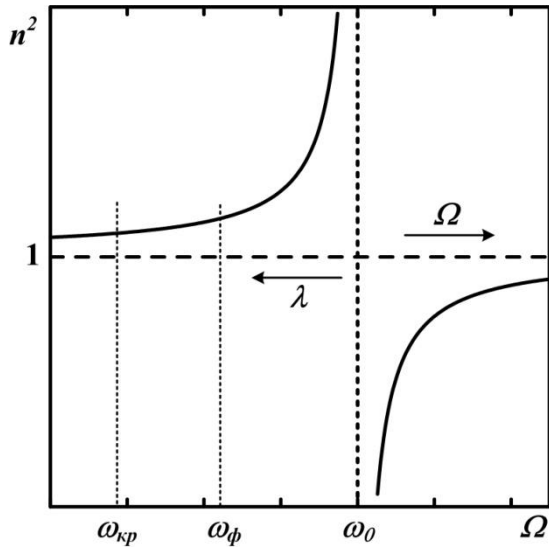


Рис. 27. График зависимости квадрата показателя преломления от частоты электромагнитной волны

Введем следующие обозначения

$$A = \frac{\eta e \lambda_0^2}{4\pi^2 m}; \quad B = \lambda_0^2.$$

Теперь формулу (2.11) можно переписать в виде

$$n^2 = 1 + A \left( 1 + \frac{B}{\lambda^2} \right). \quad (2.12)$$

Эту формулу легко сравнить с экспериментальными данными, а также с формулой Френеля – Коши. Полученный результат совпадает с эмпирической формулой Френеля – Коши. Расхождение с экспериментом составляет 10 - 20%.

Отметим, что формула (2.12) имеет ограниченную область применения. Она справедлива только для разреженных газов, в которых можно пренебречь взаимодействием между излучающими электронами соседних атомов. Для жидкостей и твердых тел следует учитывать взаимодействие электронов различных атомов, расстояния между которыми в жидкостях и твердых телах значительно меньше. Кроме того, поглощение электромагнитных волн атомами следует описывать в терминах квантовой механики, учитывая не только энергии переходов электронов в атоме, но и вероятности различных переходов. Это также приведет к изменению количественных закономерностей дисперсии света. Однако эти вопросы выходят далеко за рамки нашего курса и они рассматриваются в курсах физики конденсированного состояния вещества.

Мы рассмотрели, как изменяется показатель преломления разреженных газов вдали от линии поглощения, если длина волны излучения много больше длины волны, для которой наблюдается резонансное поглощение света. Правая часть кривой на графике на рис. 27 соответствует длинам волн жесткого ультрафиолетового или рентгеновского излучения.

Интересно, что в этом случае получается, что показатель преломления меньше единицы. Это подтверждается тем, что в



эксперименте наблюдается полное внутреннее отражение рентгеновских лучей при переходе их из воздуха в стекло. Как известно, полное внутреннее отражение наблюдается при переходе излучения из оптически более плотной в оптически менее плотную среду. Так, световые волны испытывают полное внутреннее отражение при переходе из стекла в воздух. Но физический смысл показателя преломления состоит в том, что он показывает, во сколько раз скорость света в данной среде меньше скорости света в вакууме. Таким образом, из того, что показатель преломления рентгеновских лучей в каком-то случае меньше единицы, означает, что *фазовая* скорость рентгеновских лучей больше скорости света. Но противоречия со специальной теорией относительности здесь нет, так как речь идет именно о фазовой скорости. Скорость, с которой электромагнитная волна переносит энергию и импульс, называется групповой скоростью, и она отличается от фазовой скорости. Она остается меньше скорости света в вакууме.

### **Выводы:**

1. В рамках классической электронной модели дисперсии для разреженных газов при длинах волн оптического излучения, далеких от линий интенсивного поглощения света веществом величина показателя преломления определяется формулой

$$n^2 = 1 + A \left( 1 + \frac{B}{\lambda^2} \right),$$

где  $A = \frac{\eta e \lambda_0^2}{4\pi^2 m}$ ,  $B = \lambda_0^2$ ,  $\eta$  – концентрация излучающих «оптических» электронов,  $\lambda_0$  – длина волны, соответствующая линии поглощения,  $e$  – элементарный заряд,  $m$  – масса электрона.

2. В случае, когда длина волны излучения много больше длины волны, соответствующей линии поглощения, в

разреженных газах наблюдается нормальная дисперсия, при которой показатель преломления уменьшается с ростом длины волны.

### Контрольные вопросы

1. Нарисуйте график зависимости показателя преломления от частоты падающей на вещество электромагнитной волны согласно теории Лоренца. Какими особенностями обладает эта зависимость?

2. Укажите на графике области частот электромагнитной волны, соответствующие нормальной и аномальной дисперсии.

3. Каков физический смысл частоты, на которую приходится разрыв функции, описывающей зависимость показателя преломления от частоты колебаний в электромагнитной волне.

### 2.5. Аномальная дисперсия

Как было показано выше, для разреженных газов диэлектрическая проницаемость в зависимости от частоты  $\Omega$  электромагнитной волны, воздействующей на газ, может быть выражена так:

$$\varepsilon = 1 + \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} \frac{\eta e^2}{m}. \quad (2.13)$$

Здесь  $\omega_0$  – частота, на которой происходит резонансное поглощение энергии электромагнитной волны газом,  $\eta$  – концентрация «оптических» электронов в газе,  $e$  – элементарный заряд,  $m$  – масса электрона.

Вблизи линии поглощения, то есть когда не выполняется условие  $\Omega \ll \omega_0$ , уже нельзя пренебрегать поглощением электромагнитной волны. В этом случае показатель преломления становится комплексной функцией. Выясним, какой физический смысл имеет действительная и мнимая части диэлектрической проницаемости. Как известно из

электродинамики, диэлектрическая проницаемость вещества показывает, во сколько раз напряженность электрического поля в веществе меньше, чем в вакууме. Пусть  $E_0$  – амплитуда колебаний электрического поля в волне, распространяющейся в вакууме,  $E$  – амплитуда колебаний напряженности электрического поля в веществе. Тогда  $\varepsilon = E_0/E$ , а  $E = E_0/\varepsilon$ . Пусть теперь диэлектрическая проницаемость является комплексным числом,

$$\varepsilon' = \varepsilon + i\delta.$$

Амплитуда колебаний напряженности электрического поля волны при распространении ее в веществе

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon + i\delta}.$$

Согласно правилам выполнения арифметических операций с комплексными числами, частное от деления комплексных чисел  $a + ib$  и  $c + id$

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

В нашем случае делимое – действительное число, поэтому  $a = E_0$ ,  $b = 0$ ,  $c = \varepsilon$ ,  $d = \delta$ . Подставляя эти значения, получим для амплитуды электромагнитной волны в веществе

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon + i\delta} = \frac{\varepsilon E_0}{\varepsilon^2 + \delta^2} - \frac{E_0 \delta}{\varepsilon^2 + \delta^2}i$$

Интенсивность излучения пропорциональна квадрату амплитуды колебаний напряженности электрического поля в волне.

$$I \sim E^2 = \frac{\varepsilon^2 E_0^2}{(\varepsilon^2 + \delta^2)^2} - \frac{E_0^2 \delta^2}{(\varepsilon^2 + \delta^2)^2} + \frac{2E_0^2 \varepsilon \delta}{(\varepsilon^2 + \delta^2)^2}i = \frac{E_0^2 (\varepsilon^2 - \delta^2)}{(\varepsilon^2 + \delta^2)^2} + \frac{2E_0^2 \varepsilon \delta}{(\varepsilon^2 + \delta^2)^2}i$$

Из последней формулы видно, что амплитуда колебаний напряженности электрического поля (действительная часть)

уменьшается. На это влияет не только величина действительной части диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ , но и ее мнимая часть  $\delta$ . Убывание интенсивности излучения, связанное с мнимой частью диэлектрической проницаемости, обусловлено поглощением электромагнитных волн веществом.

Графики зависимостей действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемостей для случая разреженного газа представлены на рис. 28 и рис. 29.

График зависимости действительной части диэлектрической проницаемости от частоты в основном описывает зависимость показателя преломления от частоты. Частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответствуют максимуму и минимуму диэлектрической проницаемости. При наличии поглощения функция  $Re(\epsilon)$ , передающая в основных чертах поведение показателя преломления из кривой с разрывом (рис. 27) превратилась в непрерывную кривую  $ABCD$ . Участки  $AB$  и  $CD$  соответствуют случаю нормальной дисперсии, когда

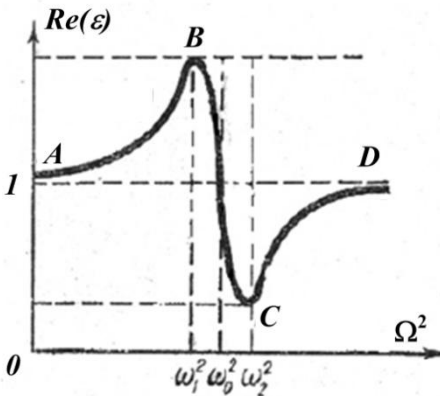


Рис. 28. Зависимость действительной части диэлектрической проницаемости от частоты колебаний в волне [3]

$$\frac{\partial n}{\partial \omega} > 0, \quad \frac{\partial n}{\partial \lambda} < 0.$$

Для разных цветов показатели преломления соответствуют соотношению

$$n_{\text{фиол}} > n_{\text{красн}}.$$

Участок  $BC$  (рис. 83) соответствует случаю аномальной дисперсии, когда

$$\frac{\partial n}{\partial \omega} < 0, \quad \frac{\partial n}{\partial \lambda} > 0.$$

Для показателей преломления лучей различных

цветов в этой области частот справедливо соотношение

$$n_{\text{фиол}} < n_{\text{красн}}$$

При  $\omega > \omega_0$  показатель преломления  $n < 1$ . Это означает, что в таких условиях фазовая скорость волны *больше* скорости света в вакууме. Это не противоречит теории относительности, так как запрет  $v < c$  распространяется только на скорость переноса энергии, а фазовая скорость не является скоростью переноса энергии.

Изменение мнимой части с изменением частоты подобно изменению коэффициента поглощения веществом электромагнитных волн. Максимум поглощения наблюдается при резонансе частот. Это хорошо согласуется с теорией электронного строения атома. Поглощение электромагнитной волны веществом минимально в случае, когда частота колебаний напряженности электрического поля в волне сильно отличается от частоты собственных колебаний электрона в атоме (точки *A* и *D* на рис. 29).

Экспериментально зависимость показателя преломления от длины волны для паров натрия была исследована Кнудтом, а затем опыт был усовершенствован Вудом. Натрий имеет линию поглощения, соответствующую длине волны около 0,590 нм, что соответствует желтому цвету. В этих экспериментах была получена зависимость

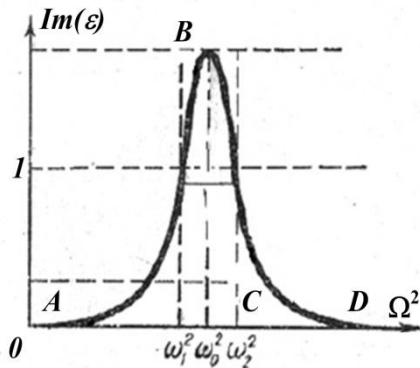


Рис. 29. Зависимость мнимой части диэлектрической проницаемости от частоты колебаний в волне

показателя преломления, качественно совпадающая с тем, что получается в рамках электронной теории дисперсии (рис.30).

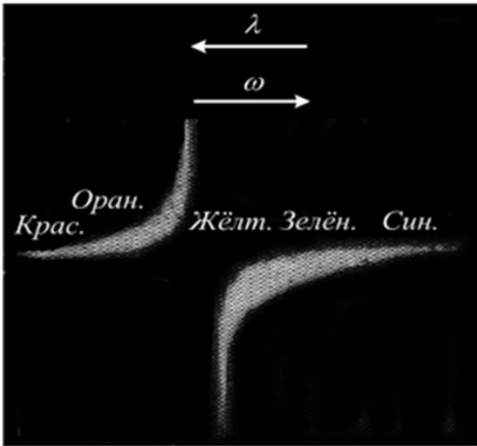
**Выводы:**

1. Классическая электронная теория дисперсии хорошо описывает зависимость показателя преломления для разреженных газов и паров металлов.

2. Нормальная дисперсия соответствует областям длин волн, далеко отстоящим от линий поглощения электромагнитных волн веществом.

3. В областях длин волн вблизи линий поглощения наблюдается аномальная дисперсия и сильное поглощение электромагнитных волн веществом.

4. Классическая электронная теория дисперсии является



хорошей основой для объяснения процессов преломления света в твердых телах и жидкостях. Для получения более точных результатов следует более точно учитывать взаимодействие заряженных частиц и квантово-механические закономерности процессов поглощения света.

Рис. 30. Разрыв спектра на экране в опыте Кнудта – Вуда. Частота, при которой происходит разрыв, соответствует линии поглощения натрия. Рисунок из книги [3]

### Контрольные вопросы

1. Насколько хорошо описывает теория Лоренца зависимость показателя преломления от частоты колебаний в электромагнитной волне, наблюдаемую в эксперименте?
2. В чем состоит физический смысл действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости?
3. В какой области частот электромагнитной волны поглощение света максимально? Какая дисперсия наблюдается в этом интервале частот световых волн?
4. Возможно ли значение показателя преломления  $n < 1$ ? Не противоречит ли это постулатам специальной теории относительности?

**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Колпачев А.Б., Колпачева О.В. Волновая оптика. Конспект лекций, ч.1. Учебное пособие к изучению курса физики. – Таганрог, Изд-во ЮФУ, 2013. – 86 с.
2. Колпачев А.Б., Колпачева О.В. Волновая оптика. Конспект лекций, ч.2. – Ростов-на-Дону, Изд-во ЮФУ, 2014. – 80 с.
3. Калитеевский Н.И. Волновая оптика. – М.: Высшая школа, 1978. – 384 с.
4. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. – М.: Наука, 1973.–719 с.
5. Ландсберг Г.С. Оптика. – М.: Наука, 1976. – 848 с.
6. Королев Ф.А. Курс физики. Оптика и атомная физика. – М.: Просвещение, 1974. – 608 с.
7. Савельев И.В. Курс физики. Т.2., – СПб.: Лань, 2007. – 496 с.
8. Сивухин Д.В. Общий курс физики, Т.4. Оптика. – М.: Наука, 1980. – 752 с.
9. Матвеев А.Н. Оптика. – М.: Высшая школа, 1985. – 352 с.
10. Кудрявцев П.С. Курс истории физики. – М.: Просвещение, 1982. – 448 с.
11. Уколов А.С. Лекции по общему курсу физики. Часть V. Электромагнитное поле. Колебания и волны. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2001. – 129 с.
12. Заичкин Н.Н. Лекции по общему курсу физики. Часть VI. Оптика. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2006 . – 138 с.



## СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1. Дифракция света.	
1.1. Наблюдение дифракции. ....	4
1.2. Принцип Гюйгенса - Френеля. ....	7
1.3. Метод зон Френеля .....	10
1.4. Объяснение дифракции плоских волн на отверстиях с помощью метода зон Френеля .....	12
1.5. Дифракция плоской волны на отверстии. Количественная теория .....	17
1.6. Дифракция плоской волны на периодической структуре. ....	25
1.7. Дифракция сферических волн (дифракция Френеля). Постановка задачи .....	37
1.8. Уравнение волны, исходящей из одного точечного источника на сферической поверхности .....	39
1.9. Разбиение сферического волнового фронта на зоны Френеля	42
1.10. Определение амплитуды колебаний напряженности электрического поля при дифракции сферической волны на отверстии	48
1.11. Примеры наблюдения дифракции сферических волн .....	54
1.12. Условия наблюдения дифракции .....	59
1.13. Примеры решения задач .....	62
1.14. Задания для самостоятельного решения .....	65
2. Дисперсия света.	
2.1. Наблюдение дисперсии света .....	69
2.2. Основные положения электронной теории дисперсии .....	73
2.3. Уравнение колебаний электрона под воздействием электромагнитной волны .....	76
2.4. Дисперсия вдали от линии поглощения (нормальная дисперсия) .....	84

2.5. Аномальная дисперсия .....	90
Библиографический список .....	96

**Учебное издание**

КОЛПАЧЁВ Алексей Борисович  
КОЛПАЧЁВА Ольга Валериевна

**ВОЛНОВАЯ ОПТИКА  
ДИФРАКЦИЯ И ДИСПЕРСИЯ СВЕТА**

Ответственный за выпуск      Колпачев А. Б.  
Редактор  
Корректор

Подписано в печать                      2017 г.

Заказ №                      . Тираж      экз.

Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub> . Усл. п.л. 5,75. Уч.-изд. л. .

---

Издательство Южного федерального университета

344091, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1.

Тел. (863)2478051

Отпечатано в Секторе обеспечения полиграфической  
продукцией кампуса в г. Таганроге отдела полиграфической,

корпоративной и сувенирной продукции

ИПК КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ

ГСП 17А, Таганрог, 28, Энгельса, 1.

Тел. (8634) 371717